第十五章 广义积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

一、$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 型积分　　$(f(x) \geq 0)$

① $0 \leq f(x) \leq g(x)$　　$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

② $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p f(x) dx = l$

　1° $p > 1$　$l \in [0, +\infty)$ $\Rightarrow$ 收敛

　2° $p \leq 1$　$l \in (0, +\infty]$ $\Rightarrow$ 发散

二、$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 型积分

① Abel：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛　　$g(x)$ 单调有界 $\Rightarrow$ 收敛

② Dirichlet　$\left|\int_a^{m} f(x)dx\right|$ 有界　　$g(x)$ 单调趋于零 $\Rightarrow$ 收敛

三、$\int_a^b f(x)dx$ 型积分　(b为奇点) / a为奇点

$\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) dx = l$　　$\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) dx = l$

　1° $p < 1$　$l \in [0, +\infty)$ $\Rightarrow$ 收敛

　2° $p \geq 1$　$l \in (0, +\infty]$ $\Rightarrow$ 发散

（注意方向相反

[判断步骤]

①分辨奇点个数

三角函数：
- 证明绝对收敛：$\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$ 收敛
- 证明条件收敛：$\frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1-\cos 2x}{2x^p}$ 发散

②若有多个奇点，划分为多段分别判定

③判定方法：
- 法一：使用Abel或Dirichlet
- 法二：设a为奇点，$x \to a$时（a可为正无穷），将被积函数简化为 $\frac{1}{x^p}$ 的形式
- 法三：预判敛散性后，应用柯西判别法书写.
- 法四：换元/化为级数

④注意！若原积分有多个奇点，化为多段后，只有在每一段上均收敛时.原积分才收敛。换言之，只要在某段上得出发散，即可知整段积分发散.（此处与级数不同）

练习15.1

1. (1) $\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

$\therefore \int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{A+1}{\sqrt{A^2-A+1}}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$

(2) $\int e^{-x}\sin x\,dx = -\int e^{-x}d\cos x$

$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}d\sin x$

$= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x\,dx$

$\therefore \int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$ 同理 $\int(-e^{-x}\sin x\,dx) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e^{-n\pi}\cos n\pi - e^{-(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right]$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e^{-n\pi}\cos n\pi + e^{-(n-1)\pi}\cos n\pi\right]$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos n\pi\left[e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right] = \frac{1}{2}(1+e^{\pi})\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^n$

$\because \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^n = \frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{e^{\pi}-1}$ $\therefore \int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$

2.
(1) $\frac{1}{1+x|\sin x|} \geqslant \frac{1}{1+x}$

由于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{1+n}dn = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+x) = +\infty$

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$ 发散 $\therefore \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$

(2) $\because \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot x^2\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

$\therefore \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ 收敛

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ 收敛

(3) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x}{e^x+x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x+6x} = 0$

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+x^4}dx$ 收敛　同理 $\int_{-\infty}^0\frac{x}{e^x+x^4}dx$ 收敛

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x+x^4}$ 收敛

(4) $\int_1^A(\frac{\pi}{2}-\arctan x)dx = \frac{\pi}{2}x + x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_1^A$

显然有界

而 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调趋于零

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x}dx$ 收敛

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} = 1$

$\therefore \int_1^{+\infty}\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ 发散

3.

(1)

$p>1$ 时，对 $\forall p$，$\exists h>0$ 且 $h\neq 1$ 使 $p>p-h>1$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-h}\cdot\frac{\ln x}{x^p} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^h} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{hx^h} = 0$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$ 收敛

$0<p\leq 1$ 时

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^p\cdot\frac{\ln x}{x^p} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$ 发散

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{q-p}\cdot\frac{x^p}{1+x^q} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^q} = 1$

$\therefore q-p>1$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}$ 收敛

$0<q-p\leq 1$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}$ 发散

$q-p\leq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{x^p}{1+x^q} = +\infty$　$\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}$ 发散

$\Rightarrow q-p<1$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}$ 发散

练习15.2

1.

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

奇点为1. $x\to 1$时 $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim (x-1)$

$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ 发散

(2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$. $\therefore$ 0是唯一奇点

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\cdot \ln x}{1-x} = 0$ 由阶分估法 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ 收敛

(3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

0和π为奇点. 由于 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

$(0,\frac{\pi}{2})$上: $x\to 0$时 $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛

$(\frac{\pi}{2},\pi)$上: $x\to \pi$时 $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi - x}}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \sim \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\pi-x}}$ 收敛

$\Rightarrow$ 收敛

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$

0是唯一奇点 $x\to 0$时 $\frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}$ 收敛

习题15.(A)

1.(1) $\because \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$

由 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \int \frac{2\sqrt{x}\,d\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)} = 2\int\frac{d\sqrt{x}}{1+x} = 2\arctan\sqrt{x}+C$

$\therefore \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{\pi}{2}$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ 收敛 $\therefore \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\right|dx$ 收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ 绝对收敛.

(2) $\left|\frac{\sin x}{\ln x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{\ln x} = \frac{1-\cos 2x}{2\ln x}$

其中 $\frac{1}{2\ln x} > \frac{1}{2x}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散 故 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\ln x}$ 发散

$\because \int_0^{+\infty}\cos 2x\,dx \leq 2$，$\{\frac{1}{\ln x}\}$ 单调趋于零. 由 Dirichlet 判别法 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2\ln x}$ 收敛

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2\ln x}$ 发散，原积分不是绝对收敛.

对于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$：

$\because \int_0^A \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^A \leq 2$，$\{\frac{1}{\ln x}\}$ 单调 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$

由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$ 收敛.

综上：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}dx$ 条件收敛.

1.(3).

x足够大时 $\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}>0$ ∴ $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right|=\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$.

