第十章 多元极限与连续

$E\subseteq\mathbb{R}^n$
- 内点：x_0 在 E 内且存在 $B_\delta(x_0)$ 在 E 内
- 边界点：x_0 在 E 内，且任意 $B_\delta(x_0)$ 中既有 E 内也有 E 外的点
- 外点：x_0 在 E 外且存在 $B_\delta(x_0)$ 在 E 外

内点、边界点 $\longrightarrow$ 触点
- x_0 任一邻域内存在（除 x_0 外）在 E 中的点 $\Rightarrow$ 聚点
- x_0 任一邻域内只有 x_0 点在 E 中 $\Rightarrow$ 孤立点、

E 所有内点集合：E°（内部）

E 所有边界点集合：∂E（边界）

E 所有触点集合：$\overline{E}$（闭包）

E 所有聚点集合：E'（导集）

$E=E^\circ \Leftrightarrow E$ 是开集 $\Leftrightarrow E$ 中每个点是内点（存在被 E 包含的邻域）

$E=\overline{E} \Leftrightarrow E$ 是闭集 $\Leftrightarrow E$ 中任意的收敛点列，其极限均在 E 中.

既是开集也是闭集：（有且仅有）ϕ 与 $\mathbb{R}^n$

既非开集也非闭集：如半开半闭区间

开集的有限交与任意并 仍是开集

闭集的有限并与任意交 仍是闭集

E 是凸集 $\Leftrightarrow$ E 中任意两点之间，连接的线段也在 E 中

E 是连通集 $\Leftrightarrow$ E 不能分成两个非空不交的开集之并.

E 是道路连通集 $\Leftrightarrow$ E 中任意两点，可由 E 中有限多条线段相连接

E 是区域 $\Leftrightarrow$ E 是有道路连通性的开集 $\Leftrightarrow$ $\overline{E}$ 是闭区域

$\mathbb{R}^n$ 中的道路连通集必是连通集

连通集的闭包是连通集.

E 是列紧集 $\Leftrightarrow$ E 中任意点列均有收敛子点列 $\Leftrightarrow$ E 是有界闭集

E 是紧集 $\Leftrightarrow$ E 的任意开覆盖均有有限子覆盖 $\Leftrightarrow$ E 是有界闭集

$\mathbb{R}^n$ 中：有界闭 $\Leftrightarrow$ 紧 $\Leftrightarrow$ 列紧

区间套定理
- $\mathbb{R}$ 空间的完备性：cauchy 收敛准则
- 闭区间的紧性：有限覆盖定理
- 有限区间的列紧性：致密性定理.

多元极限： 重极限与累次极限无关

多元连续： $f(x)$ 在 D 一致连续 $\Leftrightarrow$ D 上任意两列，只要 $d(x_n,y_n)\to 0$ 就有 $|f(x_n)-f(y_n)|\to 0$

不一致连续 $\Leftrightarrow$ 存在 满足 且 $\not\to 0$ $(\geq \varepsilon_0)$

练习10.1

1\. (1) 记 $S_n=\{x \mid 1-\frac{1}{n}<|x|<2+\frac{1}{n}\}$. $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n=\{x \mid 1\le|x|\le 2\}$ 为闭集

(2) 记 $S_n=\{x \mid 1+\frac{1}{n}\le|x|\le 2-\frac{1}{n}\}$ $\bigcup_{n=2}^{\infty} S_n=\{x \mid 1<|x|<2\}$ 为开集

2\. $\because x_0$ 是 A 的聚点 $\therefore x_0$ 的任一邻域内均含有 A 中的点（非 x_0）.

$\therefore$ 对 $\forall n\in \mathbb{N}^*$. $\exists x_n\in A$, 且 $x_n\in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$. $\therefore 0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$

对于点列 $\{x_n\}_{n\ge1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=x_0$

3\. 证明 $\bar{A}\subseteq A\cup A'$:

对 $\forall x\in\bar{A}$. $\begin{cases}\text{若}x\text{为聚点}\Rightarrow x\in A' \\ \text{若}x\text{为孤立点}\Rightarrow x\in A\end{cases}$ $\therefore x\in A\cup A'$.

