2013824 赵振岐

2015级

一、证明"有理抛物线" $y=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Q},\ a\neq 0)$ 组成的集合为可数集

证明：由于 $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$，$\mathbb{Q}$ 为可数集

$$ax^2+bx+c \Leftrightarrow (a,b,c)\in(\mathbb{Q}\setminus\{0\})\times\mathbb{Q}^2$$

故结论成立

二、设可测集 $A\subseteq[0,1]$，$B\subseteq[1,2]$，证明：$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$

证明：$m(A\cup B\setminus\{1\})=m((A\setminus\{1\})\cup(B\setminus\{1\}))$

$$=m(A\setminus\{1\})+m(B\setminus\{1\})$$

而 $m(A)=m(A\cap\{1\})+m(A\setminus\{1\})$

$$=0+m(A\setminus\{1\})$$

同理 $m(A\cup B\setminus\{1\})=m(A\cup B)$

$$m(B\setminus\{1\})=m(B)$$

故 $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$

三. f, g 为 E 上可测函数，$\forall p, q \in R$. $E_{pq} = \{x \in E: f(x) > p > q > g(x)\}$ 为零测集. 证明: $f(x) \overset{a.e.}{\leq} g(x)$

证明: $\{x \in E: f(x) > g(x)\}$

$= \{x \in E: \exists p, q \in \mathbb{Q},\ f(x) > p > q > g(x)\}$

$\subset \bigcup_{p} \bigcup_{q} E_{pq}$

而对 $p, q \in \mathbb{Q}$ 有 $m(E_{pq}) = 0$

故 $m\{f(x) > g(x)\} \leq \sum_{p} \sum_{q} m(E_{pq}) = 0$

从而 $f(x) \leq g(x)$ a.e.

四: 若在 E 上有 $f_n \xrightarrow{m} f$, $f_n \overset{a.e.}{=} g_n$. 证明: $g_n \xrightarrow{m} f$

证明: 对 $\forall \sigma > 0$

$\{|g_n - f| \geq \sigma\} \subset \{|f_n - g_n| \geq \frac{\sigma}{2}\} \cup \{|f_n - f| \geq \frac{\sigma}{2}\}$

故

$\overline{\lim_{n\to\infty}} m\{|g_n - f| \geq \sigma\} \leq 0 + 0 = 0$

从而 $\lim_{n\to\infty} m\{|g_n - f| \geq \sigma\} = 0$

五. 定义在 $[0,1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin x^2 & x\in Q\cap[0,1] \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} & x\in Q^c\cap[0,1] \end{cases}$$

求 $\int_{[0,1]} f\,dm$

$$I=\int_{[0,1]\cap Q} f\,dm+\int_{[0,1]\cap Q^c} f\,dm$$
$$=0+\int_{[0,1]}\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dm-\int_{Q\cap[0,1]}\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dm$$
$$=0+2+\frac{2}{3}-0=\frac{8}{3}$$

六. $f(x)$ 于 $(0,+\infty)$ 上 L 可积, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{(0,+\infty)}\frac{f(x)}{1+nx}\,dm$

由 $f\in L(0,+\infty)$ 则 $|f|\in L(0,\infty)$. $|f|<\infty$ a.e.

而对 $x\in(0,\infty)$

$$\frac{|f(x)|}{|1+nx|}\leq|f(x)|\in L(0,\infty)$$

由 Lebesgue 控制收敛定理

$$I=\int_{(0,+\infty)\setminus\{|f|\neq\infty\}}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{1+nx}\,dm$$
$$=\int_{(0,+\infty)\setminus\{|f|\neq\infty\}}0\,dm=0$$

七. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 为定义在 $[0,1]$ 上的函数, $f(0)=0$

证明: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续

证明: 显然 $f(x)\in C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 可导

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad x\in(0,1) \text{ 而}$$

$$|f'(x)|\leq 2x+1\leq 3$$ 故导函数有界

从而 $f(x)$ 为 Lipschitz 函数.

$\forall\varepsilon>0$, 对至多有限个不相交开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{1\leq k\leq n}$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, 若 $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\leq 3\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<3\delta=\varepsilon$$

故 $f(x)\in AC[0,1]$

八. 定义在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 f_n 满足 $\bigvee_a^b(f_n)<1$

且 f_n 逐点收敛到 f, 证明 f 也为有界变差函数

证明: 对 $[a,b]$ 上的网 $\{x_k\}_{1\leq k\leq m}$

$$\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_{k+1})-f_n(x_k)|\leq\bigvee_a^b(f_n)<1$$

固定 $\{x_k\}$ 令 $n\to\infty$ 有

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq 1$$

故 f 也为有界变差函数

2013－2014

一、设A不可数实数集，证明：存在$n\in\mathbb{Z}$使得$A\cap[n,n+1]$为非可数集

证明：否则 $A=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}(A\cap[n,n+1])$为可数集

二、设$\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$为一族长度大于零的区间，证明$E=\bigcup\limits_{\alpha\in A}I_\alpha$可测

证明：对于左开右闭（左闭右开）区间，将其在中点截断为一个开区间与闭区间的并，由于两个区间之并的可能有

①开$\cup$开，得到一个大开区间或两个不交开区间

②开$\cup$闭 得到一个区间或两个距离大于0的区间

③闭$\cup$闭 得到一个区间或两个距离大于0的区间

故$E=\bigcup\limits_{\alpha\in A}I_\alpha$可能为一个区间或若干距离大于0的区间之并，前者自然可测，后者为可数个区间之并，也是可测的（可通过在内部取有理数点证明）

三、设 f 是可测集 E 上的可测函数，证明：对 $\forall p\in \mathbb{Z}$ $|f|^p$ 也为 E 上的可测函数

证明：对 $\forall p\in \mathbb{Z}$，$g(x)=x^p$ 为连续函数

$\forall a\in \mathbb{R}$，由 g 连续知 $\{g<a\}$ 为开集

由构造原理知 $\{g<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$

而 $\{a_n<f(x)<b_n\}$ 为可测集

故 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n<f(x)<b_n\}$ 为可测集

从而 $\{g\circ f<a\}$ 可测，结论得证

四、设 $f(x)$ 为 $(0,1)$ 上的 Lebesgue 可积函数，求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}\frac{1}{1+e^{nf(x)}}dm$

$$I=I_1+I_2+I_3$$

$$=\int_{\{f>0\}}(1+e^{nf})^{-1}dm+\int_{\{f<0\}}(1+e^{nf})^{-1}dm$$

$$+\frac{1}{2}m\{f=0\}$$

由 $|(1+e^{nf})^{-1}|\le 1\in L(0,1)$，由控制收敛定理

$\lim_{n\to\infty}I_1=0$ $\quad\lim_{n\to\infty}I_2=m\{f<0\}$

故 $\lim_{n\to\infty}I=\frac{1}{2}m\{f=0\}+m\{f<0\}$

五. 设 f_n, f, g 为可测集 E 上的可测函数，若在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f$ 且 $f_n \xrightarrow{m} g$，证明：$f=g$ a.e $x\in E$

