

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期末模拟卷二

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$

则有

A. $N < P < M$

B. $M < P < N$

C. $N < M < P$

D. $P < M < N$

2. 若 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$

A. $\frac{1}{x} + C$

B. $-\frac{1}{x} + C$

C. $\ln x + C$

D. $-\ln x + C$

3. n 取何值时, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^n} dx$ 收敛

A. $n < 1$

B. $n > 2$

C. $1 < n < 2$

D. $n < 1$ 或 $n > 2$

4. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则 $a < x < b$ 时,

A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$

D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

5. 设 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a , b 满足 ()

A. $a < 0$, $b < 0$

B. $a > 0$, $b > 0$

C. $a \leq 0$, $b > 0$

D. $a \geq 0$, $b < 0$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x + b \cos x}{\sqrt{1+x}-1} = 4$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____

7. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 _____ 间断点

8. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx}|_{t=e} = \underline{\hspace{2cm}}$
9. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
10. 函数 $f(x) = x^x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (每小题 10 分, 共 50 分)

11. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求常数 a, b 的值.
12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}$
13. 求微分方程 $\begin{cases} y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的解
14. 计算不定积分 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$
15. 计算 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + \sin x \cos x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

四、应用题 (每小题 10 分, 共 10 分)

16. 过原点作曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的切线, 设此曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形为 A .
- (1) 求 A 的面积;
- (2) 求 A 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $F(x) = \int_0^x t^2 f(t)dt$, 且 $F(1) = f(1)$, 证明:
在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$.
18. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$