证明 $A\cup A'\subseteq\bar{A}$:

对 $\forall x\in A\cup A'$. 反设 $x\notin\bar{A}$. 即 x 是 A 的外点 $\therefore x\notin A$

且 x 存在邻域 $B_\delta(x)$. 邻域中所有点在 A 之外. $\therefore x$ 不是聚点 $\therefore x\notin A'$

$\therefore x\notin A\cup A'$. 矛盾. $\therefore x\in\bar{A}$.

4. (1) $\because A \subseteq B$

对 $\forall x \in A^{\circ}$，存在邻域 $B_{\delta}(x) \subseteq A \subseteq B$ $\therefore x \in B^{\circ}$ $\therefore A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$

对 $\forall x \in \overline{A}$，其任一邻域 $B_{\varepsilon}(x)$ 中都存在 A 的点，这些点也在 B 中 $\therefore x \in \overline{B}$ $\therefore \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(2) • 对 $\forall x \in \overline{A \cup B}$ 其任一邻域 $B_{\varepsilon}(x)$ 中都存在 $A \cup B$ 中的点 $\begin{cases} \text{若在} A \text{中}: x \in \overline{A} \\ \text{若在} B \text{中}: x \in \overline{B} \end{cases}$ $\therefore x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

对 $\forall x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } x \in \overline{A}\text{，其任一邻域中都存在 } A \text{ 中的点} \\ \text{若 } x \in \overline{B}\text{，其任一邻域中都存在 } B \text{ 中的点} \end{array} \right\}$ 这些点在 $A \cup B$ 中 $\therefore x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\therefore \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

• 对 $\forall x \in \overline{A \cap B}$，其任一邻域中都存在 $A \cap B$ 中的点，这些点既在 A 中也在 B 中 $\therefore x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$ 即 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$\therefore \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(3) • 由第(1)问中结论 $(A \subset B \Rightarrow A^{\circ} \subset B^{\circ})$

▷ $\because A^{\circ} \subseteq A$，$B^{\circ} \subseteq B$ $\therefore A^{\circ} \cap B^{\circ} \subset A \cap B$ $\therefore (A^{\circ} \cap B^{\circ})^{\circ} \subset (A \cap B)^{\circ}$

又 $\because A^{\circ} \cap B^{\circ}$ 是开集 $\therefore A^{\circ} \cap B^{\circ} = (A^{\circ} \cap B^{\circ})^{\circ} \subset (A \cap B)^{\circ}$

▷ $\because A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$ $\therefore (A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ}$，$(A \cap B)^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ $\therefore (A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$

因此 $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

• $\because A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$ $\therefore A^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$，$B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$

$\therefore A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$

5. (1) 只需证对 $\forall x\in A^{\circ}$, x 是 A° 的内点.

∵ $x\in A^{\circ}$ ∴ x 存在邻域 $B_\delta(x)\subseteq A$.

对 $\forall y\in B_\delta(x)\subseteq A$. 由于 $B_\delta(x)$ 也是 y 的邻域 ∴ y 是 A 的内点 即 $y\in A^{\circ}$ ∴ $B_\delta(x)\subseteq A^{\circ}$

∴ 对 $\forall x\in A^{\circ}$. x 的邻域 $B_\delta(x)\subseteq A^{\circ}$ ∴ x 是 A° 的内点 ∴ A° 是开集.

(2) 只需证 $\overline{(\partial A)}=\partial A$. 由于 $\overline{\partial A}=\partial A\cup(\partial A)'$. 即证 $(\partial A)'\subseteq\partial A$.

对于 ∂A 的任一聚点 x. 下证 $x\in\partial A$:

∵ x 是 ∂A 聚点 ∴ $\exists x_1\in U_\delta(x)\cap\partial E$. 其中 $U_\delta(x)=\{x\,|\,0<|x-X|<\delta\}$.

∵ $x_1\in U_\delta(x)$. 取 $\delta_1=\min\{|x-x_1|,\ \delta-|x-x_1|\}$ ∴ $U_{\delta_1}(x_1)\subseteq U_\delta(x)$

又∵ $x_1\in\partial E$ ∴ $U_{\delta_1}(x_1)$ 中既有 E 中的点也有 E 外的点 ∴ $U_\delta(x)$ 中既有 E 中点也有 E 外点.

