
CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 若 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是与 Δx 【 】 的无穷小.
- A. 高阶 B. 低阶 C. 同阶 D. 等价
2. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分条件是 【 】.
- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$ 存在 B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2}$ 存在
- C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在 D. $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ 存在
3. 下列关于数列的描述中, 正确的是 【 】.
- A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$
- B. 若 $\{x_n y_n\}$ 有界, 则必有 $\{x_n\}$ 有界或 $\{y_n\}$ 有界
- C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- D. 若有区间 I 内的数列 x_n , 使 $|f(x_n)|$ 无界, 则 $f(x)$ 在 I 内无界
4. 设 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 若 $f(a) = 0$, 则在区间 $(a, +\infty)$ 内有 【 】.
- A. $f(x) \geq 0$ B. $f(x) > 0$ C. 不能确定 $f(x)$ 的符号 D. $f(x)$ 单调趋向于 $+\infty$
5. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 则下列结论成立的是 【 】.
- A. $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) \neq 0$ B. $f'(0)$ 不存在
- C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值 D. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)} = \text{【 】}.$
- A. $\int_1^2 \ln(1+x^2)dx$ B. $2 \int_1^2 \ln x dx$ C. $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ D. $2 \int_0^1 \ln x dx$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $(1+x)^{x^2} - 1$ 的阶数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 曲线 $\cot\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 若 $\int_0^x f(t)dt = xe^{-x}$, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}$.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求曲线 $C: y = x \arctan x$ ($x > 0$) 的渐近线.

12. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内可导, 且 $f(a) = f'(a) = 1$, 求 $l = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{\int_a^x f(t)dt} \right)$.

13. 求 $I = \int \frac{1}{x(x^n+1)} dx$, 其中 n 为正整数.

14. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + y^4}$ 的通解.

15. 设 $f(x) = \int_x^1 \sin t^2 dt$, 计算 $I = \int_0^1 f(x) dx$.

16. 求 $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x e^{-t} \sin t dt$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的极值.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt + \int_{x^2}^1 \sqrt{1+t} dt$, 讨论方程 $f(x) = 0$ 的实根个数.

18. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^3}{3} - x^2$, 求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0, g(x) \geq 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $f'(0) = f'(2) = 0$. 试证: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使

$$|f''(\xi)| \geq |f(2) - f(0)|.$$

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** C.

由导数的定义, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}$.

因此 dy 与 Δx 是同阶无穷小, 但不是等价无穷小.

2. **Solution.** D.

对于 A 选项, 考虑 $f(x) = |x|$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) - (-x)}{2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{2x} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = 0$ 存在, 但显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

对于 B 选项, 令 $t = x^2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}$ 存在, 仅能说明 $f'_+(0)$ 存在.

对于 C 选项, 考虑 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\sqrt[3]{x}} = 1$ 存在, 但显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

对于 D 选项, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ 存在,

结合 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性可得 $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \cdot t = 0$,

所以 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ 存在, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

3. **Solution.** D.

对于 A, B, C 选项, 考虑 $x_n = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1, \\ n, & n = 2k \end{cases}$, $y_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k \end{cases}$, 其中 k 是正整数.

则 $x_n y_n \equiv 0$, 但 x_n, y_n 均无界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在.

4. **Solution.** C.

假设 $a > 0$, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{1}{2a}, & x > a, \\ 0, & x = a. \end{cases}$

显然 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内可导, 当 $a < x < 2a$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 2a$ 时, $f(x) > 0$,

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2a} < +\infty.$$

5. **Solution.** C.

结合 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性可得 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot x^2 = 0$,

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot x = 0$, 即 $f'(0) = 0$.

又由极限的保号性, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x)}{x^2} > 0$, 所以 $f(x) > 0$. 即 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

6. **Solution.** C.

由定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx. \end{aligned}$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** 3.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^{x^2} - 1 = e^{x^2 \ln(1+x)} - 1 = e^{x^2(x+o(x))} - 1 = e^{x^3+o(x^3)} - 1 = x^3 + o(x^3)$.

所以无穷小量 $(1+x)^{x^2} - 1$ 的阶数是 3.

8. **Solution.** $2x + 3y = 0$.

方程 $\cot\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 两边对 x 求导得

$$-\csc^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 + y') = e^y y'.$$

将 $x = 0$, $y = 0$ 代入上式解得 $y'(0) = -\frac{2}{3}$, 所以切线方程为 $2x + 3y = 0$.