证明：对 $k\in N_+$

$$m\{|f-g|\geq \frac{1}{k}\} \leq m\{|f-f_n|\geq \frac{1}{2k}\} + m\{|g-f_n|\geq \frac{1}{2k}\}$$

$$\to 0 \ (n\to\infty)$$

故 $m\{f\neq g\} = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f-g|\geq \frac{1}{k}\}\right)$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} m\{|f-g|\geq \frac{1}{k}\} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

故 $f=g$ a.e $x\in E$

六. 设 $f\in C(0,\infty)$ 且 $f\in L(0,\infty)$，证明：广义 Riemann 积分 $\int_0^{\infty} f(x)dx$ 收敛

证明：对 $b>a>0$ $f\in C[a,b]$ 故 $f\in R[a,b]$

先证明 $\int_a^{+\infty} f(x)dx\,(R) < +\infty$

而 $\int_a^b f(x)dx\,(R) = \int_a^b f(x)dx\,(L) = \int_a^{+\infty} f(x)\, I\{a\leq x\leq b\}\, dx$

对 $\forall \{b_n\}$, $b_n\to+\infty\ (n\to\infty)$

$$|f(x)\, I\{a\leq x\leq b_n\}| \leq |f(x)| \in L[a,\infty)$$

由控制收敛定理

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{b_n} f(x)dx\ (R) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{b_n} f(x)dx\,(L)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f(x) I\{a\le x\le b\}dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$

由Henie定理知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx\ (R) < +\infty$

同理可证 $\int_0^{a} f(x)dx < +\infty$

故 $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$

七、设 $f\in L[a,b]$ 且对~~任意~~区间 $I\subset[a,b]$ 有

$\int_I f dm \ge |I|$ 证明：$f(x)\ge 1$ a.e. $x\in[a,b]$

对开集 $\int_U f dm \ge |U|$

证明：对任意可测集 $E\subset[a,b]$，可取开集 $\{I_n\}$

使 $E\subset I_n$ 且 $I_n\downarrow E$，则由控制收敛定理

$$\int_E f dm = \int_a^b f I_E dm = \int_a^b f \lim_{n\to\infty} I_{I_n} dm$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b f I_{I_n} dm = \lim_{n\to\infty}\int_{I_n} f dm$$

$$\ge \lim_{n\to\infty}|I_n| = m(E)$$

取 $E=\{f<1\}$

则 $\int_E f dm \ge m(E) = \int_E 1 dm$

只能 $m(E)=0$

八 举一个在$[0,1]$上有界变差但不绝对连续的函数

记 $Q\cap(0,1)=\{r_n\}$ $\quad F(x)=\sum\limits_{r_n<x}2^{-n}$

2015～2016

一. 设A为可数集.集合B有连续统势,求$A\cup B$的势

若 $A\subset B$ 则 $A\cup B=B$ 有连续统

否则. 记 $A\setminus B=\{r_n\}$

由于B有连续统势.不妨$B=[0,1]$

令 $f: A\cup B\to R$

$$x\in A\setminus B \qquad f(r_n)=-n$$

$$x\in B \qquad f(x)=x$$

则f为单射,故 $\overline{\overline{(A\cup B)}}\le\overline{\overline{R}}$

而 $\overline{\overline{B}}\le\overline{\overline{(A\cup B)}}\le\overline{\overline{R}}$ 从而 $A\cup B$ 有连续统

二. 设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$为开集族 且覆盖了集合$X$. 证明: 存在 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\{G_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 覆盖X

(应为在R^n中, 可数覆盖定理)

证明: 设$X\subset R^n$, 记 $X\cap Q^n=\{x_n\}$ $Q^+=\{r_m\}$

则 $X\subset \bigcup B(x_n, r_m)$

而对 $\forall x_n\in X$, 有$x_n\in G_{\alpha_n}$, 取r_{m_n}使 $B(x_n, r_{m_n})\subset G_{\alpha_n}$. 则 $X\subset \bigcup B(x_n, r_{m_n})\subset \bigcup G_{\alpha_n}$ 结论成立

三. 设$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$为可测集列, $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=1$. 证明: 存在子列$\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s.t. $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k})>\frac{1}{2}$

(应为在$[0,1]$中, 第2章 21题)

证明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=1$, 对$\forall\varepsilon>0$, 有$\{E_{n_k}\}$使

$$m(E_{n_k})>1-\frac{\varepsilon}{2^k}$$

则 $m([0,1]\setminus\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}) = m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[0,1]\setminus E_{n_k})$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}(1-1+\frac{\varepsilon}{2^k})=\varepsilon$$

取$\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k})>\frac{1}{2}$

四. 设$\{f_n\}$为可测函数列，且 $f_n \xrightarrow{a.e.} f_0$. g几乎处处有穷且可测，求证 $f_n g \xrightarrow{a.e.} f_0 g$

证明:

$$\{\lim_{n\to\infty} f_n \neq f\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|f_n g - f g| \geq \tfrac{1}{k}\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\bigcup_{M=1}^{\infty}\left(\{|f_n g - f_0 g| \geq \tfrac{1}{k}\} \cap \{M-1 < |g| \leq M\}\right)$$

故 $m(*)$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty} m\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|f_n - f_0| \geq \frac{1}{k(M-1)}\}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty} m(f_n \nrightarrow f_0) = \sum\sum 0 = 0$$

故 $f_n g \xrightarrow{a.e.} f_0 g$

五. 设E为可测集. 证明: 2E可测且 $m(2E) = 2m(E)$

参考第2章29题

29. 设$E \subset R$可测，a和b为两个实数. 求证: $F = \{ax+b : x \in E\}$ 可测并且 $m(F) = |a| \cdot m(E)$

