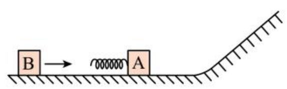
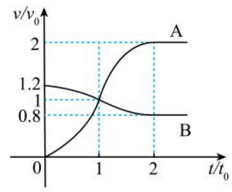
积分思想在动量问题中的应用（南县一中唐善军）

一、高考真题再现

1、（2022 年全国乙卷）如图（a），一质量为 m 的物块 A 与轻质弹簧连接，静止在光滑水平面上：物块 B 向 A 运动，$t=0$ 时与弹簧接触，到 $t=2t_0$时与弹簧分离，第一次碰撞结束，A、B 的 $v-t$ 图像如图(b)所示。已知从 $t=0$ 到 $t=t_0$时间内，物块 A 运动的距离为 $0.36v_0t_0$。A、B 分离后，A 滑上粗糙斜面，然后滑下，与一直在水平面上运动的 B 再次碰撞，之后 A 再次滑上斜面，达到的最高点与前一次相同。斜面倾角为 θ ($\sin\theta=0.6$)，与水平面光滑连接。碰撞过程中弹簧始终处于弹性限度内。求第一次碰撞过程中，弹簧压缩量的最大值；

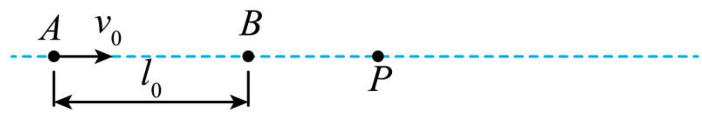


图（a）



图（b）

2、（2025 陕西卷节选）如图，有两个电性相同且质量分别为 m、$4m$ 的粒子 A、B，初始时刻相距l_0，粒子 A 以速度v_0沿两粒子连线向速度为 0 的粒子 B 运动，此时 A、B 两粒子系统的电势能等于$\frac{1}{25}mv_0^2$。经时间t_1粒子 B 到达 P 点，此时两粒子速度相同，已知任意两带电粒子系统的电势能与其距离成反比，忽略两粒子所受重力。求：（m、l_0、v_0、t_1均为已知量）求：t_1时间内粒子 B 的位移大小x_B。



3、（2025·浙江·高考真题）有一离地面高度 $20m$、质量为 $2\times10^{-13}kg$ 稳定竖直降落的沙尘颗粒，在其降落过程中受到的阻力与速率 v 成正比，比例系数 $1\times10^{-9}kg/s$，重力加速度 $g=10m/s^2$，则它降落到地面的时间约为（　　）

A．$0.5h$　　B．$3h$　　C．$28h$　　D．$166h$

【真题考查总结】1、动量守恒： $m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2$，得：$\sum m_1v_0\Delta t=\sum m_1v_1\Delta t+\sum m_2v_2\Delta t$，　得：　$m_1v_0t_0=m_1x_1+m_2x_2$

2、“力正比与速度 F=kv”模型：动量定理： $\Sigma kv\cdot\Delta t=m\Delta v$　　得 $kx=m\Delta v$（注意方向）

3、人船模型：动量守恒：$0=m_1v_1-m_2v_2$，得：$0=\sum m_1v_1\Delta t-\sum m_2v_2\Delta t$，

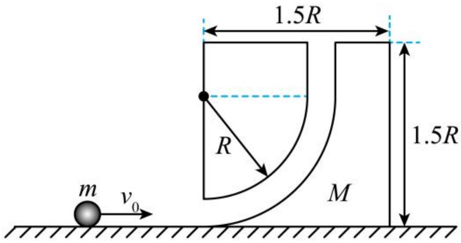
得：　$0=m_1x_1-m_2x_2$

二、好题训练

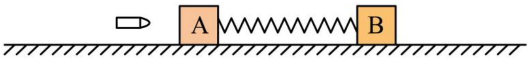
1、如题图所示，一边长为 1.5R 的正方体物块静置于足够长的光滑水平面上，该正方体物块内有一条由半径为 R 四分之一圆弧部分和竖直部分平滑连接组成的细小光滑圆孔道。一质量为 m 的小球（可视为质点），以初速度 $v_0=3\sqrt{gR}$沿水平方向进入孔道，恰好能到达孔道最高点。孔道直径略大于小球直径，孔道粗细及空气阻力可不计，重力加速度为 g。