由 $\delta>0$ 任意性. 可知 $x\in\partial A$. 即 $\overline{A}$ 是闭集

(3) ∵ $(\overline{A})'=(A\cup A')'=A'\cup(A')'\subseteq A'\subseteq\overline{A}$

由 $(\overline{A})'\subseteq\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}=\overline{A}\cup(\overline{A})'$ 知 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ ∴ $\overline{A}$ 为闭集.

(4) ∵ $A'\subseteq\overline{A'}$. 只需证 $\overline{A'}\subseteq A'$

对 $\forall x\in\overline{A'}$. 存在互不相等的 $y_n\in A'$ $(n=1,2,\cdots)$ 使 $y_n\to x$ $(n\to\infty)$

又∵ $y_n\in A'$ ∴ $\exists x_n\in A$. 使 $|x_n-y_n|<\frac{1}{2^n}$

∴ $|x_n-x|\le|x_n-y_n|+|y_n-x|\le\frac{1}{2^n}+|y_n-x|\to 0$ $(n\to\infty)$

∵ 上述 $\{x_n\}$ 均在 A 中且极限为 x ∴ x 是 A 中聚点 即 $x\in A'$

∴ $\overline{A'}\subseteq A'$ ∴ A' 是闭集.

6. 假设 $\lim\limits_{m\to+\infty}|X_m|\neq+\infty$ 则 $\exists M>0$. 对 $\forall m_0$, $\exists m>m_0$. $|X_m|\le M$.

取 $m_1'=1$. $\exists m_1>m_1'$ 使 $|X_{m_1}|\le M$

取 $m_2'=m_1$ $\exists m_2>m_2'$ 使 $|X_{m_2}|\le M$

……

构造有界子列 $\{X_{m_k}\}$. 由致密性定理，其存在收敛子列. 矛盾. $\therefore \lim\limits_{m\to\infty}|X_m|=+\infty$.

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

1. 设 $|x-2|<\delta$ $|y-3|<\delta$.

$$\because \left|\frac{3xy-y^2}{2x+5y}-\frac{9}{19}\right| = \left|\frac{57xy-19y^2-18x-45y}{19(2x+5y)}\right|$$

$$= \frac{|57(x-2)(y-3)-19(y-3)^2-273(y-3)+153(x-2)|}{|19(2x+5y)|}$$

$$\leq \frac{57\delta^2+19\delta^2+273\delta+153\delta}{19(2x+5y)} \quad (令\delta\leq 1, \therefore \delta^2\leq\delta,\ x\geq 1, y\geq 2)$$

$$\leq \frac{76\delta^2+426\delta}{19\times 12} \leq \frac{502\delta}{228} < 3\delta \quad 令 3\delta\leq\varepsilon \ \therefore \delta\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

取 $\delta=\min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

$\therefore$ 对 $\forall\, \varepsilon>0$, 在 $|x-2|<\delta$ $|y-3|<\delta$ 时

有 $|f(x,y)-\frac{9}{19}|<\varepsilon$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} f(x,y)=\frac{9}{19}$$

2. (1) 按照 $y=x$ 路径 $\to(0,0)$ 时，原式 $=\lim \frac{x}{-x}=-1$

$y=-x$ $\to(0,0)$ 时 原式 $=\lim \frac{5x}{5x}=1$

∴ 极限不存在.

(2) $0\le\left|\frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|=|y|\to 0$ ∴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$ 原式 $=0$

(3) 按照 $y=0$ 路径 $\to(0,0)$ 时，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

$y=x$ 路径 $\to(0,0)$ 时，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{\sqrt{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^x}{\sqrt{2}(x+e^x)}=\sqrt{2}$

∴ 极限不存在

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x+y)=\lim\limits_{t\to 0}t\ln t=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0}-t=0$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\le|x||y|\to 0$ ∴ 原式 $=0$

(6). 取路径 $y=x$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{2} = 0$.

取路径 $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2(x^4-x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^4} = \lim\limits_{x\to0} \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1$.

