多项式优化入门

王杰

中国科学院数学与系统科学研究院

中国科学院大学, 2025 年春季

课程内容

1. 半定规划
2. 平方和理论
3. 测度和矩
4. 矩-平方和松弛分层
5. 项稀疏（TS）
6. 变量稀疏（CS）
7. 扩展与应用
8. 软件与实验

多项式非负性

问题

给定一个 $2d$ 次多变元多项式 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$，判断 $f(\mathbf{x})$ 是否是非负的；是的话，给出其非负性的一个证书（certificate）.

- 实代数几何中的核心问题（Hilbert 第十七问题）
- 在基础数学和应用数学各分支中广泛出现
- 多项式优化的理论基础
- $2d \geq 4$： NP-难

多项式非负性

问题

给定一个 $2d$ 次多变元多项式 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$，判断 $f(\mathbf{x})$ 是否是非负的；是的话，给出其非负性的一个证书（certificate）.

- 实代数几何中的核心问题（Hilbert 第十七问题）
- 在基础数学和应用数学各分支中广泛出现
- 多项式优化的理论基础
- $2d \geq 4$：NP-难

多项式非负性

问题

给定一个 $2d$ 次多变元多项式 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$，判断 $f(\mathbf{x})$ 是否是非负的；是的话，给出其非负性的一个证书（certificate）.

- 实代数几何中的核心问题（Hilbert 第十七问题）
- 在基础数学和应用数学各分支中广泛出现
- 多项式优化的理论基础
- $2d \geq 4$：NP-难

多项式非负性

问题

给定一个 $2d$ 次多变元多项式 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$，判断 $f(\mathbf{x})$ 是否是非负的；是的话，给出其非负性的一个证书（certificate）.

- 实代数几何中的核心问题（Hilbert 第十七问题）
- 在基础数学和应用数学各分支中广泛出现
- 多项式优化的理论基础
- $2d \geq 4$：NP-难

多项式非负性

问题

给定一个 $2d$ 次多变元多项式 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$，判断 $f(\mathbf{x})$ 是否是非负的；是的话，给出其非负性的一个证书（certificate）.

- 实代数几何中的核心问题（Hilbert 第十七问题）
- 在基础数学和应用数学各分支中广泛出现
- 多项式优化的理论基础
- $2d \geq 4$：NP-难

实闭域上的量词消去

- $f(\mathbf{x})$ 非负 $\iff \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) \geq 0$
- Tarski，1951：实闭域上的量词消去是可判定的
- Collins，1975：柱形代数分解（CAD）
- Doubly exponential complexity

平方和（sum of squares，SOS）分解

- **平方和分解**：

$$f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ 非负}$$

例子：$f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert, 1888：

"非负多项式 = 平方和" $\iff$ $n = 1 \,||\, 2d = 2 \,||\, n = 2, 2d = 4$

- Artin, 1927："非负多项式 = 有理函数的平方和"（Hilbert 第十七问题）
- Blekherman, 2006："非负多项式 $\gg$ 平方和"，固定 $2d$，$n \to \infty$
- Motzkin 多项式：$M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

平方和（sum of squares，SOS）分解

- 平方和分解：

$$f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ 非负}$$

例子：$f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert, 1888：

“非负多项式 = 平方和” $\iff$ $n = 1 \,||\, 2d = 2 \,||\, n = 2, 2d = 4$

- Artin, 1927：“非负多项式 = 有理函数的平方和”（Hilbert 第十七问题）
- Blekherman, 2006：“非负多项式 $\gg$ 平方和”，固定 $2d$，$n \to \infty$
- Motzkin 多项式：$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

平方和（sum of squares，SOS）分解

- 平方和分解：

$$f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ 非负}$$

例子：$f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert, 1888：

“非负多项式 = 平方和” $\iff$ $n = 1 \,||\, 2d = 2 \,||\, n = 2, 2d = 4$

- Artin, 1927：“非负多项式 = 有理函数的平方和”（Hilbert 第十七问题）
- Blekherman, 2006：“非负多项式 $\gg$ 平方和”，固定 $2d$，$n \to \infty$
- Motzkin 多项式：$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