∵ $x\to+\infty$时 $\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\sim\frac{1}{x^2}$ ∴ $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$ 绝对收敛.

(4) 对于级数 $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot|\sin x|dx$:

∵ $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot|\sin x|\geqslant\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\sin^2 x=\frac{\ln(\ln)x}{\ln x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}-\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cdot\cos 2x$.

由 $\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}>\frac{\ln x\cdot\ln(\ln x)}{2\ln x}=\frac{\ln(\ln x)}{2}$ 发散, $\int\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}$ 发散

由 $\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}$ 递减趋于零(由求导及L'ospital计算) 且 $\int_e^{+\infty}\cos 2x$ 有界 $\Rightarrow\int\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cdot\cos 2x$ 收敛

∴ $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot|\sin x|dx$ 发散. 同理有 $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\sin x\,dx$ 收敛

∴ 原级数条件收敛

(5) ∵ $|x^{\mu}e^{-ax}\cos x|\leq x^{\mu}e^{-ax}$ 而$x\to+\infty$时. $x^{\mu}e^{-ax}\sim\frac{1}{x^2}$

∴ $\int_0^{+\infty}x^{\mu}e^{-ax}dx$ 收敛 ∴ $\int_0^{+\infty}x^{\mu}e^{-ax}\cos x$ 绝对收敛.

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

2. 反设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$

则：$\exists\, \varepsilon_0 > 0$. $x_n \to +\infty$ s.t. $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$. 不妨设 $f(x_n) \geq \varepsilon_0$.

由一致连续性：

$\exists\, \delta > 0$ s.t. x'、x'' 满足 $|x'-x''| < \delta$ 时. 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \doteq \frac{\varepsilon_0}{2}$

特别地. 对 $\forall x \in (x_n - \delta, x_n + \delta)$ 有 $|f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

从而有 $f(x) > f(x_n) - |f(x) - f(x_n)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$

从而 $\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx > \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2\delta = \varepsilon_0 \cdot \delta$

由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛：$\forall \varepsilon > 0$. $\exists\, M > 0$. s.t. $x'' > x' > M$ 时. $\int_{x'}^{x''} f(x)dx < \varepsilon$.

特别地. 对 $\varepsilon_0\delta > 0$. $\exists\, M > 0$ s.t. $x_n + \delta > x_n + \delta' > M$ 时 $\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx < \varepsilon_0\delta$

矛盾.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

3. 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在：

由海涅定理，只需证：对 $\forall$ 严增趋于无穷的 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 收敛.

$\because \int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛. 由柯西收敛原理，$\forall \varepsilon>0$，$\exists A>a$. 当 $x_1、x_2>A$ 时，

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx\right| = |f(x_2)-f(x_1)| < \varepsilon.$$

$\therefore$ 对 $\forall \{x_n\}\to+\infty$ $\exists N>0$ 当 $n、m>N$ 时，$x_n、x_m>A$.

$$\therefore \left|\int_{x_n}^{x_m} f'(x)dx\right| = |f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon.$$

由 cauchy 准则，$\{f(x_n)\}$ 收敛. 由海涅定理，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，设其为 H.

下证 $H=0$：

若 $H>0$. 则 $\exists \delta>0$，$x>\delta$ 时 有 $f(x) > \frac{H}{2} > 0$

$\therefore A>\delta$ 时 $\int_A^{2A} f(x)dx \geqslant \frac{H}{2}A \to +\infty \quad (A\to+\infty)$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

同理 $H<0$ 时矛盾

$\therefore H=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. 当 $f(x)$ 递减时. $f(x)\geqslant 0$ 恒成立. (假设 $\exists x_0\geqslant a$，$f(x_0)<0$. 由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$

$\forall A>x_0$ 时. $\int_{x_0}^{A} f(x)dx \leqslant \int_{x_0}^{A} f(x_0)dx = (A-x_0)f(x_0) \to -\infty \ (A\to+\infty)$

此时 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 矛盾)

由柯西收敛定理，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists M>a$，

$\forall x_1、x_2>M$，$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

取 $x_1=\delta$，$x_2=2\delta$. 则 $\delta>M$ 时，有 $0 \leqslant 2\delta f(\delta) \leqslant \int_\delta^{2\delta} f(x)dx < \varepsilon$.

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$

5. $\because \int_a^{+\infty} xf'(x)dx = \int_a^{+\infty} x\,df(x) = xf(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\therefore$ 要证 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛 只需证 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ 存在.

$\because f'(x)\le 0,\ x\in[a,+\infty)$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调.

由(4)结论，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$ 证毕

6. 对 $\forall \alpha>0$. $\alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx \xlongequal{t=\alpha x} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(\frac{t}{\alpha})dt = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(\frac{x}{\alpha})dx$

注意到 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$ $\therefore A=\int_0^{+\infty} e^{-x} A\,dx$.

$\therefore \lim\limits_{\alpha\to0^+}\left(\alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx\right)-A = \lim\limits_{\alpha\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(f(\frac{x}{\alpha})-A\right)dx$ 以下证明此式 $=0$.

① $(0,\delta_1]$ 上：由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界.

(验证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$：对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists K>0$. $x>K$ 时. $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=1$. 对应 $K=k$

$\therefore x>k$ 时. $1>|f(x)-A|>|f(x)|-|A|$, $|f(x)|<|A|+1$. 记 $M_1=\max\limits_{x\in[0,k]}|f(x)|$. $M=\max\{M_1,|A|+1\}$

$\therefore |f(x)|<M,\ x\in[0,+\infty)$. 此处 $M>|A|$.)

