第十九章 含参变量积分

一、§19.1 含参变量的正常积分

连续性

- $f(x,t)\in C[a,b]\times I \Rightarrow \varphi(t)=\int_a^b f(x,t)dx \in C(I)$
- $\left.\begin{array}{l}\alpha(t)、\beta(t)\in C[c,d]\\ f(x,t)\in C[\alpha(t),\beta(t)]\times[c,d]\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx \in C[c,d]$

积分与极限可换序

$$\left.\begin{array}{l}\forall t\in I,\ f(x,t)\in R[a,b]\\ f(x,t)\xrightarrow[x\in[a,b]]{} h(x),\ t\to t_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}h(x)\in R[a,b]\\ \lim\limits_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b\Big[\underbrace{\lim\limits_{t\to t_0}f(x,t)}_{h(x)}\Big]dx\end{array}\right.$$

积分与求偏导可换序

$$\left.\begin{array}{l}f(x,t)\in C[a,b]\times I\\ f_t'(x,t)\in C[a,b]\times I\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\varphi(t)=\int_a^b f(x,t)dx \text{ 在} I\text{上可导}\\ \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x,t)dx=\varphi'(t)=\int_a^b f_t'(x,t)dx\end{array}\right.$$

变限积分求导公式

$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$，$\alpha(t)、\beta(t)$可导，$f, f_t'$连续

$$\Rightarrow \varphi'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t'(x,t)dx+f(\beta(t),t)\cdot\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\cdot\alpha'(t)$$

二、§19.2 含参变量反常积分的一致收敛

① $f(x,\lambda)$ 连续 $\Rightarrow F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 连续 $\longleftrightarrow$ $u_n(x)$ 连续 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x)$ 连续

$\not\Rightarrow \int_a^{+\infty}$ 连续 $\qquad \not\Rightarrow \sum\limits^{\infty}$ 连续

$+F(\lambda)$一致收 连续✓

② $F(\lambda)=\int_a^{+\infty} f(x,\lambda)dx$ 关于$\lambda\in\Lambda$一致收敛

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0.\ \exists M>a$ 使 当$A>M$时 $\left|\int_A^{+\infty} f(x,\lambda)dx\right|<\varepsilon.\ \forall\lambda\in\Lambda$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M>0$ 使 $\forall A、A'>M.\ \left|\int_A^{A'} f(x,\lambda)dx\right|<\varepsilon\ \ \forall\lambda\in\Lambda$

③一致收敛的判断

1) M判别法：

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \exists\mu(x)\geq 0.\ x\in[a,+\infty)\\ \bullet\ |f(x,\lambda)|\leq\mu(x)\quad\forall x\in[a,+\infty),\ \forall\lambda\in\Lambda\\ \bullet\ \int_a^{+\infty}\mu(x)dx<+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,\lambda)dx \text{ 一致收敛}$$

2) Dirichlet: • $\left|\int_a^A f(x,\lambda)\,d\lambda\right| \le M$. $\quad \forall A>a,\ \forall \lambda\in\Lambda$

• $g(x,\lambda) \overset{\Lambda}{\rightrightarrows} 0 \quad g(x,\lambda)\ \downarrow^{x}$ or $\nearrow_{x}$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,\lambda)\cdot g(x,\lambda)\,dx$ 关于 $\lambda\in\Lambda$ 一致收敛

3) Abel: • $\int_a^{+\infty} f(x,\lambda)\,dx$ 关于 $\lambda\in\Lambda$ 一致收敛

• $|g(x,\lambda)|\le M$. $\forall x\in[a,+\infty)\ \forall\lambda\in\Lambda \quad g(x,\lambda)\searrow^{(x)}$ or $\nearrow_{(x)}$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,\lambda)\cdot g(x,\lambda)\,dx$ 关于 $\lambda\in\Lambda$ 一致收敛

三、§19.3 Γ函数与B函数

① $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$

• 在 $(0,+\infty)$ 任意次可微

• $\alpha>0$ 时 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ 递推式

• $\Gamma(1)=1 \Rightarrow \Gamma(n+1)=n!$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

• $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=B(\alpha,1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ 余元公式 $\alpha\in(0,1)$

② $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

• $B(p,q)=B(q,p)$

• $B(p+1,q+1)=\frac{q}{p+q+1}B(p+1,q)+\frac{p}{p+q+1}B(p,q+1)$

• $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

• $B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \quad 0<p<1$

• $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x\cdot\sin^b x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$

[典例分析]

(例1) 计算 $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$.

$$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx = B(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2!}=\frac{1}{8}\Gamma^2(\tfrac{1}{2})=\frac{\pi}{8}$$

(例2) 证: $B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$ 并由此计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$

令 $x=\frac{t}{1+t}$ 则 $dx=\frac{dt}{(1+t)^2}$

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)^{b-1}\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)^2dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$ 得证.

