
CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 下列函数在其定义域内无界的是【 】.

A. $x^2 D(x)$ ($D(x)$ 为 Dirichlet 函数)

B. $\tan(\sin x)$

C. $\frac{\sin x}{x}$

D. 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$

2. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的斜渐近线为【 】.

A. $y = -x$

B. $y = -x + 1$

C. $y = x$

D. $y = x + 1$

3. 通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 的微分方程为【 】.

A. $y'' - y' = 1$

B. $y'' - y = 0$

C. $y'' - 2y' + y = e^x$

D. $y'' - 2y' + y = x - 2$

4. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 则下列命题

(a) 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

(b) 若 $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

(c) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

其中正确的个数是【 】.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} = 2$, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的【 】.

A. 驻点且为极大值点

B. 驻点且为极小值点

C. 不可导点

D. 可导点但不是驻点

6. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) dx$, 则【 】.

A. $M > N > P$

B. $N > P > M$

C. $N > M > P$

D. $M > P > N$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x + 1$ 在点 $(2, 3)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. $y = f(x)$ 满足 $y' = (1 - y)y^\alpha (\alpha > 0)$, 若曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点为 $\left(t, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x} , 则 $\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y'(0)$, $y''(0)$.

12. 设 $f(x) = e^x \ln(1+x) - x \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 求 $f(x)$ 的主部及阶数.

13. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt.$

14. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right]$.

15. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1-t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)f(x)dx$.

16. 若曲线 $y = f(x)$ 是 $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$ 的一条积分曲线, 此曲线过点 $A(0, 1)$, 且在点 $A(0, 1)$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 求 $f(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 其反函数存在为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt + \int_0^x f(t)dt = xe^x - e^x + 1$, 求 $f(x)$.

18. 设函数 $f(x) = ax + \frac{3}{2}bx^2$ 在区间 $(0, 1)$ 内恒大于 0, 其中 a, b 为未知常数. 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围成的区域 D 的面积为 2. 求 a, b 的值, 使得 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 并求出此最小值.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上连续且单调增加, 其中 $a > 0$. 证明

$$a \int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \int_0^a g(x)dx.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4|f(b) - f(a)|.$$

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** A.

$$x^2 D(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}, \text{ 显然 } x^2 D(x) \text{ 在其定义域内无界.}$$

$\forall x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq 1$, 所以 $|\tan(\sin x)| \leq \tan 1 = \frac{\pi}{4}$, 故 $\tan(\sin x)$ 在其定义域内有界.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 所以 $\frac{\sin x}{x}$ 在其定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内有界.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 显然 } \operatorname{sgn}(x) \text{ 在其定义域内有界.}$$

2. **Solution.** C.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 + e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0,$$

所以斜渐近线方程为 $y = x$.

3. **Solution.** D.

由通解结构可以看出 $(C_1 + C_2 x)e^x$ 是一个齐次方程的通解, $y^* = x$ 是一个相应非齐次方程的特解.

通解 $(C_1 + C_2 x)e^x$ 对应齐次方程的二重特征根 $r = 1$, 所以齐次方程为 $y'' - 2y' + y = 0$.

将特解 $y^* = x$ 代入非齐次方程验证可得 D 选项 $y'' - 2y' + y = x - 2$ 满足题意.

4. **Solution.** B.

若 $f'(x_0)$ 存在, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

同理, 若 $f'_-(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左连续; 若 $f'_+(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处右连续,

所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$,

但显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

所以有两个命题正确.

5. **Solution.** B.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x+1) + e^{x^2})}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + e^{x^2} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 2, \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} = 1$. 由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的连续性易知 $f(1) = 0$.

又由极限的保号性, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x+1)}{x^2} > 0$, 所以 $f(x+1) > 0$. 即 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x^2} \cdot x = 0$, 所以 $f'(1) = 0$, 即 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的驻点.

6. **Solution.** C.

$y = \cos^4 x \sin^3 x$ 是奇函数, 所以 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx = 0$.

$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx > 0$.

$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - \sin^2 x) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx < 0$.

所以 $N > M > P$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** -3.

由题可知 $f(2) = 3$, $f'(2) = (2x - 1) \Big|_{x=2} = 3$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - 3 \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(2 - \frac{1}{n}\right) - f(2)}{-\frac{1}{n}} = -f'(2) = -3$.

8. **Solution.** 1.

方程 $y' = (1 - y)y^\alpha$ 两边对 x 求导得

$$y'' = -y'y^\alpha + (1 - y)\alpha y^{\alpha-1}y' = [-y^\alpha + (1 - y)\alpha y^{\alpha-1}]y' = [-y^\alpha + (1 - y)\alpha y^{\alpha-1}](1 - y)y^\alpha.$$

由题意可知 $y(t) = \frac{1}{2}$, $y''(t) = 0$, 代入得 $\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} = 0$, 解得 $\alpha = 1$.

9. **Solution.** $\frac{1}{4}$.

由题可知, $f(x) = (\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^0 xf(2x)\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \cdot (-\mathrm{e}^{-2x}) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2} x \mathrm{e}^{-2x} \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 - \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4} \mathrm{e} + \frac{1}{4} \mathrm{e}^{-2x} \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

10. **Solution.** 1.