$\therefore$ 极限不存在.

(7) 设 $u=\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

$\therefore \ln u = \frac{x^2}{x+y}\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) = \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) \triangleq f(x,y)$.

$\therefore \frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} \le f(x,y) \le \frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{y}{x}$.

即 $\frac{x^2y}{(x+y)^2} \le f(x,y) \le \frac{xy}{x+y}$ 也即 $\frac{y}{1+\frac{2y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \le f(x,y) \le \frac{y}{1+\frac{y}{x}}$

容易证明 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to2}} \frac{y}{x} = 0$ $\therefore \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to2}} \frac{y}{1+\frac{2y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to2}} \frac{y}{1+\frac{y}{x}} = 2$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to2}} f(x,y) = 2$ $\therefore$ 原式 $=e^2$

(8) $0 \le \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \left|\frac{xyz}{3\cdot\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}\right| = \left|\frac{\sqrt[3]{xyz}}{3}\right|$ 当 $|x|、|y|、|z| < 3\varepsilon = \delta$ 时.

对 $\forall\varepsilon>0$. 上式 $<\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x,y,z\to0} \frac{\sqrt[3]{xyz}}{3} = 0$ $\therefore \lim\limits_{x,y,z\to0}$ 原式 $=0$

南開大學 作业纸

系别__________ 班级__________ 姓名__________ 第 页

3. (1) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f = \lim\limits_{x\to0}\frac{0}{x^2}=0$ $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f=\lim\limits_{y\to0}\frac{0}{y^2}=0$

(2) 按 $y=x$ 路径: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1$

按 $y=-x$ 路径: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+4}=0$ 极限不存在

4. 对任意固定的 $y_0\neq0$. $f(x,y_0)=\frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$ 关于 x 连续.

对任意固定的 $x_0\neq0$、 $f(x_0,y)=\frac{x_0y}{x_0^2+y^2}$ 关于 y 连续

沿 $y=x$ 趋近 $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$

沿 $y=-x$ 趋近 $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=-\frac{1}{2}$ ∴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在 ∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

5. 取点列 $(n,\frac{\pi}{2n}):\{x_1\}$ $(n,\frac{\pi}{n}):\{x_2\}$

$d(x_1,x_2)=\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}\to0\ (n\to\infty)$

而 $f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)=1-0\not\to0$ ∴ $f(x,y)=\sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上不一致连续.

南開大學 作业纸

系别________ 班级______ 姓名________ 第 页

练习10.3

1. 对任意的 $r>0$. 令 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}$

$\because$ S是有界闭集 且 $f(x,y)$ 在 S 上连续 $\therefore f(x,y)$ 在 S 上存在最小值 m.

$\because \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$ $\therefore$ 对上述的 m, $\exists r_1>r$ 当 $x^2+y^2>r_1^2$ 时, $f(x,y)>m$

令 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le r_1^2\}$ $\because$ D是有界闭集且 $f(x,y)$ 在 D 上连续 $\therefore f(x,y)$ 在 D 上存在最小值 m'

$\because r_1>r$ $\therefore S\subseteq D$ $\therefore m'\le m$. $\therefore x^2+y^2>r_1^2$ 时 $f(x,y)>m\ge m'$

$\therefore m'$ 是 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2=D\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2>r_1^2\}$ 上的最小值.

南開大學 作 业 纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

习题10

1. $\because d(X,A)=\inf_{X\in A}|X-Y|$. $\therefore \exists Y_n\in A\ (n=1,2,\cdots)$ 使 $\lim_{n\to\infty} d(X,Y_n)=d(X,A)$.

由此知 $d(X,Y_n)$ 有界. 由 $|Y_n|\le|Y_n-X|+|X|=d(X,Y_n)+|X|$ 知 $|Y_n|$ 有界.

因此, 由 Bolzano-Weilstrass 定理知 $\{Y_n\}$ 存在收敛子点列 $\{Y_{n_k}\}$. 记 $\lim_{k\to\infty}Y_{n_k}=Y$.

$\because A$ 是闭集 $\therefore Y\in A$.