（1）求该正方体物块的质量；

（2）小球从进入孔道至到达孔道最高点的过程中，小球在孔道圆弧部分运动的时间为t_0，求小球到达孔道最高点时，该正方体物块移动的距离。



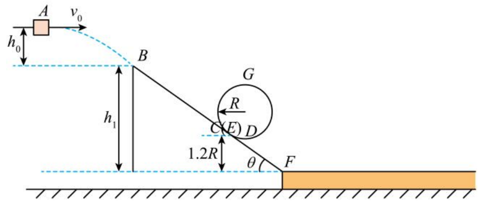
2、如图所示，质量$m_1 = 1.995kg$的物块 A 与质量m_2（未知）的物块 B（均可视为质点）通过轻质弹簧拴接在一起，静止在光滑地面上，$t = 0$时质量$m_0 = 5g$的子弹以速度$v_0 = 400m/s$沿水平方向射入物块 A 并留在其中（时间极短）。$t = 0.5s$时，弹簧第一次压缩量最大，此时弹簧压缩量为 0.32m，从$t = 0$到$t = 0.5s$时间内，物块 B 运动的距离为 0.072m。已知碰撞过程中弹簧始终处于弹性限度内，重力加速度$g = 10m/s^2$，$\sin 37° = 0.6$。求：求弹簧恢复原长时物块 A、B 的速度；



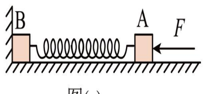
3、（2023 年浙江改编）小明同学设计了如图所示游戏装置，该装置由固定在水平地面上倾角$\theta = 37°$且滑动摩擦因数为$\mu_1 = 0.5$的倾斜轨道 BCEF、接触面光滑的螺旋圆形轨道 CDGE、以及静止在光滑的水平面上的长木板组成。木板左端紧靠轨道右端且与轨道 F 点等高但不粘连，所有接触处均平滑连接，螺旋圆形轨道与轨道 BC、EF 相切于 C(E)处，切点到水平地面的高度为 1.2R。从 B 的左上方 A 点以某一初速度$v_0 = 8m/s$水平抛出一质量$m = 2kg$的物块（可视为质点），物块恰好能从 B 点无碰撞进入倾斜轨道 BC，并通过螺旋圆形轨道最低点 D 后，经倾斜轨道 EF 滑上长木板。已知长木板的质量$M = 4kg$、$R = 2m$、$h_1 = 6.6m$，空气阻力不计，g 取$10m/s^2$。求：

（1）若物块与长木板之间的动摩擦因数$\mu_2 = 0.8$，物块在长木板上滑行且恰好不滑出长木板，求此过程中物块与长木板系统产生的热量；

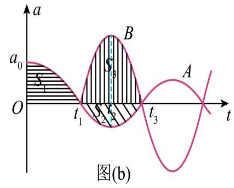
（2）若长木板固定不动，且木板长度为（1）问中的长度，在木板上表面贴上某种特殊材料，物块在木板上运动受到的水平阻力（与摩擦力类似）大小与物块速度大小 v 成正比，即$f = kv$，k 为常数，要使物块不滑出长木板，k 至少为多大。



3、（2021 年湖南改编）如图（a），质量分别为m_A、m_B的 A、B 两物体用轻弹簧连接构成一个系统，外力 F 作用在 A 上，系统静止在光滑水平面上（B 靠墙面），此时弹簧形变量为 x，撤去外力并开始计时，A、B 两物体运动的$a-t$图像如图（b）所示，S_1表示 0 到t_1时间内 A 的$a-t$图线与坐标轴所围面积大小，S_2、S_3分别表示t_1到t_3时间内 A、B 的$a-t$图线与坐标轴所围面积大小。下列说法正确的是(　　)



图(a)



图(b)

A．0 到t_1时间内，墙对 B 的冲量小于m_AS_1　　　　B．$m_B > m_A$

C．B 运动后，弹簧的最大形变量等于 x　　　　D．$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m_A+m_B}{2m_B}$

4、2024 年 11 月 12~17 日，“第十五届中国国际航空航天博览会”在珠海国际航展中心举行。题图 1 为某飞机小队表演的精彩瞬间；题图 2 为其中一架飞机（可视为质点）攀升时的示意图，$t=0$ 时刻，其速度大小为v_0、方向与水平方向的夹角为 θ，经过时间t_0，沿直线飞行了距离 x。该过程视为匀加速直线运动，空气提供的升力始终与速度方向垂直，飞机飞行时所受阻力大小 $f=kv$，其中 k（已知）为定值。已知飞机总质量为 m，重力加速度为 g，忽略飞行过程中的质量损失。求：该段时间t_0内，飞机所受牵引力的冲量大小。