平方和（sum of squares，SOS）分解

- 平方和分解：

$$f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ 非负}$$

例子：$f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1+x)^2 + (x+y)^2$

- Hilbert, 1888：

“非负多项式 = 平方和” $\iff$ $n = 1 \,||\, 2d = 2 \,||\, n = 2, 2d = 4$

- Artin, 1927：“非负多项式 = 有理函数的平方和”（Hilbert 第十七问题）
- Blekherman, 2006：“非负多项式 $\gg$ 平方和”，固定 $2d$，$n \to \infty$
- Motzkin 多项式： $M(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

平方和（sum of squares，SOS）分解

- 平方和分解：

$$f = f_1^2 + \cdots + f_t^2 \quad \rightsquigarrow \quad f \text{ 非负}$$

例子：$f = 1 + 2x + 2x^2 + 2xy + y^2 = (1 + x)^2 + (x + y)^2$

- Hilbert, 1888：

“非负多项式 = 平方和” $\Longleftrightarrow$ $n = 1 \,||\, 2d = 2 \,||\, n = 2, 2d = 4$

- Artin, 1927：“非负多项式 = 有理函数的平方和”（Hilbert 第十七问题）
- Blekherman, 2006：“非负多项式 $\gg$ 平方和”, 固定 $2d$， $n \to \infty$
- Motzkin 多项式： $M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2$

平方和分解和半定规划

- 设 $\deg(f) = 2d$, 取单项式基 $[\mathbf{x}]_d := [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- $f(\mathbf{x})$ 是平方和 $\iff$ 存在半正定矩阵 G 使得

$$f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_d \cdot G \cdot [\mathbf{x}]_d^\mathsf{T}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists G \succeq 0, \quad f_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} G_{\beta,\gamma}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_d^n \quad \rightsquigarrow \quad \text{SDP}$$

- G 称作 f 的Gram 矩阵 $\rightsquigarrow \binom{n+d}{n} = \binom{n+d}{d}$ 阶

平方和分解和半定规划

- 设 $\deg(f) = 2d$, 取单项式基 $[\mathbf{x}]_d := [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- $f(\mathbf{x})$ 是平方和 $\iff$ 存在半正定矩阵 G 使得

$$f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_d \cdot G \cdot [\mathbf{x}]_d^{\intercal}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists G \succeq 0, \quad f_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}} G_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_d^n \quad \rightsquigarrow \quad \text{SDP}$$

- G 称作 f 的Gram 矩阵 $\rightsquigarrow$ $\binom{n+d}{n} = \binom{n+d}{d}$ 阶

平方和分解和半定规划

- 设 $\deg(f) = 2d$, 取单项式基 $[\mathbf{x}]_d := [1, x_1, \ldots, x_n, x_1^d, \ldots, x_n^d]$
- $f(\mathbf{x})$ 是平方和 $\iff$ 存在半正定矩阵 G 使得

$$f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_d \cdot G \cdot [\mathbf{x}]_d^\intercal$$

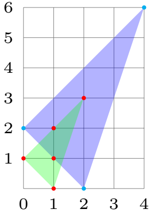
$$\Updownarrow$$

$$\exists G \succeq 0, \quad f_{\alpha} = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} G_{\beta,\gamma}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_d^n \quad \rightsquigarrow \quad \text{SDP}$$

- G 称作 f 的Gram 矩阵 $\rightsquigarrow \binom{n+d}{n} = \binom{n+d}{d}$ 阶

Newton 多面体与约化单项式基

- Newton 多面体： $\mathrm{New}(f) := \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(f))$
- Reznick，1978： $f = \sum f_i^2 \Longrightarrow \mathrm{New}(f_i) \subseteq \frac{1}{2}\mathrm{New}(f)$



$$f(\mathbf{x}) = 4x_1^4x_2^6 + x_1^2 - x_1x_2^2 + x_2^2$$

$$v(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_1x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2^3]$$

$$\exists G \succeq 0, \quad f(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})\,G v(\mathbf{x})^\mathsf{T}$$

