
CHAPTER 1

2015-2016 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

2. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{1 - x} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a, b 的值.

5. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $u(x) = \arcsin x - x$ 的主部与阶数.

6. 设函数 $y = \ln \sqrt{\frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}}$, 求 $y'(1)$.

7. 设函数 $y = \frac{\sin x}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{d(\cot x)}$.

8. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2^x} - x^3$, $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 求 $\varphi'(y)|_{y=1}$.

9. 设函数 $y = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$, 求 $y^{(10)}(x)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

11. 求函数 $f(x) = \frac{x \sin(1-x)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点, 并判断其类型.

12. 一架巡逻直升机在距地面 3km 的高度以 120km/h 匀速地沿一条水平笔直的高速公路向前飞行, 飞行员观察到迎面驶来一辆汽车. 设汽车行进的速度为匀速, 当直升机与汽车间的距离为 5km 时通过雷达测出此距离以 160km/h 的速率减小, 试求汽车行进的速度.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = \sin(x+y)$ 确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

15. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

16. 设 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，在 $x=1$ 处可导，在 $x=0$ 附近满足

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x),$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

17. 设 $x_1=2$, $x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}}(n>1)$, 证明 $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n$ 存在, 并求其值.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$, 证明:

- (1) 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi)=0$;
(2) 至少存在一点 $\eta \in (a, b)$ 使得 $f''(\eta)=0$.

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且有正常数 a, b , 使得 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$. 证明: 对任意 $c \in (0, 1)$, 有 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

CHAPTER 2

2015-2016 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 $x_n = \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}$, 则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} < x_n < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2},$$

由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1 \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left(\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{x} \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) \right] = e^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

3. **Solution.** 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x \sin \frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{\sin t}{t})}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin t}{t} - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t - t}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t - 1}{3t^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4. **Solution.** 原极限式可变形为

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+a)x^2 + (1-a+b)x + 1-b}{1-x},$$

得 $1+a=0, 1-a+b=0$, 即 $a=-1, b=-2$.

5. **Solution.** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{cx^r} = 1$, 则

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{cx^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{crx^{r-1}}, \end{aligned}$$

因此必须 $\begin{cases} r-1=2, \\ cr=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $r=3, c=\frac{1}{6}$.

所以 $u(x)$ 的主部为 $\frac{1}{6}x^3$, 阶数为 3.

6. **Solution.** $y = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{2}{\pi} + \ln \arctan \frac{1}{x} \right]$,

所以

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\arctan \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 1) \arctan \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

代入 $x=1$ 得 $y'(1) = -\frac{1}{4 \arctan 1} = -\frac{1}{\pi}$.

7. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$,

$$\frac{dy}{d(\cot x)} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d(\cot x)}{dx}} = \frac{x \cos x - \sin x}{-x^2 \csc^2 x} = \frac{\sin^3 x - x \sin^2 x \cos x}{x^2}.$$

8. **Solution.** 当 $x=0$ 时, $f(0) = \frac{1}{2^0} - 0^3 = 1$. 所以

$$\begin{aligned} \varphi'(y)|_{y=1} &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2^x} \ln \frac{1}{2} + 3x^2}|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

9. **Solution.** $y = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-1}$, 所以

$$\begin{aligned} y^{(10)}(x) &= \frac{(-1)^{10} 10!}{(x-1)^{11}} - \frac{2 \cdot (-1)^{10} 10! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{11}} \\ &= \frac{10!}{(x-1)^{11}} - \frac{2^{11} \cdot 10!}{(2x-1)^{11}}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{t}{2} \right)' \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

11. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, \pm 1$.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(1-x)}{x(x^2-1)} = -\sin 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin(1-x)}{-x(x^2-1)} = \sin 1,$

所以 $x = 0$ 为跳跃间断点.

当 $x = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(1-x)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2},$

且函数在 $x = 1$ 处无定义, 所以 $x = 1$ 为可去间断点.