图1

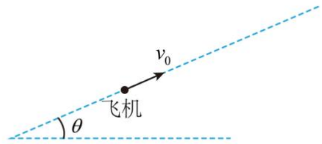


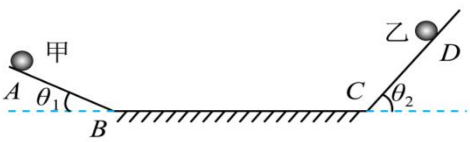
图2

5、如图所示，光滑的水平轨道左右两端分别与倾角为 $θ_1=37°$和 $θ_2=53°$的光滑斜面平滑连接。初始时刻，质量$m_1=2kg$ 的小球甲静止在距水平轨道高度$h_1=1.8m$ 的 A 处，质量$m_2=6kg$ 的小球乙静止在距水平轨道高度$h_2=3.2m$ 的 D 处，两小球同时由静止释放。小球甲、乙同时在水平轨道内运动时，它们之间才存在相互排斥力，排斥力的大小 $F=3v_{相}(N)$（$v_{相}$为两者的相对速度）。已知水平轨道足够长，不计空气阻力，重力加速度取 $g=10m/s^2$。

(1)求甲、乙两小球刚进入水平轨道时的速度v_1和v_2的大小。

(2)若甲、乙两小球第一次在水平轨道上运动的过程中恰好不相碰，求水平轨道的长度d_1。

(3)在水平轨道d_1的基础上增加水平导轨的长度，使得小球甲第二次在水平轨道上运动的过程中与小球乙恰好不相碰，求此时水平轨道的最小长度d_2。



积分思想在动量问题中的应用（答案）

一、高考真题再现

1、B 接触弹簧后，压缩弹簧的过程中，A、B 动量守恒，有$m_B \times 1.2v_0 = 6mv_0 = m_B v_B + mv_A$
对方程两边同时乘以时间Δt，有 $6mv_0 \Delta t = 5mv_B \Delta t + mv_A \Delta t$
0-t_0之间，根据位移等速度在时间上的累积，可得 $6mv_0t_0 = 5ms_B + ms_A$
将$s_A = 0.36v_0t_0$代入可得$s_B = 1.128v_0t_0$
则第一次碰撞过程中，弹簧压缩量的最大值$\Delta s = s_B - s_A = 0.768v_0t_0$

2、两者共速时设间距为 l'，电势能为$E_p' = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + \frac{1}{25}mv_0{}^2 - \frac{1}{2} \times 5mv_1{}^2 = \frac{11}{25}mv_0{}^2$

根据题意电荷间的电势能与它们间的距离成反比，则 $l' = \frac{E_{p0}}{E_p'}l_0 = \frac{1}{11}l_0$

两者共速前的过程系统始终动量守恒，根据动量守恒则$\sum mv_0t_1 = \sum mv_At_1 + \sum 4mv_Bt_1$
即有 $mv_0t_1 = mx_A + 4mx_B$
根据位移关系可知$x_B + l_0 = x_A + l'$

联立解得$x_B = \frac{v_0t_1}{5} - \frac{2}{11}l_0$

3、B【详解】沙尘颗粒开始时速度较小时，阻力较小，可知 $mg - kv = ma$, 沙尘颗粒速率增大，阻力增大，加速度减小，当 $a = 0$ 时，沙尘颗粒速度达到最大且稳定，满足 $mg = kv_m$
解得$v_m = 2 \times 10^{-3}m/s$ 由动量定理可得 $mgt - \overline{kv}t = mv$ 即 $mgt - kh = mv$, 则沙尘下落时间为 $t = \frac{kh+mv}{mg}$由于 $mv \ll kh$，则 $t \approx \frac{kh}{mg} = 10^4s \approx 3h$, 故选 B