故有 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}dx=B(\tfrac{5}{4},\tfrac{3}{4})=\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{4})\cdot\Gamma(\tfrac{3}{4})=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

练习19.1

1. (1) 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha}$

① 对 $\forall\alpha$，$\frac{1}{1+x^2+\alpha}$ 在 $[\alpha,1+\alpha]$ 连续，进而可积

② $\alpha\to 0$ 时 $\frac{1}{1+x^2+\alpha}\to\frac{1}{1+x^2}$ 下证其为一致收敛：

$$\sup_{x\in[\alpha,1+\alpha]}\left|\frac{1}{1+x^2+\alpha}-\frac{1}{1+x^2}\right| = \sup_{x\in[\alpha,1+\alpha]}\frac{|\alpha|}{x^4+(2+\alpha)x^2+1+\alpha}$$

记 $f(x)=\frac{1}{x^4+(2+\alpha)x^2+1+\alpha}$ $\quad f'(x)=\frac{-2x(x^2+\alpha+2)}{(x^4+(2+\alpha)x^2+1+\alpha)^2}$ $\quad\alpha\to 0$ 时，$[\alpha,1+\alpha]$ 上 $f(x)$ 单调

$\therefore \sup\limits_{x\in[\alpha,1+\alpha]}\left|\frac{1}{1+x^2+\alpha}-\frac{1}{1+x^2}\right| = |\alpha|\cdot\max\{f(\alpha),f(1+\alpha)\}\to 0$ $\quad\therefore \frac{1}{1+x^2+\alpha}\xrightarrow[\longrightarrow]{[\alpha,1+\alpha]}\frac{1}{1+x^2}\quad(\alpha\to 0)$

由①② 积分与极限可换序：

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha}=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+x^2+\alpha}\,dx=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan(1+\alpha)-\arctan\alpha$$

$\alpha\to 0$ 时，$=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

(2) 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 x^2\cos\alpha x\,dx$

① 对 $\forall\alpha$，$x^2\cos\alpha x$ 在 $[0,1]$ 连续，进而可积

② $\alpha\to 0$ 时 $x^2\cos\alpha x\to x^2$ 下证其为一致收敛：

$$\sup_{x\in[0,1]}\left\|x^2\cos\alpha x-x^2\right\|=\sup_{x\in[0,1]}x^2(1-\cos\alpha x)$$

记 $f(x)=x^2(1-\cos\alpha x)$ $\quad f'(x)=2x(1-\cos\alpha x)+\alpha x^2\sin\alpha x=x(2-2\cos\alpha x+\alpha x\sin\alpha x)\to 2x\geqslant 0\quad(\alpha\to 0)$

$\sup\limits_{x\in[0,1]}\left\|x^2\cos\alpha x-x^2\right\|=f(1)=1-\cos\alpha\to 0\quad(\alpha\to 0)$ $\quad\therefore x^2\cos\alpha x\xrightarrow[\longrightarrow]{[0,1]}x^2\quad(\alpha\to 0)$

由①② 积分与极限可换序：$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 x^2\cos\alpha x\,dx=\int_0^1\lim\limits_{\alpha\to 0}x^2\cos\alpha x\,dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

2. 设 $g(t,x)=f(t)\cdot(x-t)^{n-1}$ 在 $[0,x]$ 连续，$g'_x(t,x)=f(t)\cdot(n-1)\cdot(x-t)^{n-2}$ 在 $[0,x]$ 连续，由定理5

$\Rightarrow F'(x)=\int_0^x f(t)\cdot(n-1)\cdot(x-t)^{n-2}dt=(n-1)\int_0^x f(t)\cdot(x-t)^{n-2}dt$

…… 类似地 $\quad F^{(n-1)}(x)=(n-1)!\int_0^x f(t)dt\quad F^{(n)}(x)=(n-1)!\cdot f(x)$

〈解II〉

P234 练习19.1

1.(1) 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$

记 $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ $\because \alpha、1+\alpha、\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 都关于 $\alpha、x$ 连续

$\therefore$ $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处连续

$\lim\limits_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

(2) 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 x^2\cos\alpha x\,dx$.