若 $a=0$ 则 $F = \{b\}$ 自然可测 且 $m(F) = 0 = 0 \cdot m(E)$

若 $a \neq 0$ 则

由E可测. 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集A与闭集B满足

$B \subset E \subset A$ 且 $m(A \setminus B) < \varepsilon$

对开区间I, 显然 $m(aI) = |a| I$

由开集构造原理. 开集为至多可数不交开区间之并

故 $m(aA)=m(a\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}m(aI_n)=|a|\bigcup_{n=1}^{\infty}m(I_n)=|a|m(A)$

从而 $m(a(A\setminus B))=|a|m(A\setminus B)<a\varepsilon$ 而 $aB\subset aE\subset aA$

从而 aE可测 平移测度不变知 $F=aE+\{b\}$可测

对$\forall\varepsilon>0$,存在开区间 $\bigcup I_n$ 使$E\subset\bigcup I_n$, $\sum m(I_n)-\varepsilon<m(E)<\sum m(I_n)$

而 $F\subset\bigcup aI_n+\{b\}$ 故$|a|\sum m(I_n)<m(F)<|a|\sum m(I_n)$

取确界知 $m(F)=|a|m(E)$

六. 讨论 $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{n\sqrt{x}\sin^3(mx)}{1+n^2x^2}dm$ 是否存在.并求出极限

由 $\left|\frac{n\sqrt{x}\sin^3(mx)}{1+n^2x^2}\right|\leqslant\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{n\sqrt{x}}{2nx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\in L[0,1]$

及Lebesgue控制收敛定理

$\lim_{n\to\infty}I_n=\int_{[0,1]}0\,dm=0$

七. 设f可积,证明: $\int_R f(\pi x)dm=\frac{1}{\pi}\int_R f(x)dm$

证明: $f=f^+-f^-$, $f^+,f^-\in L(R)$

由πx为严增绝对连续函数,故

$\frac{1}{\pi}\int_{[-n,n]}f^+(x)dm=\int_{[-\frac{n}{\pi},\frac{n}{\pi}]}f^+(\pi x)dm$

$$\frac{1}{\pi}\int_{[-n,n]} f(x)\,dm = \int_{[-\frac{n}{\pi},\frac{n}{\pi}]} f(\pi x)\,dm$$

令 $n\to\infty$，并注意到 $f^{\pm}(\pi x)\chi_{[-\frac{n}{\pi},\frac{n}{\pi}]} \uparrow f^{\pm}(\pi x)$

故 $\int_R f^+(\pi x)\,dm = \frac{1}{\pi}\int_R f^+(x)\,dm < \infty$

$\int_R f^-(\pi x)\,dm = \frac{1}{\pi}\int_R f^-(x)\,dm < \infty$

故 $\int_R f(\pi x)\,dm = \frac{1}{\pi}\int_R f(x)\,dm$

八、小明将AC函数定义记为 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, s.t. $\forall \{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$，$\{(a_k,b_k)\}$ 为不相交开区间且 $\sum_{k=1}^n |b_k-a_k|<\delta$ 有 $\left|\sum_{k=1}^n (f(b_k)-f(a_k))\right|<\varepsilon$，问 f 是否绝对连续

是. $\forall \varepsilon>0$, $\forall \{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n = K_1 \cup K_2$

$K_1 = \{(a_n,b_n): f(a_n)<f(b_n)\}$ $\quad \sum_{k=1}^n |b_k-a_k|<\delta$

$K_2 = \{(a_n,b_n): f(a_n)\ge f(b_n)\}$

则 $\sum |f(a_n)-f(b_n)|$

$= \left|\sum_{K_1}(f(a_n)-f(b_n))\right| + \left|\sum_{K_2}(f(a_n)-f(b_n))\right|$

$< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$ $\qquad$ 故 $f\in AC$

小明怎么考上的南开？

2017-2018 (A)

一、设G为R中开集，A为R中零测集，证明：$\overline{G}=\overline{G\setminus A}$

证明：$A^\circ=\emptyset$，不妨设 $A\subset G$ 否则以 $A\cap G$ 代替 A

由 $G\setminus A\subset G$ 有 $\overline{G\setminus A}\subset\overline{G}$

而 $\overline{G}\setminus(\overline{G\setminus A})=\overline{G}\cap(\overline{G\setminus A})^c$

$=\overline{G}\cap(G\cap A^c)^{c\circ}=\overline{G}\cap(G^c\cup A)^\circ$

$=\overline{G}\cap(G^{c\circ}\cup A^\circ)=\overline{G}\cap(\overline{G})^c=\emptyset$

故 $\overline{G}\subset(\overline{G\setminus A})\Rightarrow\overline{G}=\overline{G\setminus A}$

二、设A为R中集合，证明A°为开集

证明：$\forall x\in A^\circ$ $\exists\delta>0$ 使 $B(x,\delta)\subset A$

则 $\forall y\in B(x,\frac{\delta}{3})$ 有 $B(y,\frac{\delta}{3})\subset B(x,\delta)\subset A$

故 $B(x,\frac{\delta}{3})\subset A^\circ$ 从而 A°为开集

三、设$E\subset R$，若存在两列可测集$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$使得 $A_n\subset E\subset B_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}m(B_n\setminus A_n)=0$ 证明：E为可测集

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty}m(B_n\setminus A_n)=0$ 及 $m^*(B_n\setminus E)\leq m(B_n\setminus A_n)$ 有

$\lim\limits_{n\to\infty}m^*(B_n\setminus E)=0$

由 $E\subset B_n$ 故 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}B_k$

从而 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(B_k\setminus E)\right)=\lim_{n\to\infty}m^*\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}(B_k\setminus E)\right)$

$\leq \lim_{n\to\infty} m^*(B_n\setminus E)=0$

故 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(B_k\setminus E)$ 可测 从而 $E=\underline{\lim}_{n\to\infty}(B_n\setminus E)\setminus\underline{\lim}_{n\to\infty}B_n$ 可测

四. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 可测. 若 f_n. f 在 E 上 a.e 有限的可测函数. $\forall\delta>0$. 存在可测集 $E_\delta\subset E$, $m(E\setminus E_\delta)<\delta$, 且 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f. 证明: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f