符号对称性与置换对称性

- 符号对称性： $f(x_1, x_2, x_3) = f(-x_1, -x_2, x_3)$
  - $v(\mathbf{x}) = [1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2] \rightsquigarrow$

    $v_1(\mathbf{x}) = [1, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^2],\ v_2(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_1x_3, x_2x_3]$

    $\exists G_1, G_2 \succeq 0, \quad f(\mathbf{x}) = v_1(\mathbf{x})G_1v_1(\mathbf{x})^\intercal + v_2(\mathbf{x})G_2v_2(\mathbf{x})^\intercal$

- 置换对称性： $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_1, x_2)$
  - Gatermann & Parrilo, 2004：群论，对称基，块对角化

符号对称性与置换对称性

- **符号对称性**： $f(x_1, x_2, x_3) = f(-x_1, -x_2, x_3)$
  - $v(\mathbf{x}) = [1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2] \rightsquigarrow$
    $v_1(\mathbf{x}) = [1, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^2]$, $v_2(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_1x_3, x_2x_3]$
    $\exists G_1, G_2 \succeq 0, \quad f(\mathbf{x}) = v_1(\mathbf{x}) G_1 v_1(\mathbf{x})^\intercal + v_2(\mathbf{x}) G_2 v_2(\mathbf{x})^\intercal$
- **置换对称性**： $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_1, x_2)$
  - Gatermann & Parrilo, 2004：群论，对称基，块对角化

有理 SOS 分解

定理

如果 f 存在正定的有理 *Gram* 矩阵，则 f 存在有理 *SOS* 分解.

- Peyrl & Parrilo，2007：数值 SOS 分解 $\rightsquigarrow$ 有理 SOS 分解

Reznick's Positivstellensatz

- $\Sigma(\mathbf{x}) := \{f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \mid f = \sum_i f_i^2,\ f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]\}$

定理 (Reznick, 1995)

若 $\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) > 0$, 则存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得

$$(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^r f(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}].$$

基础半代数集上的非负性

- **基础半代数集** $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) \geq 0\}$
- $S = \mathbb{R}^n$，球，球面，单形，环面，非负象限…

问题

如何判断 $f(\mathbf{x})$ 在基础半代数集 S 上的非负性并给出非负性证书（certificate）？

二次模（quadratic module）

- 给定一组多项式 $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_0 := 1$
- 二次模:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- 截断二次模:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_i g_i) \leq 2r, i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- $f \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

二次模（quadratic module）

- **给定一组多项式** $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_0 := 1$
- 二次模:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- 截断二次模:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_i g_i) \leq 2r, i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- $f \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

二次模（quadratic module）

- **给定一组多项式 $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_0 := 1$**
- 二次模：

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- 截断二次模：

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_i g_i) \leq 2r, i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- $f \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

二次模（quadratic module）

- **给定一组多项式** $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$，$g_0 := 1$
- 二次模：

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}) := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- 截断二次模：

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i g_i \,\middle|\, \sigma_i \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_i g_i) \leq 2r, i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

- $f \in \mathcal{Q}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

Putinar's Positivstellensatz

- $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) \geq 0\}$
- **阿基米德条件**：存在 $N > 0$ 使得 $N - \|\mathbf{x}\|_2^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}) \rightsquigarrow S$ 是紧集

定理 (Putinar's Positivstellensatz, 1993)

假设 $\mathcal{Q}(\mathrm{g})$ 满足阿基米德条件. 如果 f 在 S 上是严格正的，那么

$$f \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}).$$

Putinar's Positivstellensatz

- $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) \geq 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) \geq 0\}$
- 阿基米德条件：存在 $N > 0$ 使得 $N - \|\mathbf{x}\|_2^2 \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}) \rightsquigarrow S$ 是紧集

定理 (Putinar's Positivstellensatz, 1993)

