第十七章 幂级数

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

def: $\sum a_n x^n$

1. 收敛半径

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad r=\frac{1}{\rho}$$

2. 收敛区间:

$(-r,r)$ $[-r,r)$ $(-r,r]$ $[-r,r]$

eg. $\sum nx^n$ $(-1,1)$ $\sum\frac{x^n}{n}$ $[-1,1)$ $\sum\frac{x^n}{n^2}$ $[-1,1]$

端点处 $\begin{cases} \not\to 0 & \text{发散} \\ \text{Leibniz} & \text{收敛} \end{cases}$

3. 性质

1) 和函数 $s(x)=\sum a_n x^n$ 必收敛

2) $S(x)$ 在收敛区间上连续

3) 收敛区间上任意次逐项微分、积分

[例] 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$: 构造和函数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ 收敛区间: $(-1,1]$

$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=\frac{-1}{1+x}$ $\because S(0)=0$ $S(x)=S(0)+\int_0^x s(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=-\ln(1+x)$

[例] 求 $\sum\frac{x^{2n}}{4^n}$: 这是一个缺项级数. 不能直接有 $r=4$

令 $l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{|x|^2}{4}<1$ $|x|\le 2$ $r=2$

4. 基本函数的泰勒展式

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

3) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

4) $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$

5) $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}C_\alpha^n\cdot x^n$, $|x|<1$

练习17.1

1\. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(n!)^2}x^n$

$D_n=\frac{1\times3\times5\times\cdots(2n+1)}{[1\times2\times\cdots(n+1)]^2}\cdot\frac{[1\times2\times\cdots n]^2}{1\times3\times\cdots(2n-1)}=\frac{2n+1}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2+2n+1}\to0$

$r=\infty$　收敛区间 $(-\infty,+\infty)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$　$(a>0,b>0)$

$\frac{1}{D_n}=\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{a(a^n+b^n)+(b-a)b^n}{a^n+b^n}=a+(b-a)\cdot\frac{1}{1+(\frac{a}{b})^n}\to\begin{cases}a & a>b\\ \frac{a+b}{2} & a=b\\ b & a<b\end{cases}=max\{a,b\}$

$r=\begin{cases}a & a\geq b\\ b & a<b\end{cases}$

• $a>b$ 时：代入 $x=a$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}$　$\because\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(\frac{b}{a})^n}=1\neq0$　发散

代入 $x=-a$　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(\frac{b}{a})^n}$　$u_n\nrightarrow0$　也发散

综上，收敛域为 $(-a,a)$

• $a<b$ 时．同理　在 $x=\pm b$ 处发散　收敛域为 $(-b,b)$

• $a=b$ 时　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm a)^n}{2a^n}=(\pm1)^n\cdot\frac{1}{2}$　发散．　收敛域为 $(-a,a)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln(1+n)}$

$\frac{1}{R_n}=\sqrt[n]{n\cdot\ln(1+n)}=\sqrt[n]{\ln(1+n)}=e^{\frac{1}{n}\cdot\ln(\ln(1+n))}\to e^0=1$　$r=1$

$x=1$ 时．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散．（课本P14）

$x=-1$ 时．$\because\left\{\frac{1}{n\ln(1+n)}\right\}$ 递减　由Leibniz判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(1+n)}$ 收敛

收敛区间为 $[-1,1)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1+\frac{\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\to1$　$r=1$

$x=1$ 时：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$　$\because n\to\infty$ 时 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty\neq0$　发散　同理 $x=-1$ 时也发散

收敛区间为 $(-1,1)$

2.

(1) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$ 　　显然收敛区间 $(-1,1)$

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\triangleq S_1(x)-S_2(x)$$

• 求 $S_2(x)$: 　$S_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}=-1-\frac{1}{x-1}$ 　$\therefore S_2(x)=-x-\ln(1-x)$

• 求 $S_1(x)$:
$$\begin{cases} S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^{n+1} \\ xS_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-x)S_1(x)=2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}x^{n+1}=2x^2+\frac{x^3}{1-x}\Rightarrow S_1(x)=\frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \int_0^x S(t)dt=\frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2}+x+\ln(1-x)\triangleq h(x)$$

$$h'(x)=S(x)=\frac{4x-3x^2+x^3}{(1-x)^3}+1-\frac{1}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 　　显然收敛区间为 $[-1,1]$