二、好题训练

1、答案】（1）$\frac{m}{2}$;（2）$2t_0\sqrt{gR} + \frac{4R}{3}$

【详解】(1) 小球从进入孔道至到达最高点过程中，小球和物块组成的系统机械能守恒、水平方向动量守恒，以水平向右为正方向，则有 $mv_0 = (M+m)v$，$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mg \cdot 1.5R$，解得 $v = 2\sqrt{gR}$，$M = \frac{m}{2}$。

（2）小球从进入孔道至到达孔道圆弧部分最高点的过程中，小球和物块组成的系统水平方向动量始终守恒，则有 $mv_0 = m\overline{v_1} + M\overline{v_2}$，
小球在孔道圆弧部分运动的时间为t_0，则有 $mv_0t_0 = m\overline{v_1}t_0 + M\overline{v_2}t_0$，
其中$x_1 = \overline{v_1}t_0$，$x_2 = \overline{v_2}t_0$，该时间t_0内，小球和物块的相对位移为$x_1 - x_2 = R$，解得$x_2 = \frac{2(v_0t_0 - R)}{3}$。

小球离开孔道圆弧部分至到达孔道最高点过程中，小球在竖直方向做竖直上抛运动，则有 $1.5R - R = \frac{1}{2}gt_1^2$

该过程中，物块在水平方向做匀速直线运动，此过程物块的位移 $x_3 = vt_1$，
其中 $v = 2\sqrt{gR}$，解得$x_3 = 2R$
综上可知，小球到达孔道最高点时，物块移动的距离 $x = x_2 + x_3$，

解得 $x = 2t_0\sqrt{gR} + \frac{4R}{3}$

2、【答案】0.2m/s，方向向左；0.8m/s，方向向右

【详解】（1）子弹打进物块过程中动量守恒$m_0v_0=(m_0+m_1)v$，解得 $v=1m/s$
对于 A、B 及弹簧组成的系统，任一时刻动量守恒，设$m_3=m_0+m_1=2kg$
$m_3v=m_3v_A+m_2v_B$， $m_3v\Delta t=m_3v_A\Delta t+m_2v_B\Delta t$， $\sum m_3v\Delta t=\sum m_3v_A\Delta t+\sum m_2v_B\Delta t$，
$m_3vt=m_3x_A+m_2x_B$， $\Delta x=x_A-x_B=0.32m$，解得$m_2=3kg$
弹簧恢复原长时$m_3v=m_3v_A+m_2v_B$
$\frac{1}{2}m_3v^2=\frac{1}{2}m_3v_A^2+\frac{1}{2}m_2v_B^2$，解得$v_A=-0.2m/s$，$v_B=0.8m/s$，
则 A 速度向左，B 速度向右。
3、（1）96J；（2）4kg/s
（1）物块从 A 点做平抛运动到 B 点，则有$v_{By}^2=2gh_0$， $v_0=\frac{v_{By}}{\tan\theta}$ 解得$h_0=1.8m$
从 A 到 D 由动能定理可得 $mg\{h_0+h_1-[1.2R-(R-R\cos\theta)]\}-\mu_1 mg\cos\theta\cdot\frac{(h_1-1.2R)}{\sin\theta}=\frac{1}{2}mv_D^2-\frac{1}{2}mv_0^2$
从 A 到 F 过程有 $mg(h_0+h_1)-\mu_1 mg\cos\theta\times\frac{h_1}{\sin\theta}=\frac{1}{2}mv_F^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ ，解得$v_F=12m/s$；
物块滑上长木板后，木块和长木板系统动量守恒，则有 $mv_F=(m+M)v$，解得 $v=4m/s$
假设物块刚好不滑离长木板，由功能关系可得 $Q=\frac{1}{2}mv_F^2-\frac{1}{2}(m+M)v^2$ ， 解得 $Q=96J$
2）若长木板固定不动，物块在木板上运动受到的水平阻力 $F_f=kv$
对木块 m 由动量定理得$\Sigma-F_f\Delta t=0-mv_F$ ，即有$\Sigma-kv\cdot\Delta t=-mv_F$
由 $mg\mu L_{min}=Q$ ，解得$L_{min}=6m$，
则 $kL_{min}=mv_F$ 解得 $k=4kg/s$
4、【答案】D【详解】A．设物体 A 在 t_1时刻的速度为v_0，0 到t_1时间内，根据动量定理，对物块 A，$F_{弹}t_1=m_Av_0-0$
设墙对 B 的冲量为 I，对物块 B$I-F_{弹}t_1=0$
由 a-t 图线面积表示物体速度变化量$v_0-0=S_1$解得 $I=m_AS_1$故 A 错误；
B．t_1到t_2时间内，B 开始运动，水平方向上 A、B 仅受弹力作用，且 A、B 受到的弹力大小相等、方向相反，由图可知t_1到t_2时间内 B 的加速度大于 A 的加速度，根据牛顿第二定律可知$m_B<m_A$故 B 错误；
C．B 运动后，当 A、B 速度相等时弹簧形变量（伸长或压缩量）最大，此时 A、B 的速度不为零，A、B 的动能不为零，由动量守恒定律可知，弹簧形变量最大时，A、B 的动能与弹簧的弹性势能之和与撤去外力时弹簧的弹性势能相等，则弹簧的形变量最大时弹簧的弹性势能小于撤去外力时弹簧的弹性势能，弹簧的形变量最大时弹簧的形变量小于撤去外力时弹簧的形变量 x，故 C 错误；
D．设在 t_2时刻物体 A、物体 B 的速度分别为 v_{A2}、v_{B2}，t_1到t_2时间内，由图像可知 a-t 图线面积表示物体速度变化量，则$v_{B2}=\frac{S_3}{2}$，$v_0-v_{A2}=\frac{S_2}{2}$由图可知，物体 A 和物体 B 在t_2的加速度最大，此时 A、B 速度相等，$v_{A2}=v_{B2}$故$\frac{S_3}{2}=S_1-\frac{S_2}{2}$即$S_3=2S_1-S_2$，设在 t_3时刻物体 A、B