证明: $x\in\{f_n\nrightarrow f\}$

$\Leftrightarrow \exists k\in N_+\ \forall N\in N_+\ \exists n\geq N \quad |f_n-f|\geq\frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|f_n-f|\geq\frac{1}{k}\}$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|f_n-f|\geq\frac{1}{k}\}$

对 $\delta=\frac{1}{m}$, $\exists E_{\delta_m}\subset E$ $m(E\setminus E_{\delta_m})<\frac{1}{m}$, f_n 在 E_{δ_m} 上一致收敛于 f. 则

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|f_n-f|\geq\frac{1}{k}\}\subset E\setminus E_{\delta_m}$$

即 $m\left(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|f_n-f|\geq\frac{1}{k}\}\right)\leq m(E\setminus E_{\delta_m})<\frac{1}{m}$

故 $m\left(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|f_n-f|\geq\frac{1}{k}\}\right)=0$

从而 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|f_n-f|\geq\frac{1}{k}\}\right)=0$

故 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f

五. 设 $E\subset R$ 且 $m(E)<\infty$, 若 f_n, f, h 为 E 上 a.e. 有限的可测函数且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 f. 证明: $\{f_n h\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 fh

证明: 对 $\forall \sigma>0, \varepsilon>0$

由于 h a.e. 有限, 则有 $M>0$ 使 $m(\{|h|\geq M\})<\varepsilon$

而 $m(\{|f_n h-fh|\geq\sigma\})$

$=m(\{|f_n-f||h|\geq\sigma, |h|\geq M\})+$

$m(\{|f_n-f||h|\geq\sigma, |h|<M\})$

$\leq \varepsilon+m(\{|f_n-f|\geq\frac{\sigma}{M}\})$

由 $f_n \overset{m}{\Rightarrow} f$ 故 $\exists N\ \forall n\geq N\quad m(\{|f_n-f|\geq\frac{\sigma}{M}\})<\varepsilon$

故 $m(\{|f_n h-fh|\geq\sigma\})\leq 2\varepsilon$

从而 $f_n h\Rightarrow fh$ $\quad$ ($m(E)<\infty$?)

六. 设 E 为 R 上可测集且 $m(E)>0$. 设 f 为 E 上的 Lebesgue 可积函数. 若对于任何有界函数 φ 都有 $\int_E f(x)\varphi(x)dm=0$ 证明: f 在 E 上几乎处处为 0

证明: 取 $f_m=f\cdot\chi_{\{|f|\leq m\}}\quad m\in N_+$

则 $|f_m|\leq m$ 为有界可测函数

故 $\int_E f(x)f_m(x)dm=0=\int_E f^2(x)\chi_{\{|f|\leq m\}}dm$

由Levi定理

$\lim\limits_{m\to\infty}\int_E f^2(x)\chi_{\{|f|\le m\}}dm=0=\int_E f^2(x)dx \quad m(E)>0$

故 $f^2(x)=0$ a.e. $\Leftrightarrow f(x)=0$ a.e.

七、设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集，f 为 E 上的几乎处处有限的非负可积函数，对于 $n\in\mathbb{N}$，令函数 f_n 为：$|f(x)|\le n$ 时 $f_n(x)=f(x)$，$|f(x)|>n$ 时 $f_n(x)=0$ 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm=\int_E f(x)dm$$

证明：易知 $f_n\uparrow f$ 由Levi定理结论成立

2020-2021 (A)

一、直线上点集A，若A中任意两点距离大于1，求证A为至多可数集

证明：$\forall x\in A$，$B(x,\frac{1}{2})$ 中无除x外的点，可作单射 f：$f(x)=B(x,\frac{1}{2})$，$\{B(x,\frac{1}{2})\}\subset\{\mathbb{R}$中不交开集全体$\}$

而后者为可数集 故A至多可数

二、设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 R 中一集族. 且 $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) < +\infty$,
证明 $m^*(\varlimsup_{n\to\infty} E_n) = 0$

证明: $m^*(\varlimsup_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k)$

$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m^*(E_k) = 0$

三、集合 A, B, C 满足 $m(A\Delta B) = m(B\Delta C) = 0$, 证明: $m(A\Delta C) = 0$

证明: $m[(A\Delta B)\setminus(B\Delta C)] \leq m(A\Delta B) = 0$

$m[(B\Delta C)\setminus(A\Delta B)] \leq m(B\Delta C) = 0$

$m(A\Delta C) = m([(A\Delta B)\setminus(B\Delta C)] \cup [(B\Delta C)\setminus(A\Delta B)])$

$\leq 0 + 0 = 0$

故 $m(A\Delta C) = 0$

四、可测集 E, 一列可测函数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛到 f, 证明: $\{|f_n|\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛到 $|f|$.

证明: $\forall \sigma > 0$

$m(\{||f_n| - |f|| \geq \sigma\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \sigma\}) \to 0 \ (n\to\infty)$

五、函数 f 在 $[a,b]$ 上可微，求证 f' 在 $[a,b]$ 上可测

证明：$f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 可测

六、可测集 E，$m(E)<\infty$，一单增可测集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=E$。证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f\,dm=\int_E f\,dm$

证明：$f\in L(E)$

$\int_{E_n}f\,dm=\int_E f\cdot\chi_{E_n}\,dm$ $\quad f\cdot\chi_{E_n}\to f\cdot\chi_E\ (n\to\infty)$

而 $|f\cdot\chi_{E_n}|\le|f|\in L(E)$ 由控制收敛定理

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f\,dm=\int_E f\,dm$

七、一可测集列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$，f 为一恒正可测函数，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f\,dm=0$ 证明：$\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$

应为证明 $m(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=0$

反例

$E_k=[k,k+1)$ $\quad f=\frac{1}{k}\chi_{[k,k+1)}$

则 $\int_{E_k}f\,dm=\frac{1}{k}\to 0\ (k\to\infty)$

但 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=1$。条件不充分

若考虑所有满足的 $\{E_k\}$，则 ϕ 也满足，取 $E_{k_n}=\phi$ 即可，过于平凡

证明：$f\in L(E_k)$ 记 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. $f\in L(\Omega)$

$$\int_{E_k} f\,dm=\int_\Omega f\cdot\chi_{E_k}\,dm$$

而 $|f\cdot\chi_{E_k}|\le|f|\in L(\Omega)$ 及控制收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f\cdot\chi_{E_k}\,dm=\int_\Omega\lim_{k\to\infty}f\cdot\chi_{E_k}\,dm$$