在 $[-1,1)$ 上 $S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$ 　　$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$

$$\therefore S'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}+S'(0)=-\ln(1-x)$$

$$S(x)=\int_0^x-\ln(1-t)dt+S(0)$$

$$\because \int-\ln(1-x)dx=\int\ln(1-x)d(1-x)=(1-x)\ln(1-x)-\int(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}dx=(1-x)\ln(1-x)+x$$

$$\Rightarrow S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$$

在 $[-1,1]$ 上 由连续性，对 $S(1)$ 处取极限值.

$$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x & -1\le x<1 \\ 1 & x=1\end{cases}$$

(3) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 　　显然收敛区间为 $[-1,1]$

在 $(-1,1)$ 内逐项求导: $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$

$$\therefore x\cdot S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\because [x\cdot S'(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\qquad \therefore x\cdot S'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)\qquad S'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$S(x)=S(0)-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt$$ 注：无法算出

(4) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$　显然收敛区间 $(-1,1)$

注意到 $(n+3)(n+2)(n+1) = (n+3)(n^2+3n+2) = n^3+6n^2+11n+6$

$= n^3+6(n^2+3n+2)-7n-6 = n^3+6(n+1)(n+2)-7(n+1)+1$

$\therefore n^3 = (n+3)(n+2)(n+1)-6(n+1)(n+2)+7(n+1)-1$

$\therefore S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+3}\right)''' - 6\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)'' + 7\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)' - \sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$= \left(\frac{x^4}{1-x}\right)''' - 6\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'' + 7\left(\frac{x^2}{1-x}\right)' - \frac{x}{1-x}$$

$$= -\frac{6x(x^3-4x^2+6x-4)}{(1-x)^4} - \frac{12x(x^2-3x+3)}{(1-x)^3} - \frac{7x(x-2)}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$$

练习17.2

1.

(1) $a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln a)^n}{n!}$

(2) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(3) $(1+x)\ln(1+x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}$

(4) $\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$

$\because (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

$\therefore (1-2x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)}{n!} \cdot (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot (-2)^n}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (同理)

上式 $= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1) x^n$

week 14

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿ 班级 姓名 第 页

习题11

1、(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ $\quad C_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\ (n\to\infty)$

$\because \lim_{n\to\infty} C_n=e$ $\quad \rho=\frac{1}{e}$

级数在 $|\rho|<\frac{1}{e}$ 时收敛，$|\rho|>\frac{1}{e}$ 时发散

$\rho=\frac{1}{e}$ 时：$U_n=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n=e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}\sim e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-n}\to\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0$ 发散

$\rho=-\frac{1}{e}$ 时，$\because |U_n|\not\to 0$，级数发散

综上：收敛半径为 $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ $\quad C_n=\frac{2+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} C_n=3,\ \rho=\frac{1}{3}$

级数在 $|\rho|<\frac{1}{3}$ 时收敛 $\quad |\rho|>\frac{1}{3}$ 时发散

$\rho=\frac{1}{3}$ 时：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{3^{2k-1}}$

$\because \sum\frac{1}{2k}$ 发散，$\sum\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{3^{2k-1}}$ 收敛 (Drichlet) 级数发散

$\rho=-\frac{1}{3}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{3^{2k-1}}$ 同理 可知发散

综上，收敛半径为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

week 14

南開大學 作业纸

系别________ 班级 姓名 第 页

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 中，取 $x=1$ 时，值为 $A_n \to +\infty$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在1不收敛 即 $R \le 1$

以下考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ 的收敛半径：（设为 R'）

$\because \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - a_n}{A_n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 1$ $\therefore R' = 1$

由于 $(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} A_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$\therefore \sum a_n x^n$ 的收敛区间包含了 $\sum A_n x^n$ 的收敛区间. 由此 $R \ge R' = 1$ $\therefore R = 1$

3. (1) $\because$ 在 $(-R, R)$ 上 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都绝对收敛

由柯西定理，$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

(2) 记 $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$，$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n$，$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$

根据条件，$x=1$ 时，三幂级数均收敛 $\therefore R_1, R_2, R_3 \ge 1$

由(1)，在 $(-1,1)$ 内，$u(x)\cdot V(x) = W(x)$ 成立

根据连续性，令 $x \to 1$ $\therefore u(1)\cdot V(1) = W(1)$ 即 $\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n\right)$

4. STEP 1 注意到 $a_0 = S(0) = S(\lim_{m\to\infty} x_m)$ 由和函数连续性，$S(0) = \lim_{m\to\infty} S(x_m) = 0$ 即 $a_0 = 0$.

STEP 2 $\because S(x_1) = S(x_2) = \cdots = S(x_m) = S(x_{m+1}) = \cdots = 0$ 且 $S(x)$ 连续

由罗尔定理，$\exists y_m$ 介于 x_m 与 x_{m+1} 之间，使得 $S'(y_m) = 0$

由此我们找到一列 $\{y_m\}$. $\because x_m \to 0$ $\therefore y_m \to 0$.