假设 $\mathcal{Q}(\mathbf{g})$ 满足阿基米德条件. 如果 f 在 S 上是严格正的，那么

$$f \in \mathcal{Q}(\mathbf{g}).$$

预序（preorder）

- 给定一组多项式 $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_I := \prod_{i \in I} g_i$
- 预序:

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}) := \left\{ \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,m\}} \sigma_I g_I \,\middle|\, \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), I \subseteq \{1, \ldots, m\} \right\}$$

- 截断预序:

$$\mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,m\}} \sigma_I g_I \,\middle|\, \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_I g_I) \leq 2r, I \subseteq \{1, \ldots, m\} \right\}$$

- $f \in \mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

预序（preorder）

- 给定一组多项式 $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_I := \prod_{i \in I} g_i$
- 预序：

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}) := \left\{ \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,m\}} \sigma_I g_I \;\middle|\; \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), I \subseteq \{1, \ldots, m\} \right\}$$

- 截断预序：

$$\mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,m\}} \sigma_I g_I \;\middle|\; \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_I g_I) \leq 2r, I \subseteq \{1, \ldots, m\} \right\}$$

- $f \in \mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

预序（preorder）

- **给定一组多项式** $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_I := \prod_{i\in I} g_i$
- 预序:

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}) := \left\{ \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,m\}} \sigma_I g_I \,\middle|\, \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), I \subseteq \{1,\ldots,m\} \right\}$$

- 截断预序:

$$\mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,m\}} \sigma_I g_I \,\middle|\, \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_I g_I) \le 2r, I \subseteq \{1,\ldots,m\} \right\}$$

- $f \in \mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

预序（preorder）

- 给定一组多项式 $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$, $g_I := \prod_{i\in I} g_i$
- 预序：

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}) := \left\{ \sum_{I\subseteq\{1,\dots,m\}} \sigma_I g_I \,\middle|\, \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), I \subseteq \{1,\dots,m\} \right\}$$

- 截断预序：

$$\mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} := \left\{ \sum_{I\subseteq\{1,\dots,m\}} \sigma_I g_I \,\middle|\, \sigma_I \in \Sigma(\mathbf{x}), \deg(\sigma_I g_I) \leq 2r, I \subseteq \{1,\dots,m\} \right\}$$

- $f \in \mathcal{T}(\mathbf{g})_{2r} \quad \rightsquigarrow \quad$ SDP

Schmüdgen's Positivstellensatz

定理 (Schmüdgen's Positivstellensatz, 1991)

假设 S 是紧的. 如果 f 在 S 上是严格正的，那么

$$f \in \mathcal{T}(\mathbf{g}).$$

实代数簇上的非负性

- $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) = 0\}$
- $f = \sigma + \tau_1 g_1 + \cdots + \tau_m g_m$，其中 $\sigma \in \Sigma[\mathbf{x}]$, $\tau_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}], i = 1, \ldots, m$
- 理想 $\mathcal{I}(\mathbf{g}) := \{\sum_{i=1}^m \tau_i g_i \mid \tau_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}], i = 1, \ldots, m\} \subseteq \mathbb{R}[\mathbf{x}]$
- 在商环 $\mathbb{R}[\mathbf{x}]/\mathcal{I}(\mathbf{g})$ 中，存在 $\sigma(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$ 使得

$$f(\mathbf{x}) \equiv \sigma(\mathbf{x}) \mod \mathcal{I}(\mathbf{g})$$

- 利用 $\mathcal{I}(\mathbf{g})$ 的 Gröbner 基构造约化的单项式基并对等式进行化简

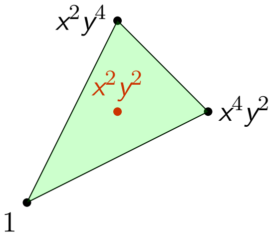
证明非负性的其他方法

问题

除了平方和分解以外，是否存在证明多项式非负性的其他（多项式时间）方法？

Circuit 多项式

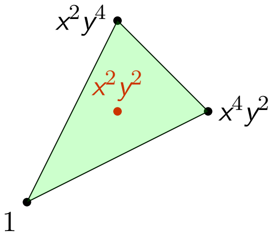
- $M(x,y)=x^4y^2+x^2y^4+1-3x^2y^2$ （算术-几何均值不等式 ⇒ 非负性）