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\alpha>0$ 取 $\delta_1=\frac{\varepsilon}{4M}$. $\therefore \left|\int_0^{\delta_1} e^{-x}(f(\frac{x}{\alpha})-A)dx\right| < \int_0^{\delta_1} e^{-x}(|f(\frac{x}{\alpha})|+|A|)dx < 2M\int_0^{\delta_1} e^{-x}dx$

$< 2M\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$.

② $[\delta_1,+\infty)$ 上：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Rightarrow \exists N>0$. $x>N$ 时. $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. (要使 $\frac{x}{\alpha}>N$. 由于 $x>\delta_1$. 需有 $\alpha<\frac{\delta_1}{N}$

故记 $\delta=\frac{\delta_1}{N}$ $0<\alpha<\delta$ 时，对 $\forall x\in[\delta_1,+\infty)$, 有 $\frac{x}{\alpha}>N$ $\therefore$ 此时 $|f(\frac{x}{\alpha})-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore 0<\alpha<\delta$ 时. 对 $\forall\varepsilon>0$. $\forall x\in[\delta_1,+\infty)$

$\left|\int_{\delta_1}^{+\infty} e^{-x}(f(\frac{x}{\alpha})-A)dx\right| \le \int_{\delta_1}^{+\infty} e^{-x}\cdot\left|f(\frac{x}{\alpha})-A\right|dx < \frac{\varepsilon}{2}\int_{\delta_1}^{+\infty} e^{-x}dx < \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{\varepsilon}{2}$

$\boxed{\text{综上}}$ 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$. $0<\alpha<\delta$ 时. 取 $\delta_1=\frac{\varepsilon}{4M}$ (M 为 $f(x)$ 界).

有 $\left|\int_0^{+\infty} e^{-x}(f(\frac{x}{\alpha})-A)dx\right| \le \left|\int_0^{\delta_1} e^{-x}(f(\frac{x}{\alpha})-A)dx\right| + \left|\int_{\delta_1}^{+\infty} e^{-x}(f(\frac{x}{\alpha})-A)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-x}(f(\frac{x}{\alpha})-A)dx=0$

7. 结论错误，反例：

取 $f(x)=g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

由 $\int_a^A \sin x dx$ 有界，$\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调趋于零 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$|g(x)|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \Rightarrow g(x)$ 连续有界

然而 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}dx$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}}_{\text{发散}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx}_{\text{收敛（由Dirichlet）}}$ → 发散

8. 结论错误，反例：

取 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$，$g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+1$

由上题讨论，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$f(x)$，$g(x)$ 都连续 且有 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

而 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_1^{+\infty}\left[\frac{\sin^2 x}{x}+f(x)\right]dx$

$= \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx}_{\text{由上题，发散}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)dx}_{\text{收敛}}$ → 发散

✿ week 11

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

9\. (1) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ∵ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$ 原式 $=\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\pi$

(2) $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ ∵ $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{d(\sqrt{1-x})}{1+(1-x)}=-2\arctan\sqrt{1-x}$ 原式 $=-2\arctan\sqrt{1-x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 原式 $\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^4}\cdot 2t\,dt=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}+\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)dx$

由于 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{d\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt2}}{1+\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt2}$

$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=\frac{1}{2\sqrt2}\int\frac{1}{x+\frac{1}{x}-\sqrt2}-\frac{1}{x+\frac{1}{x}+\sqrt2}\,d(x+\frac{1}{x})=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt2}{x+\frac{1}{x}+\sqrt2}\right|$

∴ $2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}+\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)dx=\frac{\sqrt2}{2}\pi$

(4) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos t}{\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\,d\sin t}{\sin t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d(\ln\sin t)$

$=t\cdot\ln(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt$

$=-\frac{\pi}{2}\ln2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\frac{t}{2})dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos\frac{t}{2})dt\xlongequal{\frac{t}{2}=u}-\frac{\pi}{2}\ln2-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin u)du-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)du$

$\xlongequal{w=\frac{\pi}{2}-u}-\frac{\pi}{2}\ln2-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin u)du-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin w)dw=-\frac{\pi}{2}\ln2-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$

∴ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt=-\frac{\pi}{2}\ln2$ ∴ $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln2$

(5) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot\ln^2(\ln x)}$ ∵ $\int\frac{dx}{x\ln x\cdot\ln^2(\ln x)}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\cdot\ln^2(\ln x)}=\int\frac{d(\ln(\ln x))}{\ln^2(\ln x)}=-\frac{1}{\ln(\ln x)}$ ∴原式 $=-\frac{1}{\ln(\ln x)}\Big|_{e^2}^{+\infty}=\ln2$

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=-\frac{\sin^2x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin2x}{x}dx\xlongequal{t=2x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

10\. 奇点为 $x_0 = \arcsin a$.　　由万能公式 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$　($t = \tan\frac{x}{2}$)

$x \neq x_0$ 时. $\int \frac{dx}{a-\sin x} = \int \frac{d(2\arctan t)}{a - \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{a - \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{at^2-2t+a}$

$= \int \frac{2dt}{[\sqrt{a}(t-\frac{1}{a})]^2 - (\frac{1}{a}-a)}$　$(0<a<1)$

$\because \frac{2}{a(t-\frac{1}{a})^2 - (\frac{1}{a}-a)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}-a}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}(t-\frac{1}{a}) - \sqrt{\frac{1}{a}-a}} - \frac{1}{\sqrt{a}(t-\frac{1}{a}) + \sqrt{\frac{1}{a}-a}}\right)$

上式 $= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{1-a^2}}{a\tan\frac{x}{a} - 1 + \sqrt{1-a^2}}\right| \triangleq g(x)$

$P.V. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a-\sin x} = \lim_{\delta\to0^+}\left(\int_0^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{\frac{\pi}{2}}\right)\frac{dx}{a-\sin x}$

$= \lim_{\delta\to0^+}\left(g(x_0-\delta) - g(0) + g(\frac{\pi}{2}) - g(x_0+\delta)\right)$

$= \lim_{\delta\to0^+}\left(g(\frac{\pi}{2}) - g(0)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left(\ln\left|\frac{a-1-\sqrt{1-a^2}}{a-1+\sqrt{1-a^2}}\right| - \ln\left|\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{-1+\sqrt{1-a^2}}\right|\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\ln\frac{1-a+\sqrt{1-a^2}}{a-1+\sqrt{1-a^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\ln\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}{-\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$

11\. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^p}{\sin^q x}dx \quad (p>0,q>0)$.

