
CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 以下关于数列的命题, 正确的是【 】.

- A. 一个有界数列与一个无界数列的和是无界数列
- B. 两个无界数列的和是无界数列
- C. 一个有界数列与一个无界数列的乘积是无界数列
- D. 两个无界数列的乘积是无界数列

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处【 】.

- A. 可导
- B. 不连续
- C. 连续但不一定可导
- D. 不可导

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内【 】.

- A. 有界
- B. 可导
- C. 存在最大值
- D. 原函数存在

4. 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 有【 】.

- A. 一个极小值和一个极大值
- B. 一个极小值
- C. 两个极小值
- D. 两个极大值

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内满足 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 则在区间 (a, b) 内【 】.

- A. $f(x)$ 单调减少, 曲线 $y = f(x)$ 下凸
- B. $f(x)$ 单调减少, 曲线 $y = f(x)$ 上凸
- C. $f(x)$ 单调增加, 曲线 $y = f(x)$ 下凸
- D. $f(x)$ 单调增加, 曲线 $y = f(x)$ 上凸

6. 设 $M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x} dx$, $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec x} dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx$, 则 M, N, K 的大小关系为【 】.

- A. $M < N < K$
- B. $M < K < N$
- C. $N < M < K$
- D. $K < N < M$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设 $u = x + a \ln(1-x) + bx \sin(3x)$ 是 x 的 3 阶无穷小, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

8. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 的拐点坐标为 _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \tan t dt}{\sin x^4} =$ _____.

10. 曲线 $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 的长度为 _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线 $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 5}$ ($x > 0$) 的渐近线.

12. 写出 $f(x) = \ln(1+x)$ 带 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 公式.

13. 求不定积分 $I = \int \frac{\sqrt{x-3}}{2x} dx$.

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x dx$.

15. 求反常积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx$.

16. 求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$ 的通解.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty), \\ e, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

18. 求平面图形 $0 \leq y \leq \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b)$, $|f''(x)| \leq M$, 证明:

$$|f'(a) + f'(b)| \leq M(b - a).$$

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导, 并且 $f''(x) \leq 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}.$$

CHAPTER 2

2018-2019 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

对于 A 选项, 假设 $\{a_n\}$ 是一个有界数列, $\{b_n\}$ 是一个无界数列,

即 $\forall n \in \mathbf{N}^+, \exists M > 0$, 使得 $|a_n| \leq M$, 又 $\forall N > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^+$, 使得 $|b_{n_0}| > N$.

则 $|a_{n_0} + b_{n_0}| \geq |b_{n_0}| - |a_{n_0}| \geq N - M, \forall N - M > 0$, 所以 $\{a_n + b_n\}$ 是一个无界数列.

对于 B 选项, 考虑 $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n \equiv 0, \{a_n + b_n\}$ 是一个有界数列.

对于 C 选项, 考虑 $a_n = 0, b_n = n$, 则 $a_n b_n \equiv 0, \{a_n b_n\}$ 是一个有界数列.

对于 D 选项, 考虑 $a_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1 \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ n, & n = 2k - 1 \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^+$,

则 $a_n b_n \equiv 0, \{a_n b_n\}$ 是一个有界数列.

2. **Solution.** C.

由题意可知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$,

即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[3]{f(a)}, \sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处连续.

考虑 $f(x) = x, a = 0$, 则 $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导. 所以 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处连续但不一定可导.

3. **Solution.** D.

对于 A 选项, 考虑 $f(x) = \frac{1}{x}$, 取 $a = -1, b = 1$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续但无界.

对于 B, C 选项, 考虑 $f(x) = |x|$, 取 $a = -1, b = 1$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续但不存在最大值, 并且存在不可导点 $x = 0$.

连续函数在区间内必然可积, 所以 D 选项正确.

4. **Solution.** B.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3),$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增.

函数 $f(x)$ 只有一个唯一的极小值点 $x = \frac{3}{2}$, 没有极大值点.

5. **Solution.** A.

由 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ 可知函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递减, 曲线 $y = f(x)$ 下凸.

6. **Solution.** B.

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 内, $\sin x \leq \tan x \leq \sec x$, 所以 $M < K < N$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $a = 1$, $b = \frac{1}{6}$.

由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} u &= x + a \ln(1-x) + bx \sin(3x) = x - a \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + bx (3x + o(x^2)) \\ &= (1-a)x + \left(-\frac{a}{2} + 3b \right) x^2 - \frac{a}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

所以 $1-a=0$, $-\frac{a}{2}+3b=0$, 解得 $a=1$, $b=\frac{1}{6}$.

8. **Solution.** $(2, -3)$.