而 $\lim\limits_{k\to\infty}\chi_{E_k}=\chi_{\lim\limits_{k\to\infty}E_k}$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega f\cdot\chi_{E_k}\,dm=0=\int_{\lim\limits_{k\to\infty}E_k}f\,dm$

而 $f\ge 0\Rightarrow m(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=0$

2019-2020 (B)

一、设 G_1 与 G_2 为 R 中两个稠密开集. 证明：$G_1\cap G_2$ 仍在 R 中稠密

证明：设 S 为 R 中开集，由 $\overline{G_1}=R$ 故 $S\cap G_1\ne\phi$

取 $x\in S\cap G_1$，由 $S\cap G_1$ 为开集，故有 $r_1>0$

$$S_1=B(x,r_1)\subset S\cap G_1$$

而 $\overline{G_2}=R$ 故 $S_1\cap G_2\ne\phi$

从而有 $y\in S_1\cap G_2\subset S\cap G_1\cap G_2$

故 $S\cap(G_1\cap G_2)\ne\phi$ 从而 $G_1\cap G_2$ 在 R 中稠密

二、设A_n为$[0,1]$中的可测子集，若$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) > n-1$，证明：$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$

记$A=[0,1]$

$$m(A\setminus\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = m(\bigcup_{i=1}^{n} A\setminus A_i)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} m(A\setminus A_i) = n-\sum_{i=1}^{n} m(A_i) < 1$$

故$m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$

三、证明：R上的单调函数为可测函数

证明：考虑R上增函数$f(x)$

$\forall a\in R$ 记 $x=\sup\{f(x)<a\}\leq+\infty$

则 $\{f(x)<a\}=(-\infty,x)$ 可测

故$f(x)$为可测函数

四、设$f\in BV[a,b]$，$g\in Lip(-\infty,+\infty)$ 证明：$g\circ f\in BV[a,b]$

证明：对$[a,b]$上的网 $X=\{x_k\}_{k=0}^{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} |g(f(x_i))-g(f(x_{i-1}))|$$
$$\leq L\sum_{k=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \leq L\,T_a^b(f) < +\infty$$

故$g\circ f\in BV[a,b]$

五、设函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在可测集E上依测度收敛于f，且对于任意$n\in N$有

$$f_n(x)\le f_{n+1}(x) \quad a.e \quad x\in E$$

证明：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上 a.e. 收敛于$f(x)$

证明：由 Riesz 定理 $\exists\{f_{n_k}\}$ $f_{n_k}\to f(x)$ a.e.

而$f_n\le f_{n+1}$ 故结论得证

六、证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}dx=1$

证明：记$I=I_1+I_2$

$$I_1=\int_0^1(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}dx$$

$$I_2=\int_1^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}dx$$

$x\in(0,1)$时 $\left|(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\right|\le 1\in L(0,1)$

$x\in(1,\infty)$时 取$n\ge 2$有$\left|(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\right|\le(1+\frac{x}{2})^{-2}\in L(1,\infty)$

取$f=\chi_{(0,1)}+(1+\frac{x}{2})^{-2}\chi_{(1,\infty)}$

则$\left|(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\right|\le f\in L(0,\infty)$

由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}I=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1$$

七. 设f为定义在$[1,+\infty)$上的可测函数,且对于任一正整数n, $f\in L[n,n+1)$, 取 $a_n=\int_n^{n+1} f\,dm$

(1) 证明: 若 $f\in L[1,+\infty)$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

(2) 举例说明 (1) 的逆命题不成立

(1) 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_n^{n+1} f\,dm\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}|f|\,dm$$

$$=\int_1^{\infty}|f|\,dm < \infty$$

(2) $f(x)=\chi_{[n,n+1)}\left(x-\frac{2n+1}{2}\right)$ $\quad n\in N_+$

则 $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = 0 < \infty$ 但

$\int_1^{k}|f|\,dm = \frac{k}{8} \to +\infty \ (k\to+\infty)$

2019~2020 (C)

一. 证明 $R^2 \sim I=\{(x,y): 0<x<1,\ 0<y<1\}$

证明: 作双射 $f: I \to R^2$

$$(x,y) \to \left(\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right), \tan\left(\pi y-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

二. 定义在R上的单调函数f, 其不连续点为至多可数集

证明: 设x为增函数f的间断点,

则$\{(f(x-0), f(x+0))\}$为不相交的开区间全体之子集，而不相交开区间全体为可数集 而x与$(f(x-0), f(x+0))$的对应是一一的，故不连续点也为至多可数的

三. 设$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$为R中一列可测集，若存在$x\in R$使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{m(E_n\cap(x-\varepsilon, x+\varepsilon))}{2\varepsilon}=1$$

对于$\forall n$成立，证明：$\{E_n\}$中任意有限多个集合的交均不为零测集

证明：

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{n}E_k\right)\geq m\left((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap\bigcap_{k=1}^{n}E_k\right)$$

取ε使 $m(E_n\cap(x-\varepsilon, x+\varepsilon))>\lambda(2\varepsilon)$ $\quad \lambda>1-\frac{1}{2n}$

则 $m((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\setminus E_n)<(1-\lambda)(2\varepsilon)$

$$\Rightarrow m\left((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\setminus\bigcap_{k=1}^{n}E_k\right)$$

$$=m\left(\bigcup_{k=1}^{n}(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\setminus E_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}(1-\lambda)(2\varepsilon)=n(1-\lambda)(2\varepsilon)$$

$$<\varepsilon$$

则 $m\left((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap\bigcap_{k=1}^{n}E_k\right)$

$$=m\left((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\setminus\left[(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\setminus\bigcap_{k=1}^{n}E_k\right]\right)>\varepsilon$$

故 $m\left(\bigcap_{k=1}^{n}E_k\right)>\varepsilon>0$

四、设 $f \in C(R)$，g 为 R 上可测函数，证明 $g \circ f$ 为可测函数

证明：$\forall a \in R$，连续函数开集的逆像为开集，再由开集构成原理可知

$$\{g \circ f(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n < f(x) < b_n\} \text{ 可测}$$