奇点为0. $x\to 0$: $\sin x \sim x$

$\therefore \frac{x^p}{\sin^q x} \sim \frac{1}{x^{q-p}} \quad (x\to 0)$

$\therefore$ 反级数: $\begin{cases} q-p<1 & \text{收敛} \\ q-p\geq 1 & \text{发散} \end{cases}$

(2) $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}dx$

原式 $= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)x^{1-\alpha}} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}$

当 $1-\alpha<1$ 且 $\alpha<1 \Rightarrow 0<\alpha<1$ 时. 级数收敛 (两式都收敛)

$\alpha\leq 0$ 或 $\alpha\geq 1$ 时. 级数发散 (两式一敛一散).

(3) $\int_0^1 \frac{x^p}{\ln^q(1+x)}dx \quad (p>0,q>0)$

奇点为0. $\ln(1+x)\sim x \quad (x\to 0)$

$\therefore \frac{x^p}{\ln^q(1+x)} \sim \frac{1}{x^{q-p}} \quad (x\to 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} q-p<1 & \text{收敛} \\ q-p\geq 1 & \text{发散} \end{cases}$

Week 11

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 第 页

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx \quad (p>0)$.

奇点为0与∞. 分为(0,1)与(1,+∞)两段: $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx \quad \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

① (0,1)上: $x\to 0$时, $\ln(1+x)\sim x$

$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}} \quad (x\to 0)$. $\begin{cases} p-1<1 \Rightarrow p<2\text{时 收敛} \\ p-1\geq 1 \Rightarrow p\geq 2\text{时 发散}\end{cases}$

② (1,+∞)上:

$p>1$时. 取$p'>p>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p'}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{p-p'}}\to 0$ $\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛

$p\leq 1$时. 由于$\frac{\ln(1+x)}{x^p}>\frac{1}{x^p}$ ($x>1$时) 由比较判别法 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散

综上: $1<p<2$时. 原级数收敛 (两项都收敛)

$p\leq 1$或$p\geq 2$时 级数发散

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^p}{1+x+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x+x^2}dx$

① (0,1)上: $x\to 0$时 $\frac{x^p}{1+x+x^2}\sim x^p$ $\therefore\int_0^1\frac{x^p}{1+x+x^2}dx$: $\begin{cases}-p\geq 1 & \text{发散}\\ -p<1 & \text{收敛}\end{cases}$.

② (1,+∞)上: $x\to+\infty$时 $\frac{x^p}{1+x+x^2}\sim x^{p-2}$ $\therefore\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x+x^2}dx$: $\begin{cases}2-p>1 & \text{收敛}\\ 2-p\leq 1 & \text{发散}\end{cases}$.

综上: $-1<p<1$时. 原级数收敛 (两项均收敛)

$p\leq -1$或$p\geq 1$时原级数发散.

week 11

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

(6). $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p(1+x^q)}$ $(p>0, q>0)$ $=\int_0^1\frac{dx}{x^p(1+x^q)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(1+x^q)}$

① $(0,1)$上: $x\to 0$时. $\frac{1}{x^p(1+x^q)}\sim\frac{1}{x^p}$ $\therefore\int_0^1\frac{dx}{x^p(1+x^q)}$: $\begin{cases}p\geq 1 & 发散\\ p<1 & 收敛\end{cases}$

② $(1,+\infty)$上: $x\to+\infty$时 $\frac{1}{x^p(1+x^q)}\sim\frac{1}{x^{p+q}}$ $\therefore\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(1+x^q)}$: $\begin{cases}p+q>1 & 收敛\\ p+q\leq 1 & 发散\end{cases}$

综上: $\begin{cases}p<1且p+q>1时 & 反常积分收敛\\ 其他情况 & 反常积分发散\end{cases}$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ $(p>0, q>0)$ 奇点为0与$\frac{\pi}{2}$

① $(0,\frac{\pi}{4})$上: $x\to 0$时 $\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\sim\frac{1}{x^p}$ $\therefore\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$: $\begin{cases}p\geq 1 & 发散\\ p<1 & 收敛\end{cases}$

② $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$上 $x\to\frac{\pi}{2}$时 $\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\sim\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q}$ $\therefore\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$: $\begin{cases}q\geq 1 & 发散\\ q<1 & 收敛\end{cases}$

综上: $\begin{cases}p<1且q<1时 & 反常积分收敛\\ 其他情况 & 反常积分发散\end{cases}$

(8) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ $(p>0, q>0)$ 奇点: 1与∞

① $(1,2)$上: $x\to 1$时 $\ln(x)=\ln(1+(x-1))\sim(x-1)$ $\therefore\frac{1}{x^p\ln^q x}\sim\frac{1}{(x-1)^q}$ $\therefore\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$: $\begin{cases}q<1 & 收敛\\ q\geq 1 & 发散\end{cases}$

② $(2,+\infty)$上 $x\to+\infty$时. 研究积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$:

若$p<1$: 取$p<p'<1$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p'}\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{p'-p}}{\ln^q x}\to+\infty$ 发散.