注意到 $\lim_{k\to\infty}d(Y,Y_{n_k})=0$ 且 $|d(X,Y_{n_k})-d(X,Y)|\le d(Y,Y_{n_k})$ $\therefore \lim_{k\to\infty}d(X,Y_{n_k})=d(X,Y)$

$\therefore d(X,A)=\lim_{n\to\infty}d(X,Y_n)=\lim_{k\to\infty}d(X,Y_{n_k})=d(X,Y)$. 其中 $Y\in A$.

2. 记 $f(X)=d(X,B)=\inf_{Y\in B}d(X,Y)$. 由例4 (课本 p25) 知 $f(X)$ 在 A 上 Lipschitz 连续

$\therefore f(X)$ 在 A 上一致连续, 进而 $f(X)$ 在 A 上连续.

不妨设 A 是紧集, 即 A 有界. 由有界闭集上连续函数性质 $f(X)$ 在 A 上存在最小值 $f(X_0)$.

$\therefore f(X_0)=d(X_0,B)=\inf_{Y\in B}d(X_0,B)\ge 0$.

若 $f(X_0)=0$ 则 X_0 只能是 B 的聚点. 又 $\because B$ 是闭集 $\therefore X_0\in B$. 与 $A\cap B=\phi$ 矛盾.

$\therefore f(X_0)>0$ $\because \min_{X\in A}f(X)=f(X_0)>0$ $\therefore d(A,B)>0$

<反例> 取 $A=\{(x,y)\mid y\ge\frac{1}{x},\ x>0\}$ $B=\{(x,y)\mid y=0\}$

A 与 B 均为闭集 且 $A\cap B=\phi$. 但由于 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 知 $d(A,B)=0$

(关键在于: 此时的 A 与 B 均无界 因此上述 >0 性质不再成立)

3. 取 $x_k \in S_k$ $(k=1,2,\cdots,m,\cdots)$ 构造点列 $\{x_k\}$. $\because \{x_k\} \subseteq S_1$ 而 S_1 有界.
由Bolzano-Weierstrass定理 $\{x_k\}$ 存在收敛子点列 $\{x_{m_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$.
对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $k \geq n$ 时. $\because m_k \geq k$ $\therefore x_{m_k} \in S_{m_k} \subseteq S_k \subseteq S_n$ 即 x 是 S_n 的聚点
又 $\because S_n$ 是闭集 $\therefore x \in S_n$. $\because$ 对 $\forall n$, $x \in S_n$ $\therefore x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n \neq \phi$.

<反例> 令 $S_m = \{(x,y) \mid y \geq m\}$. S_m 为非空闭集、不存在 $x_0 \in S_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \phi$

4. $f(x,y,z) \leq f(\infty,\infty,z) = g(z)$.
$f(x,y,z) \leq f(x,\infty,\infty) = h(x)$.
由极限保号性. $g(z)$、$h(x)$ 分别对 z、x 递增.
$\because g(z) \to a$ $(z\to\infty)$ $\therefore g(z) \leq a$ 且 $h(x) \leq \lim\limits_{x\to\infty} h(x)$.
$\because \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = a$ $\therefore \forall \varepsilon>0, \exists z_0, z>z_0$ 时 $|g(z)-a| < \varepsilon$
由于 $g(z) \leq a$ $\therefore a - g(z_0+1) < \varepsilon$ ①

$\because \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,y,z) = g(z)$ $\therefore \forall \varepsilon>0$ $\exists x_0, y_0$. $x>x_0, y>y_0$ 时. $|f(x,y,z_0+1) - g(z_0+1)| < \varepsilon$
由于 $f(x,y,z) \leq g(z)$ $\therefore g(z_0+1) - f(x,y,z_0+1) < \varepsilon$.