当 $x = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \sin(1-x)}{-x(x-1)(x+1)} = \infty,$ 所以 $x = -1$ 为无穷间断点.

12. **Solution.** 设 $x(t)$ 为 t 时刻飞机与汽车的水平距离, $y(t)$ 为 t 时刻飞机与汽车的距离, 则

$$x^2(t) + h^2 = y^2(t),$$

其中 $h = 3\text{km}$, 方程两边对 t 求导得

$$x \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dt},$$

由题设知, 在 $t = t_0$ 时刻, $y(t_0) = 5\text{km}, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = -160\text{km/h}, \quad x(t_0) = 4\text{km},$

代入上式得 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} \cdot \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = -200\text{km/h},$

所以汽车行进的速度为 80km/h .

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

13. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$

当 $x = 0$ 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0,$

所以 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ 不存在,

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续. 综上所述, $f'(x)$ 在 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 处连续.

14. **Solution.** 在方程 $y = \sin(x+y)$ 两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx} \right),$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}.$

在方程 $y' = \cos(x+y)(1+y')$ 两边再对 x 求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos(x+y) \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{解得 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sin(x+y)(1+y')^2}{1 - \cos(x+y)} = \frac{-\sin(x+y)}{[1 - \cos(x+y)]^3}.$$

15. **Solution.** 由于 $f''(0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导.

由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间, 使得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(x - \ln(1+x))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}. \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \rightarrow 0$, 所以由夹逼准则可知 $\xi \rightarrow 0$.

同时, $\frac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 之间, 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = 1$. 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} &= f''(0) \cdot \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} \\ &= \frac{f''(0)}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 从而连续.

在等式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x)$ 两边令 $x \rightarrow 0$ 得 $f(1) = 0$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + o(x)}{x} = 8 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - f(1)}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - f(1)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{-\sin x} \cdot \frac{-\sin x}{x} \\ &= 4f'(1). \end{aligned}$$

所以 $f'(1) = 2$.

又 $f(x)$ 的周期为 5, 所以 $f(6) = f(1) = 0$, $f'(6) = f'(1) = 2$,

因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程为 $y = 2(x-6)$ 即 $2x - y - 12 = 0$.

17. **Solution.** 显然 $x_n > 2$. 常数 $l = 1 + \sqrt{2}$ 满足 $l = 2 + \frac{1}{l}$. 下证数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_n}\right) - 1 - \sqrt{2} \right| = \frac{|x_n - (\sqrt{2} + 1)|}{(\sqrt{2} + 1)x_n} \\ &\leq \frac{1}{2} |x_n - l| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - l|. \end{aligned}$$

由迫敛性知 $|x_n - l|$ 收敛到 0, 故数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

18. **Proof.** (1) 假设 $\forall x \in (a, b), f(x) \neq 0$, 不妨设 $f(x) > 0$, 则有

$$\begin{aligned}f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \geq 0, \\f'_-(b) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \leq 0,\end{aligned}$$

这与 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$ 矛盾, 所以至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

(2) 由 Rolle 定理, $\exists \eta_1 \in (a, \xi)$ 使得 $f'(\eta_1) = 0$, $\exists \eta_2 \in (\xi, b)$ 使得 $f'(\eta_2) = 0$.

再由 Rolle 定理, $\exists \eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ 使得 $f''(\eta) = 0$.

所以至少存在一点 $\eta \in (a, b)$ 使得 $f''(\eta) = 0$.

19. **Proof.** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}f(0) &= f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - c)^2, \quad 0 < \xi_1 < c < 1, \\f(1) &= f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - c)^2, \quad 0 < c < \xi_2 < 1.\end{aligned}$$

两式相减, 得 $f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2} [f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2]$, 所以

$$f'(c) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2} [f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2].$$

由 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 得 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2} [(1 - c)^2 + c^2] \leq 2a + \frac{b}{2}$.