故 $g \circ f$ 为可测函数

五、设 $f \in L(E)$ 证明：对 $\forall \lambda > 0$ 有

$$m(\{|f| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E |f| dm$$

证明：$m(\{|f| > \lambda\})$

$$= \int_{\{|f| > \lambda\}} 1 dm \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{|f| > \lambda\}} |f| dm$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \int_E |f| dm$$

六、设 E 为可测集，$m(E) < +\infty$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上一列几乎处处收敛有限可测函数，若 $\lim_{n \to \infty} \int_E |f_n| dm = 0$

证明：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上测度收敛到 0

证明：$\forall \sigma > 0$

$$m(\{|f_n| \geq \sigma\}) \leq \frac{1}{\sigma} \int_E |f_n| dm \to 0 \quad (n \to \infty)$$

七. 证明: $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{e^t-x}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2+1}\quad -1\le x\le 1$

证明: $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{e^t-x}dt=\int_0^{\infty}e^{-t}\sin t\cdot\frac{1}{1-xe^{-t}}dt$

$=\int_0^{\infty}e^{-t}\sin t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-t})^n dt$

$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\int_0^{\infty}e^{-(n+1)t}\sin t\,dt$

$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\frac{1}{(n+1)^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2+1}$

$|f_n|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e^t}(xe^{-t})^k=\frac{1}{e^t-x}$

取ε充分小

$$f=\begin{cases}2 & t\in(0,\varepsilon)\\ \frac{1}{e^t-x} & t\in(\varepsilon,+\infty)\end{cases}$$

则 $|f_n|\le f\in L(0,\infty)$ 控制收敛定理保证了积分与求和换序的合理性

2019-2020 (A)

一. 证明集合A为不可数集 $\Leftrightarrow$ A为无限集且对A的任意可数子集B，A与$A\setminus B$对等

证明:

必要性：无限集显然

记 $C=A\setminus B$ 则 $A=C\cup B$

下面构造 $C\to C\cup B$ 的双射

取C的可数子集 $D=\{a_n\}$，则 $B\cup D$为可数集

设 $B\cup D=\{b_n\}$ $\quad C\cup B=(C\setminus D)\cup(B\cup D)$

则 f: $\quad D\to B\cup D$

$\quad\quad a_n\to b_n$

在 $C\setminus D$ 上 $f(x)=x$ 即可. 易知其为双射

充分性: 若A可数. 取 $B=A$. $A\setminus B=\phi$ 显然与A不对等. 故A不可数

二. 设A为R中可测集. B为R中另一集合. 若A中所含无理数与B中所含无理数完全相同. 证明: B也为可测集且 $m(A)=m(B)$

证明: $A\cap Q^c=B\cap Q^c$ ，由于A可测. 故 $A\cap Q^c$可测

从而 $B\cap Q^c$ 可测

而 $m^*(B\cap Q)\leq m(Q)=0$ 故 $B\cap Q$ 零测

从而 $B=B\cap(Q\cup Q^c)=(B\cap Q^c)\cup(B\cap Q)$ 可测且

$$m(B)=m(B\cap Q^c)+0=m(A\cap Q^c)=m(A)-0$$

三. 设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 R 中一列可测集且 $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)<+\infty$

证明: $\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n$ 为零测集

证明: 由Borel-Cantelli引理即得

四. 设 $f(x)$ 为可测集 E 上有界可测函数. 证明: 存在一列定义在 E 上的简单函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\{\varphi_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f

证明: $f=f^+-f^-$

对 f^+, 设 $\varphi_k^+=\begin{cases}\frac{i-1}{2^k} & \frac{i-1}{2^k}\leq f^+<\frac{i}{2^k}\quad (i=1\cdots k2^k)\\ k & f^+\geq k\end{cases}$

f^- 设 $\varphi_k^-=\begin{cases}\frac{i-1}{2^k} & \frac{i-1}{2^k}\leq f^-<\frac{i}{2^k}\quad (i=1\cdots k2^k)\\ k & f^-\geq k\end{cases}$

设 $|f|\leq M$ 则 $f^+\leq M$ $f^-\leq M$

$k>M$ 时 $|f^+-\varphi_k^+|<\frac{1}{2^k}$ $|f^--\varphi_k^-|<\frac{1}{2^k}$

故 $|f-\varphi_k| < \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0 \ (k\to\infty)$

故 $\varphi_k \rightrightarrows f \quad x\in E$

五. 设 $f\in L(E)$，若对任意可测集 $E_0\subset E$ 有 $\int_{E_0} f\,dm = 0$ 证明：$f=0$ a.e. 于 E

证明：取 $E_0=\{f>0\}$ 与 $\{f<0\}$ 由 $\int_{E_0} f\,dm=0$ 知

$$m(\{f>0\}) = 0 = m(\{f<0\})$$

故 $f=0$ a.e. 于 E

六. 若在可测集 E 上，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 f，若有 $\sup\limits_{n\in N}\int_E |f_n|\,dm < \infty$ 证明：$f\in L(E)$

证明：$E_m = E\cap[-m,m]$ 由 $f_n \Rightarrow f$ 及 Riesz 定理，有 $\{f_{n_k}\}$ $f_{n_k}\to f$ a.e. 故 $f_{n_k}-f\to 0$ a.e.

则有在 $M>0$，$|f_{n_k}-f|\le M$ a.e. 于 E

$$\int_{E_m}|f|\,dm \le \int_{E_m}|f-f_{n_k}|\,dm + \int_{E_m}|f_{n_k}|\,dm$$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists K$ $\forall k>K$ 有 $|f-f_{n_k}|<\varepsilon$

则取 $\varepsilon = \frac{1}{(2m)^2}$ 有 $\int_{E_m}|f|\,dm \le \frac{1}{(2m)^2}\cdot 2m + \sup\limits_n \int_E |f_n|\,dm$

而 $\int_{E_m}|f|\,dm = \int_E |f|\,\chi_{E_m}\,dm$ 由 Levi 定理

$$\int_E |f|\,dm = \lim_{m\to\infty}\int_{E_m}|f|\,dm \le 0 + \sup_n \int_E |f_n|\,dm < \infty$$

故 $f\in L(E)$

七、设 E 可测，$m(E)<+\infty$，函数 $f\in L(E)$，利用Lebesgue积分的绝对连续性证明

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot m(\{x\in E: |f(x)|>n\})=0$$