①+② $\Rightarrow$ $x>x_0, y>y_0$ 时. $f(x,y,z_0+1) > a - 2\varepsilon$ $\therefore h(x) > f(x,y,z_0+1) > a-2\varepsilon$

同理, 容易证明 $|h(x) - a| < 2\varepsilon$ $(x > x_0)$ $\therefore \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = a$

习题(10)-5 证明:

$\boxed{\text{必要性}}$ 记 $V_{c+}=\{X\in\mathbb{R}^n \mid f(x)>c\}$ $V_{c-}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)<c\}$ 集合定义

任取 $X_1\in V_{c+}$ 有 $f(x_1)>c$

$\because f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续 $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 对 $\forall X\in B_\delta(X_1)$ 连续定义

有:$|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$ $\therefore f(x)>f(x_1)-\varepsilon$

为什么? $\therefore f(x)>f(x_1)$

(证明:反设 $f(x)\le f(x_1)$ $\therefore\exists\delta>0$ 使 $f(x)+\sigma\le f(x_1)$ 建立不等式联系

与 $\forall\varepsilon>0$ $f(x)+\varepsilon>f(x_1)$ 矛盾) "搭桥"

$\therefore f(x)>f(x_1)>c$ $\therefore X\in V_{c+}$

即:对 $\forall X_1\in V_{c+}$,$\forall X\in B_\delta(X_1)$ 都满足 $x\in V_{c+}$. 即 $B_\delta(X_1)\subset V_{c+}$. 用定义证明 $\forall X_1$ 的邻域内所有点包含在 V_{c+} 内

$\therefore\forall X_1\in V_{c+}$ 是 V_{c+} 的内点 $\therefore V_{c+}$ 是开集.

显然 $V_{c+}\subset\mathbb{R}^n$ $\therefore V_{c+}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集. 同理 V_{c-} 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集.

$\boxed{\text{充分性}}$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\forall X_0\in\mathbb{R}^n$. 记 $c_1=f(X_0)+\varepsilon$. $c_2=f(X_0)-\varepsilon$

① $\Rightarrow$ $\because f(X_0)<f(X_0)+\varepsilon=c_1$ $\therefore X_0\in V_{c_1-}$

$\because V_{c_1-}$ 是开集 $\therefore X_0$ 是 V_{c_1-} 内点 $\therefore\exists\delta_1$, $\forall X_1\in B_{\delta_1}(X_0)$, $f(X_1)\in V_{c_1-}$

即 $f(X_1)<c_1=f(X_0)+\varepsilon$ ①

② $\Rightarrow$ $\because f(X_0)>f(X_0)-\varepsilon=c_2$ $\therefore X_0\in V_{c_2+}$

$\because V_{c_2+}$ 是开集 $\therefore X_0$ 是 V_{c_2+} 一内点 $\therefore\exists\delta_2$ $\forall X_2\in B_{\delta_2}(X_0)$, $f(X_2)\in V_{c_2+}$

即 $f(X_2)>c_2=f(X_0)+\varepsilon$ ②

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 对 $\forall X\in B_\delta(X_0)$ 由①②,对 $\forall\varepsilon>0$

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. $\therefore f(x)$ 在 X_0 点连续.

改变 X_0 取值. $\therefore f(X)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 连续.

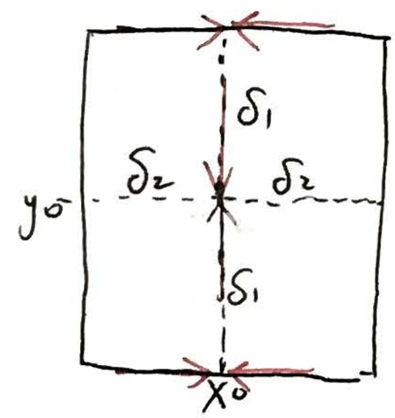
习题(10)-6

不妨设 $f(x,y)$ 在 x 固定时对 y 单调递增，ε 为任意正数

$\because f(x_0,y)$ 在直线 $x=x_0$ 上对 y 连续：$\exists\delta_1$ 当 $|y-y_0|\le\delta_1$ 时 $|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\therefore \Rightarrow \begin{cases} |f(x_0,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_0,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$\because f(x,y)$ 在直线 $\left\{\begin{matrix} y=y_0-\delta_1 \\ y=y_0+\delta_1 \end{matrix}\right\}$ 上对 x 连续，



$\exists\delta_2$，当 $|x-x_0|\le\delta_2$ 时 $\begin{cases} |f(x,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0+\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

