

---

# CHAPTER 1

---

## 2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试

### 1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  是一数列, 则下列命题正确的是【 】.

- A. 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛  
B. 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛  
C. 若  $\{f(x_n)\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  收敛  
D. 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  收敛

2. 函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1}$  的间断点及类型是【 】.

- A.  $x = -1$  是第二类间断点  
B.  $x = 1$  是第二类间断点  
C.  $x = \pm 1$  均是第一类间断点  
D.  $x = \pm 1$  均是第二类间断点

3.  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是【 】.

- A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$   
B.  $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$   
C.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$   
D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

4. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 下列命题错误的是【 】.

- A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$   
B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$   
C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在  
D. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在

5. 曲线  $y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right)$  ( $x > 0$ ) 的渐近线条数为【 】.

- A. 0  
B. 1  
C. 2  
D. 3

6. 设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ , 则  $F(x)$  【 】.

- A. 为正常数  
B. 为负常数  
C. 恒为 0  
D. 不为常数

## 2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 曲线  $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$  对应于  $t=1$  处的法线方程为 = \_\_\_\_\_.

8. 曲线  $y = x \sin x + 2 \cos x \left( -\frac{\pi}{2} < x < 2\pi \right)$  的拐点是 \_\_\_\_\_.

9. 曲线  $y = \ln \cos x \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$  的弧长为 \_\_\_\_\_.

10.  $y = 2^x$  的 Maclaurin 展开式中  $x^n$  项的系数为 \_\_\_\_\_.

## 3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x - 3}{x - 1} = b$ , 求常数  $a, b$  的值.

12. 设  $f(x)$  为连续函数, 且满足  $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$ .

13. 求极限  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$ .

14. 计算定积分  $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ .

15. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} (\lambda > 0)$ , 计算  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

16. 求微分方程  $xy' + y - e^x = 0$ ,  $y(2) = 1$  的特解.

#### 4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ , 求  $f^{(n)}(0)$  的值 ( $n \geq 2$ ).

18. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过原点, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $y \geq 0$ , 又该抛物线与直线  $x = 1$  及  $x$  轴围成平面图形的面积为  $\frac{1}{3}$ , 求  $a, b, c$  的值, 使得该图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体体积  $V$  最小.

## 5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明方程  $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$  在区间  $(0, +\infty)$  内只有两个不同的实根.

20. 设  $f''(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 且  $|f''(x)| \leq M$ ,  $f(1) = 0$ . 证明:

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}.$$

---

## CHAPTER 2

---

### 2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

#### 1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

考虑函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 它在  $(-\infty, +\infty)$  内单调不减且有界, 取数列  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , 则  $x_n \rightarrow 0$ ,

但当  $n$  为偶数时,  $f(x_n) = 1$ ; 当  $n$  为奇数时,  $f(x_n) = 0$ , 所以  $\{f(x_n)\}$  发散, A 选项错误.

若  $\{x_n\}$  单调, 由于  $f(x)$  单调有界, 所以  $\{f(x_n)\}$  亦单调有界, 必收敛, B 选项正确.

考虑函数  $f(x) \equiv 0$ , 它在  $(-\infty, +\infty)$  内单调不减且有界, 取数列  $x_n = n$ , 则  $\{x_n\}$  发散,

但  $\{f(x_n)\} \equiv 0$  单调不减且收敛, 故 C, D 选项错误.

2. **Solution.** C.

当  $|x| > 1$  时,  $x^n \rightarrow \infty$ , 所以  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} = 1$ ;

当  $|x| < 1$  时,  $x^n \rightarrow 0$ , 所以  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} = 2$ ;

当  $x = 1$  时,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$ ;

当  $x = -1$  时,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^n + 1}$  不存在.

所以  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ 2, & |x| < 1, \\ \frac{3}{2}, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1 \end{cases}$ , 因此  $x = \pm 1$  均为  $f(x)$  的跳跃间断点, 即第一类间断点.

3. **Solution.** C.

当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$\begin{aligned} 1 - e^{\sqrt{x}} &= -\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) \sim -\sqrt{x}, \\ \sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 &= (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} &= \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \\ 1 - \cos \sqrt{x} &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right) \sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

#### 4. Solution. D.

若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , A 选项正确.

则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$  存在, C 选项正确.

同理, 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(-x)) = 2f(0) = 0$ , B 选项正确.

对于 D 选项, 考虑  $f(x) = |x|$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) - (-x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{x} = 0,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0$  存在, 但显然  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

#### 5. Solution. B.

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e+t)}{t} = 0$ , 所以曲线  $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$  没有竖直渐近线.

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right) - x \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \frac{1}{e}$ ,

所以曲线  $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$  有斜渐近线  $y = x + \frac{1}{e}$ .

故曲线  $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$  的渐近线条数为 1.

#### 6. Solution. A.

因被积函数  $e^{\sin t} \sin t$  是周期为  $2\pi$  的函数, 所以  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$  恒为常数.

计算

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt.$$

对第二项作代换  $u = 2\pi - t$ , 则  $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_{\pi}^0 e^{\sin(2\pi-u)} \sin(2\pi-u)(-du) = -\int_0^{\pi} e^{-\sin u} \sin u du$ .

所以

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt.$$

因为在  $(0, \pi)$  上,  $\sin t > 0$ , 且  $e^{\sin t} > e^{-\sin t}$ , 所以  $\int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt > 0$ .