证明：$n\cdot m(\{x\in E: |f(x)|>n\})$

$$= n\int_{\{|f|>n\}} 1\,dm < \int_{\{|f|>n\}} |f|\,dm$$

而 $f\in L(E)$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta$ $m(A)<\delta$ $\int_A |f|\,dm<\varepsilon$

故对 $\delta>0$，$\exists n_0$ 使 $m(\{|f|>n_0\})<\delta$

从而 $\int_{\{|f|>n_0\}} |f|\,dm<\varepsilon$

故 $\lim_{n\to\infty} n\cdot m(\{x\in E: |f|>n\})=0$

2018~2019 (A)

一、证明：可数集的所有有限子集组成的集合为可数集

证明：记 $\mathcal{A}_n$ 为 A 的所有 n 元子集全体. $\mathcal{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$

由 A 为可数集. 故 A^n 为可数集

$$T:\ \mathcal{A}_n \to A^n$$

$$\{a_1,\cdots,a_n\} \to (a_1,\cdots,a_n)$$

易知其为单射 故 $\mathcal{A}_n$ 可数. 从而 $\mathcal{A}$ 为可数集

二、设 A, B 为 R 中外测度有限的两个集合、证明：

$$|m^*(A)-m^*(B)| \le m^*(A\Delta B)$$

证明： $m^*(A)-m^*(B) \le m^*(A\setminus B) \le m^*(A\Delta B)$

$m^*(B)-m^*(A) \le m^*(B\setminus A) \le m^*(A\Delta B)$

故结论成立

三、设 E 为实数 R 的子集. 则 E 可测当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$ 使 $m(G\setminus F)<\varepsilon$

证明：必要性：

$\forall\varepsilon>0$、由 E 可测. 存在开集 G 与闭集 F

$$F\subset E\subset G$$

$m(G\setminus E)<\frac{\varepsilon}{2}$, $m(E\setminus F)<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $m(G\setminus F)=m((G\setminus E)\cup(E\setminus F))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

充分性：

取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$ 则有 G_n. F_n $\quad F_n\subset E\subset G_n\quad m(G_n\setminus F_n)<\frac{1}{n}$

$$m^*(G_n\setminus E)\leq m(G_n\setminus F_n)<\frac{1}{n}$$

取 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\supset E$

$$m^*(G\setminus E)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\setminus E)\leq m(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}$$

令 $n\to\infty$ 有 $m^*(G\setminus E)=0\Rightarrow G\setminus E$ 可测

$\Rightarrow E=G\setminus(G\setminus E)$ 可测

四. 设 $E\subset R$ 可测. 则 f 在 E 上可测 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 开集 $G\subset R$, $f^{-1}(G)$ 可测

证明：$\Rightarrow$ 对 $(a.b)$ $\{a<f<b\}$ 可测

由构造原理 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n<f<b_n\}\text{ 可测}$$

$\Leftarrow$ $\forall a\in R$ 由 $(-\infty,a)$ 为开集. 故 $\{f<a\}$ 可测

从而 f 可测

五. $m(E)<\infty$ 且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上实值可测函数列. 则 $f_n \Rightarrow f \Leftrightarrow \forall$ 子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ 使 $f_{n_{k_i}} \to f$ a.e.

证明: $\Rightarrow$ 由Riesz定理是显然的

$\Leftarrow$ 用反证法. 若 $f_n \not\Rightarrow f$, 则 $\exists \sigma>0$ 及 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty} m(\{|f-f_{n_k}|\geq\sigma\}) = \alpha > 0$$

而 $\{f_{n_k}\}$ 有子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 使 $f_{n_{k_i}} \to f$ a.e.

作为子列应有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{|f-f_{n_{k_i}}|\geq\sigma\}) = \alpha > 0$$

但 $m(E)<+\infty$ 由Lebesgue定理 $f_{n_{k_i}} \Rightarrow f$ 矛盾

六. 设 $m(E)<\infty$, $f\in L(E)$, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单增可测集且 $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dm = \int_E f\,dm$$

证明: $\int_{E_n} f\,dm = \int_E f\cdot \chi_{E_n}\,dm$

而 $|f\chi_{E_n}| \leq |f| \in L(E)$ $\quad \chi_{E_n} \uparrow \chi_E$

由控制收敛定理即得

七、设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列非负可积函数且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm=0$$

则 $f_n \rightrightarrows 0$.

证明：由Markov不等式．$\forall \sigma>0$

$$m(\{|f_n|\geq\sigma\})\leq\frac{1}{\sigma}\int_E|f_n|\,dm$$

$$=\frac{1}{\sigma}\int_E f_n\,dm\to 0\quad(n\to\infty)$$

故 $f_n \rightrightarrows 0$

2017-2018(B)

一、设 $A_{2m+1}=[0,2-\frac{1}{2m+1}]$．$A_{2m}=[0,1+\frac{1}{2m}]$

求 $\underline{\lim}_{m\to\infty}A_m$ 与 $\overline{\lim}_{m\to\infty}A_m$

$$\underline{\lim}_{m\to\infty}A_m=\lim_{n\to\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=[0,1]$$

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}A_m=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=[0,2)$$

二、证明：由直线上互不相交的开区间为集合A的元素，则A为至多可数的

证明：由 $\overline{Q}=R$ 对 (a,b) 有 $x_q\in Q\cap(a,b)$

由于开区间不相交，故各个开区间对应的 x_q 不等

于是便有了由开区间到Q的单射，而Q为可数集

故A为至多可数的

三. 设 $0<m^*(E)<\infty$ 证明：$\forall\alpha\in(0,1)$ 存在开区间 I 使 $m^*(E\cap I)>|\alpha||I|$

证明：用反证法. 若有 $\alpha\in(0,1)$，$\forall$ 开区间 I

$$m^*(E\cap I)\leq|\alpha||I|$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 开区间列 I_n 使 $E\subset\bigcup I_n$ 且

$$\sum|I_n|-\varepsilon\leq m^*(E)\leq\sum|I_n|$$

而 $m^*(E)=m^*(E\cap(\bigcup I_n))=m^*(\bigcup(E\cap I_n))$

$$\leq\sum m^*(E\cap I_n)\leq\sum|\alpha||I_n|$$

$$=|\alpha|\sum|I_n|\leq|\alpha|(m^*(E)+\varepsilon)$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 有 $m^*(E)\leq|\alpha|m^*(E)$

而 $\alpha\in(0,1)$ $m^*(E)\in(0,\infty)$ 矛盾

四. 构造 $[a,b]$ 上的可测函数 f，使对于 $[a,b]$ 上任意连续函数，$m(\{f\neq\varphi\})>0$

$f(x)=\chi_{[\frac{a+b}{2},b]}(x)$ 若 $m(\{f=\varphi\})=0$

$f\in[0,1]$，则 $\varphi\in[0,1]$ 否则 由 $\varphi\in C[a,b]$，必有小区间 e 使 $\varphi(e)\notin[0,1]$ 从而 $m(\{f\neq\varphi\})\geq m(e)>0$

由介值性，$\varphi^{-1}((0,1))$ 非空

由连续性 $\varphi^{-1}((0,1))$ 为开集.