记 $f(x,\alpha)=x^2\cdot\cos\alpha x$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 连续 $\therefore h(\alpha)=\int_0^1 x^2\cos\alpha x\,dx$ 在 $[0,1]$ 连续

$\therefore \lim\limits_{\alpha\to 0}h(\alpha)=h(0)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

练习19.2

1. (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin\alpha x\,dx \qquad -\infty<x<+\infty$

$\because \left|xe^{-x}\sin\alpha x\right| \le xe^{-x}$ 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ 收敛 ($\to\infty$时$\sim e^{-x}$)

由M判别法. 积分一致收敛

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx \qquad -\infty<\alpha<+\infty$

取$\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, $A=\dfrac{n\pi}{4}$, $A'=\dfrac{3n\pi}{4}$

$$\left|\int_{\frac{n}{4}\pi}^{\frac{3}{4}n\pi}\frac{x\sin\frac{1}{n}x}{1+x^2}dx\right| \ge \frac{n\pi}{2}\cdot\frac{\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{1+\left(\frac{3n\pi}{4}\right)^2} = \frac{2\sqrt2 n^2\pi^2}{16+9n^2\pi^2} = \frac{\sqrt2}{9+\frac{16}{n^2\pi^2}} \ge \frac{\sqrt2}{25} \triangleq \varepsilon_0$$

$\therefore \exists\varepsilon_0>0 \quad \forall M>0,\ \exists A、A'>0.$ $\exists$点列$\{\alpha_n\}\subset D$. 有

$$\left|\int_A^{A'}\frac{x\sin\alpha_n x}{1+x^2}dx\right| \ge \varepsilon_0$$ $\therefore$ 积分非一致收敛

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx \qquad a\le\alpha\le b$

取 $m=\min\{|a|,|b|\}$ 则 $e^{-(x-\alpha)^2}=e^{-x^2-\alpha^2+2\alpha x}\le e^{-x^2-m^2+2bx}$

而$x\to+\infty$时 $e^{-x^2-m^2+2bx}\sim e^{-x^2}$, 而$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt\pi}{2}$收敛

$\therefore \displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2-m^2+2bx}dx$ 收敛 原积分一致收敛

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}dx \qquad 0\le\alpha<+\infty$

令 $y=x^2$. 考虑 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}dy$.

· $\displaystyle\int_0^A \sin y\,dy\le 2$ 有界

· $\dfrac{1}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}$ 关于y单减 且 $\left|\dfrac{1}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}\right|\le\dfrac{1}{2\sqrt y}\to0$ $(y\to+\infty)$ $\therefore \dfrac{1}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}\rightrightarrows0$ $(\alpha\ge0)$

$\therefore \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}dy$ 一致收敛 (Dirichlet)

即$\forall\varepsilon>0$, $\exists M_0>0$ $\forall b、b'>M$, $\left|\displaystyle\int_b^{b'}\frac{\sin y}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}dy\right|<\varepsilon$

取$M=\sqrt{M_0}$

$\therefore\forall\varepsilon>0.$ $\exists M=M_0^2>0$ $\forall A.A'>M$, $A^2, A'^2>M_0$ $\left|\displaystyle\int_A^{A'}\frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}dx\right| \overset{y=x^2}{=\!=} \left|\displaystyle\int_{A^2}^{A'^2}\frac{\sin y}{2\sqrt y(1+y^{\frac{\alpha}{2}})}dy\right|<\varepsilon$

原积分一致收敛

2. 利用泊松积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$：

$$I = -\int_0^{+\infty} \left(e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}\right) d\frac{1}{x}$$

$$= \left.\frac{e^{-b^2x^2} - e^{-a^2x^2}}{x}\right|_{0^+}^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \left(b^2 e^{-b^2x^2} - a^2 e^{-a^2x^2}\right) dx$$

$$= 2b\int_0^{+\infty} e^{-(bx)^2} d(bx) - 2a\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} d(ax)$$

$$= (b-a)\sqrt{\pi}$$

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿ 第 页

练习19.3.