$\therefore$ 当 $|x-x_0|\le\delta_2$ $|y-y_0|\le\delta_1$ 时． 由 $f(x)$ 关于 y 单调性

$$\left.\begin{matrix} f(x,y)\le f(x,y_0+\delta_1)<f(x_0,y_0+\delta_1)+\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0,y_0)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=f(x_0,y_0)+\varepsilon \\ f(x,y)\ge f(x,y_0-\delta_1)>f(x_0,y_0-\delta_1)-\frac{\varepsilon}{2}>f(x_0,y_0)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=f(x_0,y_0)-\varepsilon \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\eta\}$ 则 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$

$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$ $\therefore f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续．

7. 易知 $f(x,y)$ 在 $R/\{(0,0)\}$ 上连续.

即证: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\quad\therefore \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta, |x|<\delta$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta$, $|x|<\frac{\sqrt{\delta}}{2}$, $|y|<\frac{\sqrt{\delta}}{2}$, 有 $\left|\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$

$\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y=0$ $\quad\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$

$\forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$, 设 $r=\frac{2}{\varepsilon}$

记 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>r^2\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le(r+1)^2\}$

$\forall\alpha\in A$, $|f(\alpha)|=\frac{|y|\cdot|\sin(x^2+y^2)|}{x^2+y^2}\le\frac{|y|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\varepsilon}{2}$

易知: B为有界闭集. 故f在B上一致连续。

任取两点 X_1, X_2, $|X_1-X_2|<\delta<1$

① 当 $X_1, X_2\in A$ 时

$|f(X_1)|\le\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(X_2)|\le\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(X_1)-f(X_2)|\le|f(X_1)|+|f(X_2)|\le\varepsilon$

② 当 $X_1, X_2\in B$ 时

$\because$ f在B上一致连续

$\therefore$ 对 ε, $\exists\delta$, $|X_1-X_2|<\delta$ 时, $|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$

③ 当 $X_1\in A/B$, $X_2\in B/A$ 时

$|X_1-X_2|\ge1>\delta$ 矛盾

综上所述, $\forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$, $\exists\delta\in(0,1)$, 当 $|X_1-X_2|<\delta$ 且 $X_1,X_2\in\mathbb{R}^2$ 时, $|f(X_1)-f(X_2)|\le\varepsilon$

即 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

8. <补> $f(x)$在D上一致连续 $\Leftrightarrow$ 对D中任意两点列$\{M_n'\}$ & $\{M_n''\}$，只要$\lim\limits_{n\to\infty}|M_n'-M_n''|=0$

均有$\lim\limits_{n\to\infty}|f(M_n')-f(M_n'')|=0$. <结合：非一致连续>

取$\{P_n\}=\{(0,n)\mid n=1,2,3,\cdots\}$　$\{Q_n\}=\{(\frac{x}{n},n)\mid n=1,2,\cdots\}$.　$f(P_n)=g(0)$，$f(Q_n)=g(x)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}|P_n-Q_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$，且$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上一致连续.　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(f(P_n)-f(Q_n))=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(g(0)-g(x))=g(0)-g(x)=0$　由x的任意性$g(x)\equiv g(0)$，即$g(x)$为常数函数

9. 对$\forall x_0\in D$ 由$f_1(x)$一致连续，根据cauchy准则易证明$\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)$存在.（课本P25例3）

令$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ \lim\limits_{y\to x}f_1(y) & x\in D\cap D_1^{\circ}\end{cases}$　则$f(x)$在D_1上一致连续

$\therefore$ 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$　当$x',x''\in D_1$且$|x'-x''|<\delta$时，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\therefore$ 当$x_1,x_2\in D$，且$|x_1-x_2|<\frac{\delta}{2}$时，有$x'\in D_1$，$x''\in D$，满足$|x'-x_1|<\frac{\delta}{4}$，$|x''-x_2|<\frac{\delta}{4}$，使：

$|f(x')-f(x_1)|<\varepsilon$，$|f(x'')-f(x_2)|<\varepsilon$.

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|<3\varepsilon$　　$\therefore f(x)$在D上一致连续

此外由多元函数极限的唯一性，易知满足条件的$f(x)$是唯一的.