若$p>1$: $\frac{1}{x^p\ln^q x}<\frac{1}{x^p}$ $(x>>1时)$ 由比较判别法, 收敛

若$p=1$: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^q x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}$ $\begin{cases}q>1 & 收敛\\ q\leq 1 & 发散.\end{cases}$

综上: $\begin{cases}p>1且q<1时 & 反常积分收敛\\ 其他 & 反常积分发散\end{cases}$

12.(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$

柯西判别法: $\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=l$

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$: $\begin{cases}p>1 & l\in[0,+\infty) \text{ 收敛}\\ 0<p\le 1 & l\in(0,+\infty] \text{ 发散}\end{cases}$

0不是奇点. 考虑无穷区间上广义积分:

$\because \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{4}}}=0$, $p=\frac{4}{3}-\frac{1}{4}>1$. 由柯西判别法 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ 收敛

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln^2(1+x)}dx$

$=\int_1^{+\infty}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}dx$ 记 $\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)$. $\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}=f(x)$ 原式 $=\int_1^{+\infty}g(x)f(x)dx$

$\because \int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(1+x))}{\ln^2(1+x)}=-\frac{1}{\ln(1+x)}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$ 收敛,

由 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=1$ 知 $g(x)$ 有界, 由 $g'(x)=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}<0$ $(x>1)$ 知 $g(x)$ 单调.

根据Abel判别法. $\int_1^{+\infty}g(x)f(x)dx$ 收敛

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln^2 x}$

先考虑 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln^2 x}$ (无奇点): $\because \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\ln^2 x}=+\infty$, $p=\frac{2}{3}<1$

由柯西判别法 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln^2 x}$ 发散 $\therefore \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln^2 x}$ 发散

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}e^{-x}dx$:

先考虑 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^2}e^{-x}dx$: 0是奇点 $x\to 0$时. $\sin x\sim x$ $\frac{\sin x}{x^2}e^{-x}\sim\frac{1}{x}$

$\because \int_0^1\frac{1}{x}dx$ 发散 $\therefore \int_0^1\frac{\sin x}{x^2}e^{-x}$ 发散

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}e^{-x}$ 发散

(5) $\int_0^{+\infty} x\cos x^4 dx$:

0不是奇点 $\therefore \int_0^{+\infty} x\cos x^4 dx$ 与 $\int_1^{+\infty} x\cos x^4 dx$ 同敛散

$$\int_1^{+\infty} x\cos x^4 dx \overset{t=x^4}{=\!=} \int_1^{+\infty} \sqrt[4]{t}\cdot \cos t \cdot d\sqrt[4]{t} = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

$\because \int_1^{+\infty}\cos t dt = \sin t\Big|_1^{+\infty}$ 有界，$\frac{1}{\sqrt{t}}\to 0\ (t\to\infty)$ 且 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 递减 由Dirichlet $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty} x\cos x^4 dx$ 收敛 即 $\int_0^{+\infty} x\cos x^4 dx$ 收敛

(6) $\int_\pi^{+\infty}\frac{dx}{x^2(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{dx}{x^2(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \overset{t=x-k\pi}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{(k\pi+t)^2(\sin t)^{\frac{2}{3}}} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(k\pi+x)^2(\sin x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(k\pi)^2\cdot(\sin x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{2}{3}}} \le \frac{M}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

由 $\sum\frac{1}{k^2}$ 收敛，原积分收敛

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}dx$

$$=\int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}dx + \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}dx$$

$[\frac{2}{\pi},+\infty)$ 上：$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\cos x dx$ 有界，$\frac{1}{x}\downarrow 0$. 由Dirichlet $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 收敛 又 $\because \sin\frac{1}{x}$ 单调有界

由Abel $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ 收敛

$(0,\frac{2}{\pi})$ 上：$\int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}dx \le \int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx = \int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\cdot x dx$

$\because \int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx = -\cos\frac{1}{x}\Big|_0^{\frac{2}{\pi}}$ 有界. $x\to 0$ 时，$x\downarrow 0$ 由Dirichlet $\int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\cdot x dx$ 收敛

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}dx$ 收敛.

week 12

南開大學 作 业 纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x-\ln x\cdot\sin x}}dx$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x-\ln x\sin x}}\xlongequal{t=x-k\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t+k\pi-\ln(t+k\pi)\cdot(-1)^k\sin t}}\triangleq\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$$ 显然 $u_k\to 0$

$\because \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k=-u_1+(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots$ $\therefore$ 原积分与 $\sum_{k=1}^{+\infty}(u_{2k}-u_{2k+1})$ 同敛散

$$\because u_{2k}-u_{2k+1}=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2k\pi-\ln(x+2k\pi)\cdot\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x+(2k+1)\pi+\ln(x+(2k+1)\pi)\cdot\sin x}}\right)\sin x\,dx$$

$$\triangleq\int_0^{\pi}h(x)\sin x\,dx$$ (由积分第二中值定理) $=h(x_k)\cdot\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2h(x_k)$ $x_k\in[0,\pi]$

$$\because h(x_k)=\frac{\pi+\sin x_k\cdot\ln(x_k+(2k+1)\pi)\cdot(x_k+2k\pi)}{\sqrt{x_k+2k\pi-\ln(x_k+2k\pi)\cdot\sin x_k}\cdot\sqrt{x_k+(2k+1)\pi+\ln(x_k+(2k+1)\pi)\cdot\sin x_k}\left(\sqrt{x_k+2k\pi-\ln(x_k+2k\pi)\sin x_k}+\sqrt{x_k+(2k+1)\pi-\ln(x_k+(2k+1)\pi)}\right.}$$

$$\sim\frac{1}{k^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$$ $\therefore\sum_{k=1}^{+\infty}(u_{2k}-u_{2k+1})\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ 收敛 原积分收敛

(9) $$\int_0^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]dx=\int_0^{1}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]dx$$

$(1,+\infty)$上: $x\to+\infty$时 $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$ $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\right)$

$\therefore\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\sim\frac{1}{2x^2}$ $\therefore\int_1^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛

$(0,1)$上: $x\to0$时. 令 $t=\frac{1}{x}$ $\int_0^1\ln(1+\frac{1}{x})dx=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt<\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2-\varepsilon}}$ 收敛

而 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$ $\therefore\int_0^1\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛

综上: $\int_0^{+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛.