由题可知, 所求面积 $A =$

$$\int_0^{+\infty} x \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = - \int_0^{+\infty} x \mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -x \mathrm{e}^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由方程得当 $x = 0$ 时, $y = 0$.

方程两边关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^y y' + 6y + 6xy' + 2x = 0.$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式得 $y'(0) = 0$.

方程两边关于 x 再次求导得

$$\mathrm{e}^y (y')^2 + \mathrm{e}^y y'' + 12y' + 6xy'' + 2 = 0.$$

将 $x = 0, y = 0, y'(0) = 0$ 代入上式得 $y''(0) = -2$.

12. **Solution.** 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathrm{e}^x \ln(1+x) - x \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x - \frac{1}{2}x^2 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x - \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

13. **Solution.** 令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x \sin(x-t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^x \sin u^2 \mathrm{d}u$.

故

$$\begin{aligned}l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x \sin x^2} \int_0^x \sin(x-t)^2 \mathrm{d}t = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin u^2 \mathrm{d}u}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

14. **Solution.** 由定积分的定义可得

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - (x - \ln(1+x)) \Big|_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 由题可知 $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{\sin x}{1-x}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-1)f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x-1)^2 \\ &= \frac{1}{2} f(x)(x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) \sin x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) d \cos x \\ &= -\frac{1}{2} \left[(x-1) \cos x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos x dx \right] \\ &= \frac{\sin 1 - 1}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 齐次方程 $y'' + 2y' - 3y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 2r - 3 = 0$, 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = -3$.

对于 $f(x) = 4e^x$, $\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 故可设特解为 $y^* = Axe^x$,

代入方程得 $A(x+2)e^x + 2A(x+1)e^x - 3Axe^x = 4e^x$, 解得 $A = 1$,

所以非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + xe^x$.

由题可知 $y(0) = 1$, $y'(0) = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 代入得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -3C_1 + C_2 + 1 = -1 \end{cases}$, 解得 $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$.

因此 $f(x) = \frac{3}{4}e^{-3x} + \frac{1}{4}e^x + xe^x$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 方程 $\int_0^{f(x)} g(t) dt + \int_0^x f(t) dt = xe^x - e^x + 1$ 两边关于 x 求导得 $g(f(x)) \cdot f'(x) + f(x) = xe^x$.

由反函数的性质, $g(f(x)) = x$, 所以上式即 $xf'(x) + f(x) = xe^x$.

当 $x = 0$ 时, 由题可知 $f(0) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, 上式可变形为

$$f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = e^x.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int e^x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + \int xe^x dx \right) = \frac{1}{x} (C + xe^x - e^x). \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (C + xe^x - e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x + \frac{C - e^x}{x} \right] = f(0) = 0$, 解得 $C = 1$.

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} (1 + xe^x - e^x), & x \neq 0. \end{cases}$$

18. **Solution.** 由题可知 $\int_0^1 \left(ax + \frac{3}{2}bx^2 \right) dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 2$, 所以 $a = 4 - b$.

旋转体的体积 $V =$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi f^2(x) dx &= \pi \int_0^1 \left[(4-b)x + \frac{3}{2}bx^2 \right]^2 dx = \pi \int_0^1 \left[\frac{9}{4}b^2x^4 + 3(4-b)bx^3 + (4-b)^2x^2 \right] dx \\ &= \pi \left[\frac{9}{20}b^2 + \frac{3}{4}(4-b)b + \frac{1}{3}(4-b)^2 \right] = \left(\frac{1}{30}b^2 + \frac{1}{3}b + \frac{16}{3} \right) \pi. \end{aligned}$$

$V' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}b \right) \pi$, 令 $V' = 0$ 解得 $b = -5$, 此时 $V''(-5) = \frac{\pi}{15} > 0$, 所以 V 的最小值存在, $V(-5) = \frac{9}{2}\pi$.

故当 $a = 9$, $b = -5$ 时, D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小, 此最小值为 $\frac{9}{2}\pi$.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令 $F(x) = x \int_0^x f(t)g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \int_0^x g(t)dt$, 则 $F(0) = 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t)g(t)dt + xf(x)g(x) - f(x) \int_0^x g(t)dt - g(x) \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x [f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - g(x)f(t)] dt \\ &= \int_0^x [f(x) - f(t)] \cdot [g(x) - g(t)] dt. \end{aligned}$$

由题可知 $f(x), g(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加, 所以 $\forall t \in [0, x]$, $f(x) - f(t) \geq 0$, $g(x) - g(t) \geq 0$,

故 $[f(x) - f(t)] \cdot [g(x) - g(t)] \geq 0$, 因此 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加.

所以 $F(x) \geq F(0) = 0$, 即

$$a \int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \int_0^a g(x)dx.$$

20. **Proof.** 由 Taylor 公式, 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 $x=a$ 和 $x=b$ 处展开得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2, \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2. \end{aligned}$$

因 $f'(a) = f'(b) = 0$, 所以上式即

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2, \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(b) + \frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2, \end{aligned}$$

其中 $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

两式相减得

$$0 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) - f(b) + \frac{1}{8} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)] (b-a)^2,$$

所以

$$|f(b) - f(a)| = \frac{(b-a)^2}{8} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|).$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$,

则 $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \cdot 2|f''(\xi)|$, 即 $(b-a)^2 |f''(\xi)| \geq 4|f(b) - f(a)|$.