
CHAPTER 1

2014-2015 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 计算数列极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2 + 2^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$.

4. 已知 $y = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, 其中 $f'(x) = \arcsin x^2$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 计算曲线 $x^2 - xy + 2y^2 = 2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

7. 设 $x = g(y)$ 是函数 $y = \ln x + \arctan x$ 的反函数, 求 $y = \frac{\pi}{4}$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}$ 和 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

8. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 计算下列函数的导数 y' 以及 y'' :

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = (f(x))^2$.

9. 设函数 $y = \frac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5e^x}$, 使用对数求导法求 $y'|_{x=1}$.

10. 求无穷小量 $u(x) = \cos 2x - \frac{1}{e^{2x^2}} (x \rightarrow 0)$ 的主部.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2}, & x \geq 0, \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 问 $a(a \geq 0)$ 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 并指出该间断点的类型.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, $f'(0)=0, f''(0)=2$. 求 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x) - f(x)}{x^4}$.

13. 设 $f'(x)$ 处处连续, $g(x) = f(x) \sin^2 x$, 求 $g''(0)$.

14. 一个 13 英尺长的梯子斜靠在墙边上, 当梯子的顶端沿着墙面向墙底滑落时, 梯子底端沿地面移动的速度是 5 英尺/秒, 问当梯子底端的地面长度为 12 英尺时, 直角三角形的面积的变化率是多少?

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$.

16. 设函数 $f(x) = \alpha_1 \varphi(x) + \alpha_2 \varphi(2x) + \cdots + \alpha_n \varphi(nx)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是常数, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, 已知对一切实数 x , 有 $|f(x)| \leq |x|$, 试证: $|\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n| \leq 1$.

CHAPTER 2

2014-2015 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 当 n 充分大时, $2^n > 1 + n^2$, 所以 $2^n < 1 + n^2 + 2^n < 2 \cdot 2^n$, 因此

$$2 < (1 + n^2 + 2^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{1+\frac{1}{n}}.$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1+\frac{1}{n}} = 2,$$

由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2 + 2^n)^{\frac{1}{n}} = 2$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2 \cos x}{3x^2(1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan x - \ln x}{1 - \cos x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{x}}{\sin x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin^2 x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \right) \\ &= e^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** $y' = f' \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$, 所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'(-1) \cdot 2 = 2 \arcsin 1 = \pi$.

5. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2t}{1 - \frac{1}{1+t}} = (1+t)(3t+2)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = ((1+t)(3t+2))' \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+t}} = \frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

6. **Solution.** 方程 $x^2 - xy + 2y^2 = 2$ 两边求微分得

$$2x\mathrm{d}x - (x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x) + 4y\mathrm{d}y = 0,$$

将 $x = 1, y = 1$ 代入上式得 $\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\mathrm{d}x$, 所以切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ 即 $x + 3y - 4 = 0$.

7. **Solution.** 函数 $y = \ln x + \arctan x$ 严格单调增加, 当 $y = \frac{\pi}{4}$ 时, $x = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}, \text{ 所以 } \left. \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \right|_{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1} \right) \cdot \frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(3x^2+1)(x^2+x+1) - x(1+x^2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \cdot \frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \left. \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} \right|_{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 3}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

8. **Solution.** (1) $y' = f'(x^2) \cdot 2x$, $y'' = f''(x^2) \cdot (2x)^2 + f'(x^2) \cdot 2 = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$.

(2) $y' = 2f(x)f'(x)$, $y'' = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x)$.

9. **Solution.** $\ln y = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln x - 5\ln x - x$, 所以

$$y' = \frac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5\mathrm{e}^x} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{9}{2x} - 1 \right).$$

$$y'|_{x=1} = \frac{4}{\mathrm{e}} \left(1 - \frac{9}{2} - 1 \right) = -\frac{18}{\mathrm{e}}.$$

10. **Solution.**

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos x - \mathrm{e}^{-2x^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4) \right) - \left(1 - 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

所以无穷小量 $u(x)$ 的主部为 $-\frac{4}{3}x^4$.

2 综合题 (每小题 7 分, 共 28 分)

11. **Solution.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x+2} = \frac{1}{2}$.

若 $a = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = +\infty$, 此时 $x = 0$ 为无穷间断点.

若 $a \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a} + \sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(\sqrt{a} + \sqrt{a-x})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

若 $a \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \neq \frac{1}{2}$, 此时 $x = 0$ 为跳跃间断点.

12. **Solution.** 由于 $f''(0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内可导.

由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 x 之间, 使得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x) - f(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(\tan x - x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3}.\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \rightarrow 0$, 所以由夹逼准则可知 $\xi \rightarrow 0$.

同时, $\frac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\frac{\tan x}{x}$ 之间, 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = 1$. 故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3} &= f''(0) \cdot \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

13. **Solution.** $g'(x) = f'(x) \sin^2 x + f(x) \cdot 2 \sin x \cos x$, 所以 $g'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}g''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \sin^2 x + f(x) \cdot 2 \sin x \cos x}{x} \\ &= f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) \cos x \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= 2f(0).\end{aligned}$$

14. **Solution.** 设 t 时刻梯子底端的地面长度为 $x(t)$ 英尺, 梯子顶端距地面的距离为 $y(t)$ 英尺,

直角三角形的面积为 $S(t)$ 平方英尺. 则 $x^2 + y^2 = 13^2$, $S = \frac{1}{2}xy$.

方程 $x^2 + y^2 = 13^2$ 两边对 t 求导得 $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$,

此时刻 $x = 12$, 所以 $y = 5$, 又 $\frac{dx}{dt} = 5$, 代入得 $\frac{dy}{dt} = -\frac{12}{5} \cdot 5 = -12$.

故 $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{2} (12 \cdot (-12) + 5 \cdot 5) = -\frac{119}{2}$.

即直角三角形的面积的变化率为 $-\frac{119}{2}$ 平方英尺/秒.

3 证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

15. **Proof.** 令 $F(x) = f(x)g(x) - f(x)g(b) - f(a)g(x)$, 则函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,

且 $F(a) = F(b) = -f(a)g(b)$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$,

即 $f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) - f'(\xi)g(b) - f(a)g'(\xi) = 0$, 化简得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}$.

16. **Proof.** $f(0) = \alpha_1\varphi(0) + \alpha_2\varphi(0) + \cdots + \alpha_n\varphi(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1\varphi(x) + \alpha_2\varphi(2x) + \cdots + \alpha_n\varphi(nx)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_1 \frac{\varphi(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_2 \frac{\varphi(2x)}{2x} \cdot 2 + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_n \frac{\varphi(nx)}{nx} \cdot n \\ &= \varphi'(0) (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n. \end{aligned}$$

因为 $\forall x, |f(x)| \leq |x|$, 所以 $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq 1$, 令 $x \rightarrow 0$, 得 $|f'(0)| = |\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n| \leq 1$.