由 $S'(x)$ 连续性，$a_1 = S'(0) = S'(\lim_{m\to\infty} y_m) = \lim_{m\to\infty} S'(y_m) = 0$ 即 $a_1 = 0$

....

重复以上过程，可得到对 $\forall n$，$a_n = 0$.

（本题意义）若存在一趋于0点列使 $S(x)$ 值为0，则 $S(x) \equiv 0$

5. 构造 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

对 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 逐项求积分：$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=F(x)$，$\forall x\in(-r,r)$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛　∴级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛区间必包含 $(-r,r]$

$\because \int_0^r f(x)dx=\lim_{x\to r^-}\int_0^r f(x)dx=\lim_{x\to r^-}F(x)$

由 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 在 $(-r,r+1]$ 上内闭一致收敛，根据连续性

$\lim_{x\to r^-}F(x)=F(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$　　即 $\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$

6. 令 $y=e^{-x}$，$x=-\ln y$. 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n=\frac{1}{1+y}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^ny^n$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\int_1^0\frac{-\ln y}{\frac{1}{y}+1}\cdot\frac{1}{-y}dy=-\int_0^1\frac{\ln y}{y+1}dy=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n\ln y\,dy$$

$$=\int_0^1(-\ln y)dy+\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n\ln y\,dy$$

为使上式中积分与级数可换序，以下证明 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n\ln y$ 一致收敛.

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n\ln y=-\ln y\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n=\frac{-\ln y}{1+y}$，下证 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n\ln y\xrightarrow{(0,1]}-\frac{\ln y}{1+y}$：

对 $\forall y\in(0,1]$，$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}y^k\ln y+\frac{\ln y}{1+y}\right|=\left|-\ln y\cdot\frac{1-(-y)^{n+1}}{1+y}+\frac{\ln y}{1+y}\right|=\left|\frac{(-y)^{n+1}}{1+y}\right|=\left|\frac{y^{n+1}}{1+y}\ln y\right|\le|y^{n+1}\ln y|$

$\frac{d}{dy}(y^{n+1}\ln y)=(n+1)y^n(\ln y+\frac{1}{n+1})$，$y^{n+1}\ln y$ 在 $e^{-\frac{1}{n+1}}$ 处取得 max 为 $\frac{1}{e(n+1)}\to 0$.　∴满足一致收敛

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=-\int_0^1\ln y\,dy+\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n\ln y=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 y^n\ln y$$

由于 $\int_0^1 y^n\ln y=\left.\frac{y^{n+1}\ln y}{n+1}\right|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 y^n dy=-\frac{1}{(n+1)^2}$

上式 $=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$　　$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$

7.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n+1}$ 显然 $r=1$，收敛区间为 $[-1,1)$ 所求级数为 $f(-1)$

在 $(-1,1)$ 上，$(xf(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n}=\frac{x^3}{1-x^3}$ 由于 $xf(x)\big|_{x=0}=0$

$\therefore xf(x)=\int_0^x (tf(t))'dt=\int_0^x\frac{t^3}{1-t^3}dt$ $\because \frac{x^3}{1-x^3}=-1+\frac{1}{1-x^3}=-1+\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$\therefore \int\frac{x^3dx}{1-x^3}=-x+\int\frac{dx}{(1-x)(1+x+x^2)}=-x+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{6}\int\frac{2x+4}{1+x+x^2}$

$=-x+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})}{[\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}]^2+1}=-x-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore xf(x)=-x-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right)$ $\forall x\in(-1,1)$

$\because f(x)$ 在 $[-1,1)$ 连续 $-f(-1)=\lim_{x\to-1^+}xf(x)=1-\frac{\ln 2}{3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$. 以下计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$：

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ 显然 $r=1$，收敛区间为 $[-1,1]$ 所求级数为 $f(1)$

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$ $f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}$ 易知 $f(0)=0$ $f'(0)=0$

$\therefore f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)dt=\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}dt=-\ln(1-x^2)$

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=-\int_0^x\ln(1-t^2)dt=2x+(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to1}f(x)=2+2\ln 2$

综上：原级数 $=3+4\ln 2$

✿ week 14

南開大學 作 业 纸

系别＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 第 页

7.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ 由 P189 [例13]: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

上式 $=\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\right]=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{(n+1)(n+2)}$ 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)(n+2)}$. 原级数 $=S(-1)$ $\therefore \int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$

记 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)}$ $\therefore (xS_1(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$ $\therefore xS_1(x)=-x-\ln(1-x)$, $S_1(x)=-1-\frac{\ln(1-x)}{x}$

记 $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)}$ $\therefore (x^2S_2(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}=-1-x+\frac{1}{1-x}$ $\therefore x^2S_2(x)=-x-\frac{x^2}{2}-\ln(1-x)$, $S_2(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}$

$\therefore \int_0^x S(t)dt=S_1(x)-S_2(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x^2}$

$\therefore S(x)=S_1'(x)-S_2'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}+\frac{-x-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}$. 代入 $S(-1)=3\ln 2-2$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k-1)}$

令 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k}}{2k(2k-1)}$ 原级数 $=S(1)$ $S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{2k-1}=\arctan x$. (由 P169 [例13]) $\forall x\in(-1,1)$

$\therefore \int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=S(x)$. 由 $S(x)$ 连续性.

原级数 $=S(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot(n+1)}{n!}$ $\therefore \int_0^x s(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$

$\therefore S(x)=(xe^x)'=(x+1)e^x$ $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=S(2)=3e^2$

week 14

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

8. $f(x)$的收敛区间是$[-1,1]$. 逐项求导: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(n+1)}$ 收敛区间为$[-1,1)$

$\forall x\in[-1,1)$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(n+1)}$ $\therefore f(x)$在$x=-1$处可导

$\because \lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}=+\infty$ $\therefore f(x)$在$x=1$处不可导

9. (1) $y=\arcsin x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (y')^2\cdot(1-x^2)=1$ 两边求导: $2y'\cdot y''\cdot(1-x^2)-2x\cdot(y')^2=0$

由$y'\neq0$ $\therefore y''(1-x^2)=x\cdot(y')^2$ 两边各求n阶导. $y^{(n+2)}+n\cdot y^{(n+1)}\cdot(-2x)+C_n^2\cdot y^{(n)}\cdot(-2)=x\cdot y^{(n+1)}+n\cdot y^{(n)}$

令$x=0$ $\therefore f^{(n+2)}(0)=n^2\cdot f^{(n)}(0)$ $\because f'(0)=1,\ f''(0)=0$ $\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\text{为偶}\\ [(n-2)!!]^2 & n\text{为奇且}n\geq3\end{cases}$

$\therefore \arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(2k-1)!!]}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$. $\forall x\in[-1,1]$

(2) $f'(x)=\frac{4+2x^2}{4+x^4}=\frac{1+\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x^4}{4}}=(1+\frac{x^2}{2})\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x^4}{4})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}x^{4n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot4^n}x^{4n+2}$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)4^n}x^{4n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(8n+6)4^n}x^{4n+3}=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{20}-\frac{x^7}{56}+\cdots$

(3) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $y''=\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(1+x^2)y''=-xy'$ 两边求n阶导.

$(1+x^2)y^{(n+2)}+n\cdot2x\,y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2\cdot y^{(n)}=-x\cdot y^{(n+1)}-ny^{(n)}$ 令$x=0$, $y^{(n+2)}(0)=-n^2y^{(n)}(0)$

$\because y'(0)=1$, $y''(0)=0$ $\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n=2k\\ (-1)^k\cdot[(2k-1)!!]^2 & n=2k+1\end{cases}$

$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k[(2k-1)!!]^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

(4) $\cos^3x=\frac{1}{4}\cos3x+\frac{3}{4}\cos x$

$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(3x)^{2n}$

$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot(3+9^n)\cdot x^{2n}$

10. $\because \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

$\therefore 1-\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}$

$\therefore \frac{1-\cos x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{2n-1}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^5}{720}+\cdots$

$\therefore \int_0^1\frac{1-\cos x}{x}\approx \frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+\frac{x^6}{4320}\Big|_0^1=0.240$

11. 逐项求导: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\cos(2^n x)$ 容易注意其一致收敛

$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\cos(2^n x)$

对 $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{kn}}{n!}\sin(2^n x+\frac{k}{2}\pi)$

令 $x=0$. $\therefore f(x)$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

由于 $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^{2k+1})^n}{n!}=(-1)^k\cdot e^{2^{2k+1}}$, 上式 $=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\frac{e^{3\cdot 2^{2k+1}}}{2k(2k+1)}\to\infty$ 收敛半径 $r=0$.

此级数无法表示 $f(x)$