13. (1) $\int_1^{+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x^2}}-1)^\alpha}{\ln^\beta(1+\frac{1}{x})}dx \quad (\alpha>0,\beta>0)$

$x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x}\to 0$ $\quad e^{\frac{1}{x^2}}-1\sim\frac{1}{x^2}$; $\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$ $\quad\therefore \frac{(e^{\frac{1}{x^2}}-1)^\alpha}{\ln^\beta(1+\frac{1}{x})}\sim x^{\beta-2\alpha}$

$\begin{cases}2\alpha-\beta>1 \text{ 时} & \text{绝对收敛}\\ 2\alpha-\beta\le 1 \text{ 时} & \text{发散}\end{cases}$

(2) $\int_a^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\,dx.$ ($p(x)$: m次, $q(x)$: n次. $x\geq a$时. $q(x)\neq 0$)

① $n-m>1$时. $\left|\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\right|\le\left|\frac{p(x)}{q(x)}\right|\sim\frac{1}{x^{n-m}}$ $(n-m>1)$ 由$\int_b^{+\infty}\frac{dx}{x^{n-m}}$收敛，故积分绝对收敛

② $0<n-m\le 1$时. $\frac{p(x)}{q(x)}\to 0\ (x\to+\infty)$ $\quad\because\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)'=\frac{p'(x)q(x)-q'(x)p(x)}{q^2(x)}$

1) $\because p'\cdot q-q'\cdot p$是有理多项式 $\therefore\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)'=0$ 有有限个根 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ $(x_1<x_2<\cdots<x_m)$.

当$x>x_m$时 $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)'>0$ 或 <0 恒成立 $\quad\therefore x>x_m$时. $\frac{p(x)}{q(x)}$单调.

又$\because\int_a^{+\infty}\sin x\,dx$ 有界. 由Dirichlet $\quad\int_a^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\,dx$ 收敛 #

2) 再考虑 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\right|dx$: 记$n-m=s\in(0,1]$ $\quad\left|\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\right|\sim\frac{|\sin x|}{x^s}$

$\because\left|\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\right|\sim\frac{|\sin x|}{x^s}\geq\frac{\sin^2x}{x^s}=\frac{1-\cos 2x}{2x^s}=\frac{1}{2x^s}-\frac{\cos 2x}{2x^s}.$

由于$\int_a^{+\infty}\frac{1}{2x^s}dx$ 发散 $(0<s\le 1)$ 而$\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^s}$ 收敛 (Dirichlet) $\therefore\int_a^{+\infty}\left|\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\right|dx$ 发散

综上：条件收敛

③ $n\le m$时: 记$m-n=t\geq 0$ $\quad\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\sim x^t\sin x$ 由柯西判别法，易知发散

综上: $\begin{cases}n-m>1 & \text{绝对收敛}\\ 0<n-m\le 1 & \text{条件收敛}\\ n\le m & \text{发散}\end{cases}$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx \quad (p>0)$

1) $(0,1)$上: $x\to 0$时 $\sin x\sim x$, $1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}$ $\therefore \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}\sim \frac{1}{2x^{p-3}}$

$\therefore \int_0^1 \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx$: $\begin{cases} p\geq 4: 发散 \\ p<4: (绝对)收敛 \end{cases}$

2) $(1,+\infty)$上: $x\to+\infty$时.

① $p>1$时. 由打面判别法 $\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx$ 绝对收敛

② $0<p\leq 1$时:

• $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|\cdot(1-\cos x)}{x^p}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|(1-\cos x)}{x^p}dx \xlongequal{x=k\pi+t} \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|\cdot(1-(-1)^k\cos x)}{(x+k\pi)^p}dx$

$\geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|\cdot(1-(-1)^k\cos x)}{(\pi+k\pi)^p}dx = \frac{1}{\pi^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^p}\cdot\int_0^{\pi}|\sin x|\cdot(1-(-1)^k\cos x)dx \geq \frac{m}{\pi^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^p}$

其中 $m=\min\{\int_0^{\pi}|\sin x|(1+\cos x)dx, \int_0^{\pi}|\sin x|(1-\cos x)dx\}$. 由 $\sum\frac{1}{(k+1)^p}$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|(1-\cos x)}{x^p}dx$ 发散

• $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx$: $\because \left|\int_1^A \sin x(1-\cos x)\right|\leq 2$, $\frac{1}{x^p}$ 单调趋于零.

由 Dirichlet $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx$ 收敛.

