
CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处【 】.
- A. 连续 B. 右连续 C. 左连续 D. 左右都不连续
2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{x} = 1$, 则【 】.
- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值 D. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
3. 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + e^{-x}$ 的特解形式应设为 $y^* =$ 【 】.
- A. $xe^x(a \cos x + b \sin x) + ce^{-x}$ B. $e^x(a \cos x + b \sin x) + ce^{-x}$
C. $e^x(ax + b) \cos x + ce^{-x}$ D. $e^x(a \cos x + b \sin x) + cxe^{-x}$
4. 设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数, 点 $(c, f(c)) (a < c < b)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点的一个充分条件为【 】.
- A. $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递增 B. $f''(c) = 0$
C. $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递减 D. $f''(c) = 0$ 且 $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递减
5. 若函数 $f(x)$ 满足 $df(x) = -e^{\cos x} \sin x dx$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ 【 】.
- A. $e^{\cos x} - 1$ B. $e^{\sin x}$ C. $e^{\sin x} - e$ D. $e^{\cos x} - e$
6. 下列反常积分发散的是【 】.
- A. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ B. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx$ D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. $\int_{-1}^1 (x \ln(x^{2026} + 1) + \sqrt{1-x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) (x > 0)$ 的斜渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

9. 连续曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t-x| dt (0 < x < 1)$, 则 $y = f(x), x=0, x=1$ 以及 x 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\cos x - 1)}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}.$

12. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=9}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=9}.$

13. 若 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ 在 $x=1$ 处取得极值 2, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值.

14. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$.

15. 求微分方程 $(y^2 - 6x) \frac{dy}{dx} = -2y$ 的通解.

16. 在 xOy 平面内, 把连接点 $O(0, 0)$ 与点 $P(1, 0)$ 的线段 OP 剖分为 n 等分, 各分点依次记为 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} . 从点 $P_k, k=1, 2, \dots, n-1$ 引抛物线 $y=x^2$ 的切线, 切点记为 $Q_k(x_k, x_k^2)$, 设三角形 $\triangle Q_k P_k P$ 的面积 S_k , 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

18. 已知曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1, l_2 分别是曲线 L 在 $(0, 0)$ 和 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$, 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 求 $\int_0^3 (x^2 + x)f'''(x)dx$.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 证明: 对于任意的 $a \in [0, 1]$, 都有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 证明: 在 $[-1, 1]$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 3 \int_{-1}^1 f(x)dx$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

因为 $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} = 0$, $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\frac{1}{x-1}} = +\infty$,

所以函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处右连续, 左不连续.

2. **Solution.** A.

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 故 $f(x), f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

由题可得 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f'(x)) = 0$, 所以 $f(0) + f'(0) = 0$, 即 $f'(0) = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f'(0) + f''(0) = 1$, 所以 $f''(0) = 1 > 0$.

故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

3. **Solution.** A.

齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r + 2 = 0$, 解得 $r = 1 \pm i$.

对于 $f_1(x) = e^x \sin x$, $\lambda + i\omega = 1 + i$ 是特征方程的单根, 故可设特解为 $y_1^* = xe^x(a \cos x + b \sin x)$;

对于 $f_2(x) = e^{-x}$, $\lambda = -1$ 不是特征方程的根, 故可设特解为 $y_2^* = ce^{-x}$.

由叠加原理, 原方程的特解形式应设为 $y^* = y_1^* + y_2^* = xe^x(a \cos x + b \sin x) + ce^{-x}$.

4. **Solution.** D.

若点 $(c, f(c))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 必须 $f''(c) = 0$. D 选项给出 $f''(x)$ 在 (a, b) 内严格单调递减,

则当 $a < x < c$ 时, $f''(x) > 0$; $c < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 所以点 $(c, f(c))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

5. **Solution.** D.

方程 $df(x) = -e^{\cos x} \sin x dx$ 两边从 0 积分到 t , 得

$$\begin{aligned}\int_0^t df(x) &= -\int_0^t e^{\cos x} \sin x dx \\ f(t) - f(0) &= \int_0^t e^{\cos x} d(\cos x) \\ f(t) &= e^{\cos x} \Big|_0^t = e^{\cos t} - e.\end{aligned}$$

故 $f(x) = e^{\cos x} - e$.

6. **Solution.** C.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}, \\ \text{由于 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx &= \ln |\sin x| \Big|_{0+}^{\frac{\pi}{2}} = +\infty, \text{ 所以积分 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx \text{ 发散.}\end{aligned}$$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{\pi}{2}$.

函数 $y = x \ln(x^{2026} + 1)$ 是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x \ln(x^{2026} + 1) dx = 0$.

由定积分的几何意义可得 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\int_{-1}^1 (x \ln(x^{2026} + 1) + \sqrt{1-x^2}) dx = \frac{\pi}{2}$.

8. **Solution.** $y = x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1+e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0, \\ \text{所以斜渐近线方程为 } y &= x.\end{aligned}$$

9. **Solution.** 4.