1. 令 $y=\sqrt[4]{x}$ $\quad\therefore x=y^4$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}} = \int_0^1 \frac{4y^3\,dy}{\sqrt{1-y}} = 4\int_0^1 y^3(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy = 4B(4,\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{4\Gamma(4)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} = \frac{4\Gamma(4)\cdot\cancel{\Gamma(\frac{1}{2})}}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\cancel{\Gamma(\frac{1}{2})}} = \frac{4\times 6}{35\times 3/16} = \frac{128}{35}$$

1. 证: $\int_0^1 xe^{-x^\alpha}dx = \int_0^{1-\delta} xe^{-x^\alpha}dx + \int_{1-\delta}^1 xe^{-x^\alpha}dx \quad (\delta>0)$

$[0,1-\delta]$上: ① xe^{-x^α}显然连续 进而可积、

② $\because |x|<1$ $\therefore x^\alpha \to 0$ $(\alpha\to+\infty)$ $xe^{-x^\alpha}\to x$. 下证此为一致收敛:

$$\sup_{x\in[0,1-\delta]} \left|xe^{-x^\alpha}-x\right| \le \left|e^{-x^\alpha}-1\right| = 1-e^{-x^\alpha} \le x^\alpha \le (1-\delta)^\alpha \to 0 \quad (\alpha\to+\infty)$$

$$\therefore\ xe^{-x^\alpha} \overset{[0,1-\delta]}{\rightrightarrows} x \quad (\alpha\to+\infty)$$

由①②. 积分与极限可换序:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{1-\delta} xe^{-x^\alpha}dx = \int_0^{1-\delta}\left(\lim_{\alpha\to+\infty} xe^{-x^\alpha}\right)dx = \int_0^{1-\delta} x\,dx = \frac{(1-\delta)^2}{2}$$

$[1-\delta,1]$上: $\frac{x}{e^{x^\alpha}} \le \frac{1}{e^{(1-\delta)\alpha}} \le 1$ $\qquad \frac{x}{e^{x^\alpha}} \ge \frac{1}{e}$

$$\therefore \int_{1-\delta}^1 xe^{-x^\alpha}dx \le \delta\cdot 1 = \delta \quad 且 \quad \int_{1-\delta}^1 xe^{-x^\alpha}dx \ge \frac{\delta}{e}$$

综上: $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^1 xe^{-x^\alpha}dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{1-\delta} xe^{-x^\alpha}dx + \lim_{\alpha\to+\infty}\int_{1-\delta}^1 xe^{-x^\alpha}dx$

$$\le \frac{(1-\delta)^2}{2} + \delta = \frac{1}{2}+\frac{\delta^2}{2} \to \frac{1}{2} \quad (\delta\to 0)$$

原式 $= \frac{(1-\delta)^2}{2} + \lim_{\alpha\to+\infty}\int_{1-\delta}^1 xe^{-x^\alpha}dx \ge \frac{(1-\delta)^2}{2}+\frac{\delta}{e} \to \frac{1}{2} \quad (\delta\to 0)$

$$\therefore \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^1 xe^{-x^\alpha}dx = \frac{1}{2}$$

2. 证:

- $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 有界 $\exists M>0,\ |f(x)|\le M,\ \forall x\in[0,1]$ (1)
- $\because f(x)$ 在 0 连续 即 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ 即 $\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta.\ x\in[0,\delta]$ 时 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ (2)

根据以上 δ. $\int_0^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx = \int_0^\delta \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx + \int_\delta^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx$ 拆成两段讨论:

- $[\delta,1]$ 上: $\because \frac{t}{t^2+x^2} f(x)$ 在 $[0,1]\times[\delta,1]$ 上连续

$$\therefore \lim_{t\to0^+}\int_\delta^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x) = \int_\delta^1 \left(\lim_{t\to0^+} \frac{t}{t^2+x^2} f(x)\right) dx = 0$$

即对于上述的 $\varepsilon>0$, $\exists\tau_1>0$. 当 $0<t<\tau_1$ 时 $\left|\int_\delta^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx\right|<\varepsilon$ (3)

- $[0,\delta]$ 上: 由积分中值定理 $\int_0^\delta \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx = f(\xi)\cdot\int_0^\delta \frac{tdx}{t^2+x^2} = f(\xi)\cdot\arctan\frac{\delta}{t}$ $(0<\xi<\delta)$