$y' = 3x^2 - 12x + 5$, $y'' = 6x - 12$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 2$, 且当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$, 当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$,

所以曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 具有拐点 $(2, -3)$.

9. **Solution.** $\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \tan t dt}{\sin x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(1-\cos x) \cdot \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{8x} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** 12.

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{(-6 \cos^2 t \sin t)^2 + (6 \sin^2 t \cos t)^2} dt = 6 \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt = 3 |\sin 2t| dt.$$

$$\text{故 } s = 3 \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6 \int_0^{\pi} |\sin u| du = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = 12.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 曲线没有竖直渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 2,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 5} - 2x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 2x + 5} + 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

所以曲线的斜渐近线为 $y = 2x + \frac{1}{2}$.

12. **Solution.** $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_n(x),$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, ξ 介于 0 与 x 之间.

由于 $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, 所以 $R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}.$

13. **Solution.** 令 $u = \sqrt{x-3}$, 则 $x = t^2 + 3$, $dx = 2udu$,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sqrt{x-3}}{2x} dx = \int \frac{u}{2(u^2+3)} \cdot 2udu \\
 &= \int \left(1 - \frac{3}{u^2+3}\right) du \\
 &= u - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u}{\sqrt{3}} + C = \sqrt{x-3} - \sqrt{3} \arctan \sqrt{\frac{x-3}{3}} + C.
 \end{aligned}$$

14. **Solution.**

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t dt \\
 &= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2t) dt \\
 &= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{48}.
 \end{aligned}$$

15. **Solution.** 记 $J = \int e^{-2x} \sin x dx$, 则

$$\begin{aligned}
 J &= - \int e^{-2x} d \cos x = -e^{-2x} \cos x - 2 \int e^{-2x} \cos x dx \\
 &= -e^{-2x} \cos x - 2 \int e^{-2x} d \sin x \\
 &= -e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x - 4 \int e^{-2x} \sin x dx \\
 &= -e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x - 4J.
 \end{aligned}$$

所以 $J = -\frac{1}{5} e^{-2x} \cos x - \frac{2}{5} e^{-2x} \sin x + C,$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx = \left[-\frac{1}{5} e^{-2x} \cos x - \frac{2}{5} e^{-2x} \sin x \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{5}.$$

16. **Solution.** 令 $u = \frac{1}{y}$, 则 $u' = -\frac{y'}{y^2}$, 所以 $y' = -\frac{u'}{u^2}$.

微分方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$ 变形为 $-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{xu} = \frac{\ln x}{u^2}$, 即 $u' - \frac{1}{x}u = -\ln x$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int(-\frac{1}{x})dx} \left(C + \int (-\ln x) e^{\int(-\frac{1}{x})dx} dx \right) \\ &= x \left[C - \int \ln x \cdot d(\ln x) \right] = x \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right). \end{aligned}$$

所以原方程通解为 $xy \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right) = 1$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $\ln f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$,

$$\text{所以 } f'(x) = f(x) \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x}{x^2} = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = -\frac{e}{2} = f'(0), \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续. 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $f'(x)$ 显然连续,

故 $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上处处连续.

18. **Solution.** 旋转体的体积 $V =$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x) dx &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x = 2\pi \left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi^2 - 2\pi. \end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 由 Taylor 公式,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(b-a)^2,$$

$$f(a) = f(b) + f'(b)(a-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-b)^2,$$

其中 ξ_1, ξ_2 介于 a 与 b 之间. 上述两式相减得

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = 0 &= f(a) - f(b) + (b-a)(f'(a) + f'(b)) + \frac{1}{2}(b-a)^2(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)) \\ &= (b-a)(f'(a) + f'(b)) + \frac{1}{2}(b-a)^2(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |f'(a) + f'(b)| &= \frac{1}{2}(b-a)|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \\ &= M(b-a). \end{aligned}$$

20. **Solution.** 令 $F(t) = \int_a^t f(x)dx - \frac{(t-a)(f(a) + f(t))}{2} (x \geq a)$,

$$\text{则 } F'(t) = f(t) - \frac{f(a) + f(t) + (t-a)f'(t)}{2},$$

$$F''(t) = f'(t) - \frac{1}{2}f'(t) - \frac{1}{2}[f'(t) + (t-a)f''(t)] = -\frac{1}{2}(t-a)f''(t) \geq 0.$$

所以 $F'(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, $F'(t) \geq F'(a) = 0$,

所以 $F(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, $F(t) \geq F(a) = 0$,

$$\text{因此 } \int_a^b f(x)dx \geq \frac{(b-a)(f(a) + f(b))}{2}.$$