的速度分别为 v_{A3}、v_{B3}，则$v_{B3}=S_3$，$v_0-v_{A3}=S_2$，在 t_1 至 t_3时刻，根据动量守恒可得$m_A(v_0-v_{A3})=m_Bv_{B3}$即$m_AS_2=m_BS_3$；可得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{m_A+m_B}{2m_B}$故 D 正确。

5、【答案】(1) 6m/s，8m/s　(2) 7m　(3) 18.25m

【详解】(1) 设两小球从斜面滑下的时间分别为t_1和t_2，加速度分别为a_1和a_2，由匀变速直线运动的位移与时间的关系有$\frac{h_1}{\sin\theta_1}=\frac{1}{2}a_1{t_1}^2$，$\frac{h_2}{\sin\theta_2}=\frac{1}{2}a_2{t_2}^2$，

由$v_1=a_1t_1$，$v_2=a_2t_2$，$m_1g\sin\theta_1=m_1a_1$，$m_2g\sin\theta_2=m_2a_1$，
解得$t_1=t_2=1s$，$v_1=6m/s$，$v_2=8m/s$。
2）由第一问可知，两小球同时进入水平轨道，均做减速运动，最终达到共同速度。设两小球的共同速度为v_3，对两小球组成的系统，取水平向左为正方向，由动量守恒定律有$m_2v_2-m_1v_1=(m_1+m_2)v_3$，解得$v_3=4.5m/s$，两小球从进入水平轨道至恰好不相碰的过程，对小球甲，由动量定理有：$\sum 3v_{相}t=m_1v_3-(-m_1v_1)$，又$\sum v_{相}t=d_1$，解得$d_1=7m$

（3）由第二问分析可知，两小球达到共同速度后一起向左做匀速直线运动，之后小球甲第二次返回水平面后经过一段时间两小球再次达到共同速度。当两小球第一次达到共同速度时，小球甲恰好回到左端的斜面底端，水平轨道的长度最小。设两小球第一次达到共同速度时，它们之间的距离为Δx，有$d_2=d_1+\Delta x$，设之后小球甲在斜面上滑的时间为t_3，有$v_3=a_1t_3$，此过程中小球乙的位移$x_1=2v_3t_3$。

小球甲第二次到达斜面底端至两小球达到共同速度的过程中，设两小球第二次达到的共同速度为v_4，对两小球组成的系统，取水平向左为正方向，由动量守恒定律有$m_2v_3-m_1v_3=(m_1+m_2)v_4$，解得$v_4=2.25m/s$。
两小球从进入水平轨道至恰好不相碰的过程，对小球甲，由动量定理有：

$$\sum 3v_{相}t'=m_1v_4-(-m_1v_3)$$

又$\sum v_{相}t'=x_2$，$x_1+x_2=\Delta x$，解得　$d_2=18.25m$