综上: 此时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx$ 条件收敛

综上所述:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx: \begin{cases} 1<p<4 & 绝对收敛 \\ 0<p\leq 1 & 条件收敛 \\ p>4 & 发散 \end{cases}$$

Week 12

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx \quad (p>0)$

(1) 在(0,1)上：$x\to 0$时，$e^{\sin x}\to 1$，$\sin 2x\to 2x$ $\quad\therefore \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-2}}$

$\therefore \int_0^1\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$：$\begin{cases} p-1\geq 1 \text{ 即 } p\geq 2 & 发散 \\ p-1<1 \text{ 即 } p<2 & (绝对)收敛\end{cases}$

(2) 在$(1,+\infty)$上：

• 对于$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$：

由于$\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx = 2\int e^{\sin x}\sin x\,d\sin x = 2\int \sin x\,de^{\sin x} = 2\left(\sin x e^{\sin x}-\int e^{\sin x}d\sin x\right) = 2e^{\sin x}(\sin x-1)$

$\therefore \int_1^{+\infty}e^{\sin x}\sin 2x = 2e^{\sin x}(\sin x-1)\Big|_1^{+\infty}\leq 2e(\sin x-1)\Big|_1^{+\infty}$ 有界，同时$\frac{1}{x^p}$单调趋于零

由Dirichlet $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛.

• 对于$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$：

$\because \frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx \geq \frac{e^{-1}\sin^2 2x}{x^p} = \frac{1-\cos 4x}{2ex^p} = \frac{1}{2e}\left(\frac{1}{x^p}-\frac{\cos 4x}{x^p}\right)$ 由Dirichlet，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^p}dx$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛 故 $\begin{cases}0<p\leq 1 & 发散 \\ p>1 & 收敛.\end{cases}$

井综上：$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$：$\begin{cases}0<p\leq 1 & 条件收敛 \\ p>1 & 发散.\end{cases}$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$：$\begin{cases}1<p<2 & 绝对收敛 \\ 0<p\leq 1 & 条件收敛 \\ p\geq 2 & 发散\end{cases}$

week 12

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(1+x^q)}dx \quad (p,q\in\mathbb{R})$

(1) $(0,1)$上: $\frac{\sin x}{x^p(1+x^q)} \sim \frac{x}{x^p(1+x^q)} = \frac{1}{x^{p-1}+x^{p+q-1}}$ 记$m=\min\{p-1,p+q-1\} = p-1+\min\{q,0\}$ $= \begin{cases} p-1 & q\geq 0 \\ p-1+q & q<0 \end{cases}$

$\therefore \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p(1+x^q)}dx$: $\begin{cases} m<1 & \text{收敛(绝对)} \\ m\geq 1 & \text{发散} \end{cases}$

(2) $(1,+\infty)$上: 记$M=\max\{p-1,p+q-1\} = \begin{cases} p-1 & q<0 \\ p+q-1 & q\geq 0 \end{cases}$

$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(1+x^q)}dx$: $\begin{cases} M>1 & \text{绝对收敛} \\ 0<M\leq 1 & \text{条件收敛} \\ M<0 & \text{发散} \end{cases}$

综上: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p(1+x^q)}dx$: $\begin{cases} M>1\text{且}m<1\text{时}. & \text{绝对收敛} \\ 0<M\leq 1\text{且}m<1\text{时} & \text{条件收敛} \\ \text{else} & \text{发散} \end{cases}$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx \quad (p>0)$

1) $x\to 0$: $x+x^2 \sim \sin(x+x^2)$ $\quad \frac{\sin(x+x^2)}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$ $\quad \therefore \int_0^1 \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$: $\begin{cases} p\geq 2 & \text{发散} \\ p<2 & \text{(绝对收敛)} \end{cases}$

2) $x\to+\infty$: 对于$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$: 由Dirichlet 显然收敛

对于$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x+x^2)|}{x^p}dx$:

- $p>1$时. $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x+x^2)|}{x^p}dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收敛 (故原积分绝对收敛)
- $0<p\leq 1$时. $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x+x^2)|}{x^p}dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x+x^2)}{x^p}dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2x+2x^2)}{x^p}dx$ 由$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+2x^2)}{x^p}dx$ 收敛

可知$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x+x^2)|}{x^p}dx$ 收敛. (故原积分条件收敛)

综上: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$: $\begin{cases} 1<p<2 & \text{绝对收敛} \\ 0<p\leq 1 & \text{条件收敛} \\ p\geq 2 & \text{发散} \end{cases}$

week 12

南開大學 作业纸

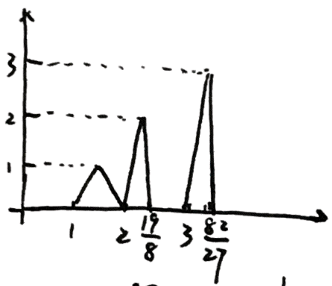
系别________ 班级______ 姓名________ 第 页

14. 不一定，反例

如：令 $f(x)=\begin{cases} 2n^4(x-n) & n\le x<n+\frac{1}{2n^3} \\ -2n^4(x-n-\frac{1}{n^3}) & n+\frac{1}{2n^3}\le x\le n+\frac{1}{n^3} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 其中 $n\in\mathbb{N}^*$. $f(x)$ 定义在 $[1,+\infty)$ 上.

$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续

$f(x)$ 图像为：



此时 $\int_1^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}(1\times1+2\times\frac{1}{2^3}+3\times\frac{1}{3^3}+\cdots)$

$=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛

而 $\int_1^{+\infty} f^3(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\int_k^{k+\frac{1}{2k^3}} 8k^{12}(x-k)^3dx+\int_{k+\frac{1}{2k^3}}^{k+\frac{1}{k^3}} -8k^{12}(x-k-\frac{1}{k^3})^3dx\right]$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[2k^{12}\cdot(x-k)^4\Big|_k^{k+\frac{1}{2k^3}}-2k^{12}(x-k-\frac{1}{k^3})^4\Big|_{k+\frac{1}{2k^3}}^{k+\frac{1}{k^3}}\right]$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(2k^{12}\cdot\frac{1}{16k^{12}}+2k^{12}\cdot\frac{1}{16k^{12}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4}\to\infty$ 发散

