

# 安徽大学 2023—2024 学年第一学期

## 《高等数学 A (一)》期中考试试题参考答案及评分标准

一. 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. C      2. B      3. A      4. B      5. A

二. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 0      7. 3      8. -2      9.  $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$       10.  $-\pi dx$

三. 计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)

$$11. \text{ 解: } \sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+n-1} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

..... (10 分)

$$12. \text{ 解: } \frac{1+2+\cdots+n}{2n^2+n} \leq \frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{2n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{2n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2+n} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{由夹逼准则, 得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n^2+1} + \frac{2}{2n^2+2} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} \right) = \frac{1}{4}$$

..... (10 分)

$$13. \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}{x \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\frac{1}{2}x^3 \cdot (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

..... (10 分)

14. 解:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2-1=1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0+1=1$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1$

..... (10 分)

15. 解:

【解析】对方程  $xy + e^y = x+1$  两边关于  $x$  求导有  $y + xy' + y'e^y = 1$ , 得  $y' = \frac{1-y}{x+e^y}$

对  $y + xy' + y'e^y = 1$  再次求导可得  $2y' + xy'' + y''e^y + (y')^2 e^y = 0$ ,

得  $y'' = -\frac{2y' + (y')^2 e^y}{x + e^y}$  (\*)

当  $x=0$  时,  $y=0$ ,  $y'(0) = \frac{1-0}{e^0} = 1$ , 代入 (\*) 得

$y''(0) = -\frac{2y'(0) + (y'(0))^2 e^0}{(0+e^0)^3} = -(2+1) = -3$

..... (10 分)

16. 解: 依题意,  $x \leq f(x) \leq x^2 + x, -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) = 0$

$$x \leq f(x) - f(0) \leq x^2 + x$$

$x \rightarrow 0^+, 1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq x+1$ , 两边取右极限  $\Rightarrow f'_+(0) = 1$

$x \rightarrow 0^-, 1 \geq \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq x+1$ , 两边取左极限  $\Rightarrow f'_-(0) = 1$

$f'(0)$  存在, 且  $f'(0) = 1$ .

..... (10 分)

#### 四. 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 证明: 令  $f(x) = 3^x + \cos x - 3$ , 显然  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且

$f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = \cos 1 > 0$ ,

由零点定理知, 至少存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ , 故

方程  $3^x + \cos x = 3$  在区间  $(0,1)$  内至少有一个实根.

..... (5 分)

18. 证明:

由  $0 < x_1 < 3$  知  $x_1$  及  $3 - x_1$  均为正数, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}. \text{ 假设 } 0 < x_k \leq \frac{3}{2},$$

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}. \text{ 由数学归纳法知}$$

对任意正整数有  $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$ . 另一方面,

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n \leq \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} = \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0$$

由单调有界定理,  $\{x_n\}$  收敛.

..... (5 分)