- circuit 多项式：$f(\mathbf{x})=\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^{\alpha}-d_\beta \mathbf{x}^{\beta}$, $\alpha\in(2\mathbb{N})^n$, $c_\alpha>0$, $\mathscr{A}$ 构成一个单形的顶点集, $\beta\in\operatorname{conv}(\mathscr{A})^\circ$

Circuit 多项式

- $M(x,y)=x^4y^2+x^2y^4+1-3x^2y^2$ （算术-几何均值不等式 $\Rightarrow$ 非负性）



- circuit 多项式：$f(\mathbf{x})=\sum_{\alpha\in\mathscr{A}}c_{\alpha}\mathbf{x}^{\alpha}-d_{\beta}\mathbf{x}^{\beta}$，$\alpha\in(2\mathbb{N})^n$，$c_{\alpha}>0$，$\mathscr{A}$ 构成一个单形的顶点集，$\beta\in\operatorname{conv}(\mathscr{A})^{\circ}$

非负 circuit 多项式之和（SONC）

- 非负 circuit 多项式：$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha - d_\beta \mathbf{x}^\beta$，$\boldsymbol{\beta} = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} \lambda_\alpha \boldsymbol{\alpha}$

$$f(\mathbf{x}) \geq 0 \iff \begin{cases} d_\beta \leq \prod_\alpha (c_\alpha/\lambda_\alpha)^{\lambda_\alpha}, & \boldsymbol{\beta} \in (2\mathbb{N})^n \\ |d_\beta| \leq \prod_\alpha (c_\alpha/\lambda_\alpha)^{\lambda_\alpha}, & \boldsymbol{\beta} \notin (2\mathbb{N})^n \end{cases}$$

- SONC 多项式：$f = f_1 + \cdots + f_t$，其中每个 f_i 都是非负 circuit 多项式
  - ➤ $f = (1 + x^4 + y^4 - xy^2) + (1 + x^4 + x^4y^4 - x^2y)$
- 问题：什么样的非负多项式是 SONC 多项式（存在 SONC 分解）？

非负 circuit 多项式之和（SONC）

- 非负 circuit 多项式：$f(\mathbf{x})=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}} c_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}-d_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$，$\boldsymbol{\beta}=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}}\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}$

$$f(\mathbf{x})\geq 0 \iff \begin{cases} d_{\boldsymbol{\beta}}\leq \prod_{\boldsymbol{\alpha}}(c_{\boldsymbol{\alpha}}/\lambda_{\boldsymbol{\alpha}})^{\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}}, & \boldsymbol{\beta}\in(2\mathbb{N})^n \\ |d_{\boldsymbol{\beta}}|\leq \prod_{\boldsymbol{\alpha}}(c_{\boldsymbol{\alpha}}/\lambda_{\boldsymbol{\alpha}})^{\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}}, & \boldsymbol{\beta}\notin(2\mathbb{N})^n \end{cases}$$

- SONC 多项式：$f=f_1+\cdots+f_t$，其中每个 f_i 都是非负 circuit 多项式
  - ➤ $f=(1+x^4+y^4-xy^2)+(1+x^4+x^4y^4-x^2y)$
- 问题：什么样的非负多项式是 SONC 多项式（存在 SONC 分解）？

非负 circuit 多项式之和（SONC）

- 非负 circuit 多项式：$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} c_{\alpha}\mathbf{x}^{\alpha} - d_{\beta}\mathbf{x}^{\beta}$，$\boldsymbol{\beta} = \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} \lambda_{\alpha}\boldsymbol{\alpha}$

$$f(\mathbf{x}) \geq 0 \iff \begin{cases} d_{\beta} \leq \prod_{\alpha}(c_{\alpha}/\lambda_{\alpha})^{\lambda_{\alpha}}, & \boldsymbol{\beta} \in (2\mathbb{N})^n \\ |d_{\beta}| \leq \prod_{\alpha}(c_{\alpha}/\lambda_{\alpha})^{\lambda_{\alpha}}, & \boldsymbol{\beta} \notin (2\mathbb{N})^n \end{cases}$$