15. $\because\int_0^{\alpha}x^pf(x)dx$ 收敛. 不妨设0是奇点，$f(x)$ 递减. 由Cauchy收敛准则，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$. $c_1,c_2\in(0,\delta)$ 时：

有 $\left|\int_{c_1}^{c_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$. $0<x<\frac{\delta}{2}$ 时. $\int_x^{2x}t^pf(t)dt\ge f(2x)\int_x^{2x}t^pdt=f(2x)\cdot x^{p+1}\cdot\frac{2^{p+1}-1}{p+1}$ $(p\ne-1$ 时$)$

① 若 $p\ge0$：由 $\frac{2^{p+1}-1}{p+1}\ge1$，$\int_x^{2x}t^pf(t)dt\ge f(2x)\cdot x^{p+1}$

$\therefore\left|f(2x)\cdot(2x)^{p+1}\right|\le\frac{1}{2^{p+1}}\left|\int_x^{2x}t^pf(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$

② 若 $p<0$：由 $\frac{2^{p+1}-1}{p+1}\ge2^p$，$\int_x^{2x}t^pf(t)dt\ge f(2x)\cdot(2x)^{p+1}\cdot\frac{1}{2}$ $\therefore\left|f(2x)\cdot(2x)^{p+1}\right|\le2\left|\int_x^{2x}t^pf(t)dt\right|<2\varepsilon$

由此可知 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{p+1}f(x)=0$

（α为奇点，$p=-1$等情形同理）

16. 不妨设1为奇点，$f(x)$单增，即$f(1)=+\infty$

$\because \int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\right]$

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})dx$

$\therefore \left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(x)dx\right|$

$= \left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(\frac{k}{n})-f(x)\right)dx\right| \leq \left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\right)dx\right|$ (由$f(x)$单增)

$= \left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\right)\right| = \frac{1}{n}\left|f(\frac{n-1}{n})-f(0)\right|$

此外，

$\int_0^1 f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ (由cauchy收敛准则)：

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$时，$\left|\int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(x)dx\right| < \varepsilon$

不妨设$[\frac{n-1}{n},1)$上$f(x)>0$ $\quad\therefore \varepsilon > \left|\int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(x)dx\right| > \frac{1}{n}\left|f(\frac{n-1}{n})\right|$

又$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(0)}{n}=0$

故 $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{n}\left|f(\frac{n-1}{n})-f(0)\right| \leq \frac{1}{n}\left|f(\frac{n-1}{n})\right|+\frac{1}{n}\left|f(0)\right| < 2\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$

week 12

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

17. 由4.结论. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$ 又$f(x)$单调 ∴f不变号 不妨设$f(x)\geq 0$, $f(x)$递减

$$\because \int_h^{(m+1)h} f(x)dx = \sum_{n=1}^{m}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{m} hf(nh)$$

$$\int_0^{mh} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{m} hf(nh)$$

$$\therefore \int_h^{(m+1)h} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{m} hf(nh) \leq \int_0^{mh} f(x)dx$$

$m\to+\infty$时 $$\int_h^{+\infty} f(x)dx \leq h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$h\to 0^+$时. $$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

18. $$\because \left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx\right| = \left|\int_A^{+\infty}\frac{d(-\cos x)}{x^2}\right|$$

$$= \left|-\frac{\cos x}{x^2}\Big|_A^{+\infty} - \int_A^{+\infty}\frac{2\cos x}{x^3}dx\right|$$

$$= \left|\frac{\cos A}{A^2} - 2\int_A^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^3}\right| \leq \left|\frac{\cos A}{A^2}\right| + 2\left|\int_A^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^3}\right| \leq \frac{1}{A^2} + 2\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$$

$$= \frac{2}{A^2}$$

$\because m<2$ $$\therefore \left|A^m\int_A^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx\right| \leq \frac{2}{A^{2-m}} \to 0 \quad (A\to+\infty\text{时})$$

$$\therefore \lim_{A\to+\infty} A^m\int_A^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx = 0$$

19. 先证 $\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx = \frac{1}{A}\int_0^{+\infty} f(y^2)\,dy$.

$\because \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx \xlongequal{x=\frac{B}{At}} \int_{+\infty}^{0} f\left[\left(\frac{B}{t}-At\right)^2\right]d\frac{B}{At} = \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\cdot\frac{B}{Ax^2}dx$

$\therefore \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\cdot\left(1+\frac{B}{Ax^2}\right)dx$

$= \frac{1}{2A}\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\cdot d\left(Ax-\frac{B}{x}\right) \xlongequal{y=Ax-\frac{B}{x}} \frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy$

$\therefore \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx = \frac{1}{A}\int_0^{+\infty} f(y^2)\,dy$ $\quad\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy$.

20. $\because \int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)} - \int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)} = \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)\,dx}{f(x)(f(x)+f'(x))}$.

已知 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)}$ 收敛. 只需证 $\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)\,dx}{f(x)(f(x)+f'(x))}$ 收敛.

$\because f'(x)\geq 0$ $\quad\therefore \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)\,dx}{f(x)(f(x)+f'(x))} \leq \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_0^{+\infty}\frac{df(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)}\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{f(0)} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$

$\because f(0)>0$. $f(x)$ 单增 $\quad\therefore \lim_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$ 或 A 为 $+\infty$ $\quad\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} \triangleq a \in (0,+\infty)$

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \frac{1}{f(0)} - a$ 收敛 $\quad\therefore \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)\,dx}{f(x)(f(x)+f'(x))}$ 收敛

又 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)}$ 收敛

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)} + \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)\,dx}{f(x)(f(x)+f'(x))}$ 收敛