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{\sin x}, \text{ 所以 } ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{1+\sin x} dx = \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx, \\ \text{故 } s &= \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^\pi \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = 4.\end{aligned}$$

10. **Solution.** $\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x (t-x) dt + \int_x^1 (x-t) dt = x^2 - x + \frac{1}{2}. \\ \text{旋转体的体积 } V &= \int_0^1 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 利用 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)} = 6. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 当 $x = 9$ 时, $1 + 2t^2 = 9$, 因为 $t > 1$, 故 $t = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)}, \text{ 所以 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=9} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = \frac{e}{2(1+2\ln 2)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{e}{2(1+2\ln t)} \right)' \cdot \frac{1}{4t} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2},$$

$$\text{所以 } \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=9} = \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=2} = -\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

13. **Solution.** 由题可知 $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$, 且 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a + b + 1 = 2, \\ 3a + 2b + 1 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -3, b = 4, f(x) = -3x^3 + 4x^2 + x.$$

$$\text{令 } f'(x) = -9x^2 + 8x + 1 = 0, \text{ 解得 } x = -\frac{1}{9} \text{ 或 } x = 1.$$

$$\text{计算 } f(-1) = 6, f\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{14}{243}, f(1) = 2, f(2) = -6,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 6, 最小值为 -6.

14. **Solution.** 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 可得 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

$$\text{令 } u = x^2 - t^2, \text{ 则 } du = -2tdt, \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt = -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u)du.$$

所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u)du}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x^2)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 方程变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{3x}{y} = -\frac{y}{2}$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int (-\frac{3}{y})dy} \left(C + \int \left(-\frac{y}{2} \right) e^{\int (-\frac{3}{y})dy} dy \right) \\ &= y^3 \left(C - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2} dy \right) = y^3 \left(C + \frac{1}{2y} \right) = Cy^3 + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

16. **Solution.** 点 P_k 的坐标为 $\left(\frac{k}{n}, 0\right)$, 过 $Q_k(x_k, x_k^2)$ 的切线斜率为 $2x_k$, 所以有

$$\frac{x_k^2 - 0}{x_k - \frac{k}{n}} = 2x_k,$$

解得 $x_k = \frac{2k}{n}$, 故 $S_k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{4k^2}{n^2}$.

由定积分的定义, 得

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot 2 \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 令 $u = t - x$, 则

$$\int_0^x t f(t-x) dt = \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = \int_{-x}^0 u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$$

原方程变形为

$$x = \int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$$

方程两边关于 x 求导得 $1 = f(x) + x f(-x) - x f(-x) + \int_{-x}^0 f(u) du$, 即

$$f(x) + \int_{-x}^0 f(u) du = 1.$$

令 $x = 0$ 得 $f(0) = 1$. 上式两边再次关于 x 求导得 $f'(x) + f(-x) = 0$, 即 $f'(x) = -f(-x)$.

令 $x = 0$ 得 $f'(0) = -1$. 由于 $f(x)$ 可微, 由上式可知 $f''(x)$ 存在,

且 $f''(x) = (f'(x))' = (-f(-x))' = f'(-x) = -f(x)$, 即

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

此微分方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r = \pm i$, 所以可设 $f(x) = A \cos x + B \sin x$.

将 $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ 代入上式得 $A = 1$, $B = -1$, 所以 $f(x) = \cos x - \sin x$.

18. **Solution.** 由题可知 $f''(3) = 0$, $f(3) = 2$, $f(0) = 0$, $l_1: y = f'(0)x$, $l_2: y - 2 = f'(3)(x - 3)$.

将交点坐标 $(2, 4)$ 分别代入 l_1 和 l_2 的方程得 $f'(0) = 2$, $f'(3) = -2$. 所以

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2 + x)f'''(x)dx &= \int_0^3 (x^2 + x)df''(x) \\ &= (x^2 + x)f''(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1)f''(x)dx \\ &= - \int_0^3 (2x + 1)f''(x)dx \\ &= - (2x + 1)f'(x)\Big|_0^3 + \int_0^3 2f'(x)dx \\ &= -7f'(3) + f'(0) + 2(f(3) - f(0)) = 20.\end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令 $F(t) = \int_0^t g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(t)g(1)$,

则 $F(1) = \int_0^1 (g(x)f'(x) + f(x)g'(x))dx - f(1)g(1) = 0$, 且 $F'(t) = g(t)f'(t) - f'(t)g(1) = f'(t)[g(t) - g(1)]$.

因为 $f'(x) \geq 0$, $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(t) \leq g(1)$, 故 $F'(t) \leq 0$, $F(t)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减.

所以 $F(a) \geq F(1) = 0$, 即 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$.

20. **Proof.** 利用 Taylor 公式, $\forall x \in [-1, 1]$, 存在 η 介于 0 和 x 之间, 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2.$$

所以 $3 \int_{-1}^1 f(x)dx = 3 \int_{-1}^1 \left(f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2 \right) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx$.

由于 $f''(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续, 所以 $f''(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有最大值 M 和最小值 m , 故

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}m \int_{-1}^1 x^2 dx &\leq \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx \leq \frac{3}{2}M \int_{-1}^1 x^2 dx, \\ m &\leq \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx \leq M.\end{aligned}$$

由介值定理, 至少存在一点 $\xi \in [-1, 1]$, 使得 $f''(\xi) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f''(\eta)x^2 dx = 3 \int_{-1}^1 f(x)dx$.