故 $m(\{f\neq\varphi\})\geq m(\varphi^{-1}(0,1))>0$ 矛盾

五. 设 $E\subset R$, 且 $m(E)<+\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上一列可测函数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty$ a.e. 于 E, 证明: $\forall\delta>0$, 存在可测集 $\varepsilon\subset E$, $m(\varepsilon)<\delta$ 使 $f_n \rightrightarrows +\infty$ $x\in E\setminus\varepsilon$

证明: $\{f_n \nrightarrow +\infty\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n\le k\}$

而 $m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{f_n\le k\})$

$= \lim\limits_{N\to\infty} m(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n\le k\}) \le m(\{f_n \nrightarrow +\infty\})=0$

故 $\lim\limits_{N\to\infty} m(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n\le k\})=0$

则有 N_0 $\forall N\ge N$ $m(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n\le k\})\le \frac{\delta}{2^k}$

从而 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n\le k\}) \le \sum \frac{\delta}{2^k} = \delta$

取 $\varepsilon=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n\le k\}$

$\{f_n\rightrightarrows+\infty\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{f_n>k\}=E\setminus\varepsilon$ 从而结论成立

六. 求 $\int_E e^{-[x]}dm$ $E=[0,+\infty)$

$I=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-n}dm=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}=\frac{e}{e-1}$

七. 设 f, f_n 为可测集 E 上的可测函数, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n|dm=\int_E|f|dm$ 证明: 对 E 中任意可测子集 e, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e|f_n|dm=\int_e|f|dm$$

证明：由 Fatou' lemma

$$\int_e |f|\,dm \le \varliminf_{n\to\infty} \int_e |f_n|\,dm$$

而 $\int_e |f|\,dm = \int_E |f|\chi_e\,dm$

$|f_n| - |f_n|\chi_e \ge 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n| - |f_n|\chi_e = |f| - |f|\chi_e$

由 Fatou' lemma

$$\int_E |f| - |f|\chi_e\,dm \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E |f_n| - |f_n|\chi_e\,dm$$

$$= \int_e |f|\,dm - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E |f_n|\chi_e\,dm$$

故 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \int_e |f_n|\,dm \le \int_e |f|\,dm$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_e |f_n|\,dm = \int_e |f|\,dm$

2018-2019 (B)

一. 证明：至多可数个至多可数集之并仍为至多可数集

证明：$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad A_n = \{x_{n,j}\}$

$$\begin{array}{cccc}
x_{1,1} & x_{1,2}, & x_{1,3}, & \cdots \\
x_{2,1} & x_{2,2}, & x_{2,3} & \cdots \\
x_{3,1}. & x_{3,2}, & x_{3,3} & \cdots \\
\cdot & - & - & -
\end{array}$$

按照上图方式排列即可. 若某 $x_{i,j}$ 不存在，则跳过

二、设 E 为实数集 R 的子集，则 E 为可测集当且仅当 $\forall A\subset E, B\subset E^c$ 有

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$$

证明：若 E 可测

$$m^*(A\cup B)=m^*((A\cup B)\cap E)+m^*((A\cup B)\cap E^c)$$
$$=m^*(A)+m^*(B)$$

反之，$\forall T=(T\cap E)\cup(T\cap E^c)$

$T\cap E\subset E$ $\quad T\cap E^c\subset E^c$ 故

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

Caratheodory 条件满足 故 E 可测

三、设 f 在 $[a,b]$ 上可微，证明：$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测

证明：$f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$ 故可测

四、设 $m(E)>0$，$f(x), g(x)\in L(E)$ $f(x)<g(x)$，证明：

$$\int_E f\,dm<\int_E g\,dm$$

证明：$g-f>0$ $\forall x\in E$

若 $\int_E g-f\,dm=0$

则 $m(\{g-f>\frac{1}{k}\})\leq k\int_E g-f\,dm=0$

从而 $m(E)=m(\{g-f>0\})$

$$=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{g-f>\tfrac{1}{k}\}\right)$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}m(\{g-f>\tfrac{1}{k}\})=\sum_{k=1}^{\infty}0 \Rightarrow m(E)=0$$

矛盾

五、设 $E\subset R$ 为正测集，则存在 $x_1, x_2\in E$ 使 $|x_1-x_2|\in Q^c$

证明：E 为无限集，若 $\forall x_1, x_2\in E$ $|x_1-x_2|\in Q$

取 $x_0\in E$，则 $\forall x\in E$ 有 $x-x_0\in Q$

从而 $x\in Q+\{x_0\} \Rightarrow E\subset(Q+\{x_0\})$

故 $m(E)\le m(Q+\{x_0\})=m(Q)=0$ 矛盾

六、设 $A, B, C\subset R$ 且

$$m^*(A\Delta B)=m^*(B\Delta C)=0$$

证明：$m^*(A\Delta C)=0$

证明：$A\Delta B$，$B\Delta C$ 为零测集 故 $m(A\Delta B\setminus B\Delta C)=0$

故 $m^*(A\Delta C)$ $m(B\Delta C\setminus A\Delta B)=0$

$=m^*\left([(A\Delta B)\setminus(B\Delta C)]\cup[(B\Delta C)\setminus(A\Delta B)]\right)$

$\le 0+0=0$

故 $m^*(A\Delta C)=0$

七. 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为可测集$E\subset\mathbb{R}$上的一列非负可积函数且$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,dm<\infty$ 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$几乎处处收敛于$f(x)$，且

$$\int_E f\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,dm$$

证明：由Levi定理

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,dm<\infty$$

故$\sum_{n=1}^{\infty} f_n<\infty$ a.e. 于E 记$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

则$\int_E f\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,dm$