- SONC 多项式：$f = f_1 + \cdots + f_t$，其中每个 f_i 都是非负 circuit 多项式
  - ➤ $f = (1 + x^4 + y^4 - xy^2) + (1 + x^4 + x^4y^4 - x^2y)$
- 问题：什么样的非负多项式是 SONC 多项式（存在 SONC 分解）？

SONC 的充分条件（单个负项）

定理 (Wang, 2022)

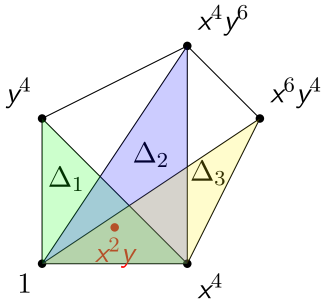
如果多项式 f 是非负的且仅有一个负项，则 f 是 *SONC* 多项式.

- $f = 1 + x^4 + y^4 + x^6y^4 + x^4y^6 - x^2y$

定理 (Wang, 2022)

如果多项式 f 是非负的且仅有一个负项，则 f 是 *SONC* 多项式.

- $f = 1 + x^4 + y^4 + x^6y^4 + x^4y^6 - x^2y$



定理 (Wang, 2022)

如果多项式 f 是非负的且所有负项位于同一胞腔，则 f 是 *SONC* 多项式.

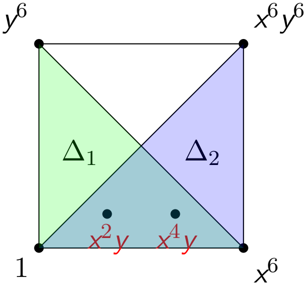
- $f = 1 + x^6 + y^6 + x^6y^6 - x^2y - x^4y$

SONC 的充分条件（多个负项）

定理 (Wang, 2022)

如果多项式 f 是非负的且所有负项位于同一胞腔，则 f 是 SONC 多项式.

- $f = 1 + x^6 + y^6 + x^6y^6 - x^2y - x^4y$



SONC 保持项稀疏

定理 (Wang, 2022)

假设 f 是 *SONC* 多项式，则 f 存在分解：

$$f = \sum_{\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \mathrm{supp}(f)} f_i,$$

其中 f_i 是非负 *circuit* 多项式，且分解中没有相互抵消.

SONC 分解的计算方法

- Seidler & de Wolff, 2018：**几何规划**（geometric programming）
- Wang & Magron，2020：**二阶锥规划**（second order cone programming）
- Murray, Chandrasekaran, & Wierman, 2021：**相对熵规划**（relative entropy programming）

SONC 分解的计算方法

- Seidler & de Wolff, 2018：**几何规划**（geometric programming）
- Wang & Magron，2020：**二阶锥规划**（second order cone programming）
- Murray, Chandrasekaran, & Wierman, 2021：**相对熵规划**（relative entropy programming）

SONC 分解的计算方法

- Seidler & de Wolff, 2018：**几何规划**（geometric programming）
- Wang & Magron，2020：**二阶锥规划**（second order cone programming）
- Murray, Chandrasekaran, & Wierman, 2021：**相对熵规划**（relative entropy programming）

下次课

- 测度和矩理论

参考文献

- J. Wang and V. Magron, *Sparse Polynomial Optimization: Theory and Practice*, World Scientific Publishing, 2023.
- J. Wang, *Nonnegative Polynomials and Circuit Polynomials*, SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry, 2022.
- K. Gatermann and P. A. Parrilo, *Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares*, Journal of Pure and Applied Algebra 192, no. 1-3: 95-128, 2024.
- J. B. Lasserre, *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*, Cambridge University Press, 2015.

更多信息见个人主页

https://wangjie212.github.io/jiewang