
CHAPTER 1

2017-2018 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设数列 x_n 满足 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sin x_n (n > 1)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n})$.

3. 计算极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{(\cos x - 1) \ln(1 + x)}$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + 2x + 1}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

5. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - \frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \right]$.

6. 指出函数 $f(x) = \frac{|x|}{\tan x}$ 的间断点，并确定间断点的类型.

7. 设函数 $y = (2+x)^{\sin x} + \frac{1}{x+1}$ ($x > -2$), 求微分 $dy|_{x=0}$.

8. 设函数 $v = f(u)$ 有反函数 $u = \varphi(v)$, 满足 $f(0) = \frac{\pi}{2}$, 且 $\varphi(v)$ 是可导的, 在 $v = 0$ 的某个邻域内有 $\varphi'(v) = \frac{1}{2 + \sin v}$, 求复合函数 $y = f^2(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数.

9. 设 $y = (x-1) \ln x$, 求 $y^{(10)}(1)$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t \end{cases}$ 确定, 求在 $t = 0$ 时的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在原点附近有界, $F(x) = f(x) \cdot \sin(x^2)$, 计算导数 $F'(0)$.

12. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有界, 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 其中 n 为正整数. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

14. 求无穷小量 $u(x) = x - \arctan x (x \rightarrow 0)$ 的主部和阶数.

15. 一个长方体的铁皮盒子，其对角线的长度随着长宽高的变化而连续变化. 当长宽高分别是 3m, 4m, 5m 时，如果此时对角线长度增加的速率为 $5\sqrt{2}\text{m/s}$ ，长宽增加的速率分别为 8m/s 和 9m/s，问此时高是在增加还是在减少？增加或减少的速率为多少？

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导，但函数本身除零点外处处不连续.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续，在 $(0, 3)$ 内一阶可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 3, f(3) = 1$ ，证明至少存在一点 $\xi \in (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

CHAPTER 2

2017-2018 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 显然 $0 < x_2 = \sin x_1 < \frac{\pi}{2}$. 设 $0 < x_k < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < x_{k+1} = \sin x_k < x_k < \frac{\pi}{2}$, 由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在方程 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边取极限得到 $l = \sin l$, 解得 $l = 0$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos(\pi \sqrt{n^2 + n} - n\pi) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}\right) \\&= 0.\end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$\begin{aligned}l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{(\cos x - 1) \ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right)(x + o(x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} \\&= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

4. **Solution.** 由

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + 2x + 1) = a + 3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + 2x + 1}{x - 1} \cdot (x - 1) = 0$$

解得 $a = -3$, 从而

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^3 + 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-9x^2 + 2}{1} = -7.$$

5. **Solution.** 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow +\infty$, $\frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \rightarrow -1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{2}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - \frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \right] = 0 - (-1) = 1.$$

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow 0$, $\frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \rightarrow 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} - \frac{|\sin(x-1)|}{x-1} \right] = 2 - 1 = 1.$$

因此 $l = 1$.

6. **Solution.** 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\tan x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{\tan x} = -1$, 所以 $x = 0$ 为跳跃间断点.

当 $x = k\pi (k \neq 0)$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{|x|}{\tan x} = \infty$, 所以 $x = k\pi (k \neq 0)$ 为无穷间断点.

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|x|}{\tan x} = 0$, 所以 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为可去间断点.

7. **Solution.** 记 $u = (2+x)^{\sin x}$, $v = \frac{1}{x+1}$, 则 $\ln u = \sin x \cdot \ln(2+x)$, 所以

$$\begin{aligned} du &= u \cdot d(\sin x \ln(2+x)) = (2+x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(2+x) + \frac{\sin x}{2+x} \right) dx, \\ dv &= -\frac{1}{(x+1)^2} dx. \end{aligned}$$

代入 $x = 0$ 得 $dy|_{x=0} = du|_{x=0} + dv|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx$.

8. **Solution.**

$$\begin{aligned} y'(0) &= 2f(x)f'(x)|_{x=0} \\ &= 2f(0)f'(0) \\ &= \frac{2f(0)}{\varphi'(\frac{\pi}{2})} = 3\pi. \end{aligned}$$

9. **Solution.** $y' = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, 所以

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (\ln x)^{(9)} - \left(\frac{1}{x}\right)^{(9)} \\ &= \frac{(-1)^8 8!}{x^9} - \frac{(-1)^9 9!}{x^{10}}. \end{aligned}$$

代入 $x = 1$ 得 $y^{(10)}(1) = 8! + 9! = 10 \cdot 8!$.

10. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t}$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = 0$.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t} \right)'_t \cdot \frac{1}{\cos t - t \sin t} = \frac{2+t^2}{(\cos t - t \sin t)^3}, \text{ 所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 2.$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.**

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin(x^2) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}$;

当 $x = 0$ 时, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 显然连续. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 综上所述, $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

13. **Solution.** 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有界, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin x = 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^{3x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{n \cdot 3x} \\ &= \frac{1}{3n} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \end{aligned}$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6n$.

14. **Solution.** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{cx^r} = 1$, 则

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{cx^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{crx^{r-1}},$$

$$\text{因此必须 } \begin{cases} r - 1 = 2, \\ cr = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } r = 3, c = \frac{1}{3}.$$

所以 $u(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

15. **Solution.** 设 t 时刻长方体的长宽高及对角线长分别为 $x(t), y(t), z(t), s(t)$, 则

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t).$$

方程两边对 t 求导得

$$s(t)s'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t).$$

将 $x(t) = 3\text{m}, y(t) = 4\text{m}, z(t) = 5\text{m}, s(t) = 5\sqrt{2}\text{m}, x'(t) = 8\text{m/s}, y'(t) = 9\text{m/s}, s'(t) = 5\sqrt{2}\text{m/s}$

代入上式得 $z'(t) = -2\text{m/s}$, 说明此时长方体的高在减少, 减少的速率为 2m/s .

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

$$16. \text{ **Proof.** 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$.

考虑非零点 a . 若 $a \in \mathbf{Q}$, 取点列 $\{x_n, x_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq f(a) = a^2$, 说明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

同理可证当 $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时, $f(x)$ 也不连续. 所以函数除零点外处处不连续.

17. **Proof.** 由于 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 由介值定理, 存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $f(0) < f(\eta) = 1 < f(1)$.

$f(x)$ 在 $[\eta, 3]$ 上连续, 在 $(\eta, 3)$ 内可导, 由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.