9. **Solution.** 0.

由题可知, $f(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. 故 $f(\ln x) = \frac{1 - \ln x}{x}$.

所以

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2} dx \\ &= \int_1^{+\infty} (\ln x - 1) d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x - 1}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= 1 + \frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

10. **Solution.** $\ln(1 + \sqrt{2})$.

$y' = \tan x$, 所以 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx$,

故 $s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2})$.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 曲线 C 没有竖直渐近线和水平渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

所以 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ 是曲线 C 的斜渐近线.

12. **Solution.** 由积分中值定理, 存在 ξ 介于 a 和 x 之间, 使得 $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a)$,

当 $x \rightarrow a$ 时, $\xi \rightarrow a$, 所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t)dt - (x-a)}{(x-a) \int_a^x f(t)dt} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t)dt - (x-a)}{(x-a)^2 f(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{2(x-a)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{1}{2} f'(a) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

13. **Solution.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x(x^n+1)} dx = \int \frac{x^{-n-1}}{x^{-n}+1} dx \\ &= -\frac{1}{n} \int \frac{1}{x^{-n}+1} d(x^{-n}+1) \\ &= -\frac{1}{n} \ln |x^{-n}+1| + C. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 方程变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = y^3$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int (-\frac{2}{y}) dy} \left(C + \int y^3 e^{\int (-\frac{2}{y}) dy} dy \right) \\ &= y^2 \left(C + \int y dy \right) = y^2 \left(C + \frac{1}{2} y^2 \right) = Cy^2 + \frac{1}{2} y^4. \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

15. **Solution.** 由题可知 $f(1) = 0$, $f'(x) = -\sin x^2$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx \\ &= \int_0^1 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 dx^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos 1}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** $F'(x) = e^{-x} \sin x$, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, 令 $F'(x) = 0$ 得 $x = 0$.

计算

$$\begin{aligned} \int e^{-t} \sin t dt &= - \int e^{-t} d \cos t = -e^{-t} \cos t - \int e^{-t} \cos t dt \\ &= -e^{-t} \cos t - \int e^{-t} d \sin t \\ &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t - \int e^{-t} \sin t dt \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int e^{-t} \sin t dt = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) + C,$$

$$\text{因此极值 } F(0) = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} + 1).$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** $f'(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+x^2} = (1-2x)\sqrt{1+x^2}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调增加, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调减少.

$$\text{因为 } f(0) = \int_1^0 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \int_0^1 (\sqrt{1+t} - \sqrt{1+t^2}) dt > 0,$$

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2} dt < 0, \quad \text{故方程 } f(x) = 0 \text{ 有两个实根.}$$

18. **Solution.** 令 $t - x = u$, 则 $\int_{-x}^0 f(u) du = -\frac{x^3}{3} - x^2$.

方程两边求导得 $f(-x) = -x^2 - 2x$, 所以 $f(x) = -x^2 + 2x$.

所以旋转体的体积 $V =$

$$\begin{aligned} \int_0^2 2\pi x f(x) dx &= 2\pi \int_0^2 x(-x^2 + 2x) dx = 2\pi \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 易知函数 $\sqrt[n]{f(x)}$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 因而具有最小值 m 和最大值 M . 所以

$$m \leq \frac{\int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx}{\int_0^1 g(x) dx} \leq M.$$

$$\text{由介值定理, 存在 } \xi \in [0, 1] \text{ 使得 } \sqrt[n]{f(\xi)} = \frac{\int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx}{\int_0^1 g(x) dx}.$$

上式两边取极限, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(\xi)} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx}{\int_0^1 g(x) dx} = 1$,

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

20. **Proof.** 由 Taylor 公式, 将 $f(x)$ 分别在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 处展开得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2 = f(0) + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2, \\ f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-2)^2 = f(2) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-2)^2, \end{aligned}$$

两式相减得

$$f(2) - f(0) = \frac{1}{2} [f''(\zeta)(x-2)^2 - f''(\eta)x^2].$$

所以

$$|f(2) - f(0)| \leq \frac{1}{2} [|f''(\zeta)|(x-2)^2 + |f''(\eta)|x^2].$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\eta)|, |f''(\zeta)|\}$,

则 $|f(2) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)|[(x-2)^2 + x^2] \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)| \cdot 2 = |f''(\xi)|$, 即 $|f''(\xi)| \geq |f(2) - f(0)|$.