

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期中考试试卷

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 函数 $f(x) = (x - [x]) \sin 2\pi x$ 是 ()
(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数
- 有以下命题: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ 不存在,
 ① $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 不存在 ② $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) + h(x))$ 不存在
 ③ $\lim_{x \rightarrow a} (h(x)g(x))$ 不存在 ④ $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) + f(x))$ 不存在
 则以上命题正确的个数是 ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 设函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = 2$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处增量 Δy 是 ()
(A) 与 Δx 同阶的无穷小 (B) 与 Δx 等价的无穷小
(C) 比 Δx 高阶的无穷小 (D) 比 Δx 低阶的无穷小
- 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x} \right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()
(A) 连续 (B) 有可去间断点 (C) 有跳跃间断点 (D) 有无穷间断点
- 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(x)$ 等于 ()
(A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $[f(x)]^{n+1}$ (C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{2^x + x} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x \cos x} - e^x$ 与 x^k 是同阶无穷小量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 曲线 L 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在 $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是 _____.

10. 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} =$ _____.

三、计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)

11. 已知数列 $a_n = \sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

12. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} \right)$.

13. 求函数 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

15. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

16. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有定义, 且满足 $x \leq f(x) \leq x^2 + x$, $-1 \leq x \leq 1$, 求 $f'(0)$.

四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 证明方程 $3^x + \cos x = 3$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

18. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1, 2, \dots$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛.