

# 安徽大学 2021—2022 学年第一学期

## 《高等数学 A (一)》期末考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

### 一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = x - \ln(1+x)$  与  $x^n$  是同阶无穷小, 则  $n =$  ( ).

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 若函数  $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 ( ) 间断点.

- (A) 可去 (B) 跳跃  
(C) 第二类无穷型 (D) 第二类振荡型

3. 若  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极小值, 则下列命题中正确的是 ( ).

- (A)  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内单调减少, 在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内单调增加  
(B) 在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内  $f'(x) < 0$ , 在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内  $f'(x) > 0$   
(C)  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) > 0$   
(D) 对任意  $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ , 恒有  $f(x) > f(x_0)$

4. 微分方程  $y'' + 4y = \frac{1}{2} \cos 2x$  的特解形式为 ( ).

- (A)  $ax \cos 2x$  (B)  $a \cos 2x$   
(C)  $ax \cos 2x + bx \sin 2x$  (D)  $a \cos 2x + b \sin 2x$

5. 下列广义积分中, 发散的是 ( ).

- (A)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  (B)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  (C)  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$  (D)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

### 二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right) =$  \_\_\_\_\_.

7. 曲线  $y = x \left( 1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$  的斜渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

8. 曲线  $y = \sqrt{1+x^2}$  在点  $(0, 1)$  处的曲率为\_\_\_\_\_.

9. 曲线段  $y = \ln \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ) 的弧长为\_\_\_\_\_.

10.  $\int_{-3}^3 (x^3 \cos x + \sqrt{9-x^2}) dx =$ \_\_\_\_\_.

### 三、计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$ .

12. 设  $y = f(x)$  由方程  $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$  所确定, 求曲线  $y = f(x)$  在  $x = 0$  处的法线方程.

13. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上有二阶连续导数, 且  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f'(2) = 5$ , 求  $\int_0^1 x f''(2x) dx$ .

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ , 求  $\int_1^4 f(x-2) dx$ .

15. 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $xdy + (x-2y)dx = 0$  满足条件  $y(1) = 2$  的解, 求曲线  $y = y(x)$  与  $x$  轴所围图形的面积.

16. 求函数  $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$  在区间  $[0, +\infty)$  上的最大值和最小值.

### 四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ ,

证明: 方程  $\int_0^x f(t) dt + \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt = 0$  在  $(0, 1)$  内有唯一的实根.

18. 设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导, 且  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(2) = 2$ .

证明: 存在  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$ .