## 2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.**  $y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$

当  $t = 1$  时,  $x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{2(1+t^2)}}{\frac{1}{1+t^2}} = t, \text{ 所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

切线斜率为 1, 故法线斜率为  $-1$ , 法线方程为  $y - \frac{1}{2} \ln 2 = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ , 即  $y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$

8. **Solution.**  $(\pi, -2).$

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, \quad y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

在  $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$  内, 令  $y'' = 0$  得  $x = 0$  或  $x = \pi.$

当  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, \pi)$  时,  $y'' \leq 0$ ,  $y''$  在  $x = 0$  两侧不变号, 故  $x = 0$  不是拐点;

当  $x \in (\pi, 2\pi)$  时,  $y'' > 0$ ,  $y''$  在  $x = \pi$  两侧变号.

故曲线的拐点为  $(\pi, -2).$

9. **Solution.**  $\frac{1}{2} \ln 3.$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, \text{ 所以 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx,$$

$$\text{故 } s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \ln 3.$$

10. **Solution.**  $\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$

$$y = 2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}, \text{ 所以 } x^n \text{ 项的系数为 } \frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$

## 3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由题可知  $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + x - 3) = a + 1 - 3 = 0$ , 所以  $a = 2.$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = 5.$$

12. **Solution.** 记  $\int_0^1 f(x) dx = C.$

令  $x = 2$ , 得  $f(2) = 4 - 2f(2) + 2C$ , 所以  $f(2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}C.$

方程  $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$  两边从 0 积分到 1 得

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 (x^2 - x \cdot f(2) + 2C) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}f(2) + 2C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} + \frac{2}{3}C \right) + 2C \\ &= \frac{5}{3}C - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

解得  $C = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ , 所以  $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx = x^2 - \frac{5}{3}x + 1$ .

13. **Solution.** 由定积分的定义,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 令  $x = \sin \theta$ , 则  $dx = \cos \theta d\theta$ ,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta (1-\sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

15. **Solution.**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} \\ &= - x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 方程变形为  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$ .

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( C + \int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( C + \int e^x dx \right) = \frac{1}{x} (C + e^x). \end{aligned}$$

将初始条件  $y(2) = 1$  代入上式得  $C = 2 - e^2$ , 所以特解为  $y = \frac{1}{x} (2 - e^2 + e^x)$ .



## 4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 由于  $f(x)$  连续, 所以其积分变上限函数  $\int_0^x f(t)dt$  可导,

从而方程  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t)dt$  两边可导. 两边求导得  $f'(x) - 2f(x) = 2(x+1)$ .

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-2)dx} \left( C + \int 2(x+1)e^{\int(-2)dx} dx \right) \\ &= e^{2x} \left( C + 2 \int (x+1)e^{-2x} dx \right) = e^{2x} \left[ C + 2 \int xe^{-2x} dx + 2 \int e^{-2x} dx \right] \\ &= e^{2x} \left[ C + 2 \int xe^{-2x} dx - e^{-2x} \right] = e^{2x} \left[ C - \int xde^{-2x} - e^{-2x} \right] \\ &= e^{2x} \left[ C - xe^{-2x} + \int e^{-2x} dx - e^{-2x} \right] = e^{2x} \left[ C - xe^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} \right] \\ &= Ce^{2x} - x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

方程  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t)dt$  两边令  $x=0$  得  $f(0)=1$ , 所以  $C = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ ,  $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - x - \frac{3}{2}$ .

当  $n \geq 2$  时,  $f^{(n)}(0) = \left( \frac{5}{2}e^{2x} \right)^{(n)} \Big|_{x=0} = 5 \cdot 2^{n-1}e^{2x} \Big|_{x=0} = 5 \cdot 2^{n-1}$ .

18. **Solution.** 由抛物线过原点得  $c=0$ , 且有

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2},$$

即  $b = \frac{2}{3}(1-a)$ . 旋转体的体积  $V =$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi f^2(x) dx &= \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(ax+b)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2) dx = \pi \left[ \frac{a^2}{5}x^5 + \frac{ab}{2}x^4 + \frac{b^2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} \right) = \pi \left[ \frac{a^2}{5} + \frac{a(1-a)}{3} + \frac{4(1-a)^2}{27} \right]. \end{aligned}$$

由  $\frac{dV}{da} = \pi \left[ \frac{2}{5}a + \frac{1-2a}{3} - \frac{8(1-a)}{27} \right] = 0$  解得  $a = -\frac{5}{4}$ , 又  $\frac{d^2V}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right) = \frac{4\pi}{135} > 0$ ,

所以当  $a = -\frac{5}{4}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $c=0$  时, 旋转体体积  $V$  最小.

## 5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 2021$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ ,  $f(x)$  具有唯一驻点  $x=e$ ,

且  $f(x)$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减.

因  $f(0^+) = -\infty < 0$ ,  $f(e) = 2021 > 0$ ,  $f(+\infty) = -\infty < 0$ ,

由介值定理和  $f(x)$  的单调性易知方程  $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$  在区间  $(0, +\infty)$  内只有两个不同的实根.

20. **Solution.** 由 Taylor 公式, 将  $f(x)$  在  $x = 1$  处展开得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 = f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2,$$

其中  $\xi$  介于 1 和  $x$  之间. 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^2 \left[ f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 \right] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^2 |f''(\xi)|(x-1)^2 dx \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{M}{3}. \end{aligned}$$