$\because \lim\limits_{t\to0^+} \arctan\frac{\delta}{t} = \frac{\pi}{2}$

即对于上述的 $\varepsilon>0$ $\exists\tau_2>0$ 当 $0<t<\tau_2$ 时 $\left|\arctan\frac{\delta}{t}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$. (4)

综上所述. 取 $\tau=\min\{\tau_1,\tau_2\}$

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0.\ \exists\tau>0.\ 0<t<\tau$ 时.

$$\left|\int_0^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx - \frac{\pi}{2}f(0)\right| = \left|\int_0^\delta \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx + \int_\delta^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx - \frac{\pi}{2}f(0)\right|$$

$$\le \left|\int_\delta^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx\right| + \left|\int_0^\delta \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx - \frac{\pi}{2}f(\xi) + \frac{\pi}{2}f(\xi) - \frac{\pi}{2}f(0)\right|$$

$$\le \underbrace{\left|\int_\delta^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx\right|}_{\text{由(3)}} + \underbrace{|f(\xi)|}_{\text{由(1)}}\cdot\underbrace{\left|\arctan\frac{\delta}{t}-\frac{\pi}{2}\right|}_{\text{由(4)}} + \frac{\pi}{2}\underbrace{|f(\xi)-f(0)|}_{\text{由(2)}}$$

$$< \varepsilon + M\varepsilon + \frac{\pi}{2}\varepsilon = \left(1+\frac{\pi}{2}+M\right)\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{t\to0^+}\int_0^1 \frac{t}{t^2+x^2} f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0)$

week 15

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

3. (1) $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$

$F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}+\int_x^{x^2} -y^2e^{-xy^2}dy$

(2) $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy$

$F'(x)=\int_0^x \frac{dy}{1+xy}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+xy)\Big|_0^x+\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{2\ln(1+x^2)}{x}$

(3) $F(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x+y)}{x+y}dy \quad (x>0)$

$F'(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(x+y)\cdot(x+y)-\cos(x+y)}{(x+y)^2}dy-\frac{\cos 2x}{2x}$

$=-\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x+y)}{x+y}dy-\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x+y)}{(x+y)^2}dy-\frac{\cos 2x}{2x}$

$=\frac{\cos(x+y)}{x+y}\Big|_x^{\frac{\pi}{2}}+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x+y)}{(x+y)^2}dy-\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x+y)}{(x+y)^2}dy-\frac{\cos 2x}{2x}$

$=-\frac{2\sin x}{2x+\pi}-\frac{\cos 2x}{x}$

(4) $F(x)=\int_0^x f(x+y)dy$ 其中 $f(x)$ 连续

令 $u=x+y$

$F(x)=\int_x^{2x} f(u)du$

$F'(x)=2f(2x)-f(x)$

4.

$$\because u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2a}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau+\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(\xi,t)d\xi$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[a\cdot f(x+a(t-\tau),\tau)+a\cdot f(x-a(t-\tau),\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t f(x+a(t-\tau),\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t f(x-a(t-\tau),\tau)d\tau$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a}{2}\int_0^t f_1'(x+a(t-\tau),\tau)d\tau+\frac{1}{2}f(x,t)-\frac{a}{2}\int_0^t f_1'(x-a(t-\tau),\tau)d\tau+\frac{1}{2}f(x,t)$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^t f_1'(x+a(t-\tau),\tau)d\tau-\frac{a}{2}\int_0^t f_1'(x-a(t-\tau),\tau)d\tau+f(x,t) \qquad (1)$$

$$\because u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left(\int_0^t f(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a}\int_0^t f(x+a(t-\tau),\tau)d\tau-\frac{1}{2a}\int_0^t f(x-a(t-\tau),\tau)d\tau$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2a}\int_0^t f_1'(x+a(t-\tau),\tau)d\tau-\frac{1}{2a}\int_0^t f_1'(x-a(t-\tau),\tau)d\tau \qquad (2)$$

代入(1)(2)，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

5、

(1) $F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{k}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^2\varphi-1+1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{k}F(k)\quad\Rightarrow kF'(k)+F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

要证 $kF'(k)+F(k)=\frac{E(k)}{1-k^2}=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$. 只需证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}d\varphi=0$

只需证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2)-(1-k^2\sin^2\varphi)^2}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}(1-k^2)}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k^4\sin^4\varphi+2k^2\sin^2\varphi-k^2}{(1-k^2)(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)+k^2(1-\sin^2\varphi)}{(1-k^2)(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$

$=\frac{k^2}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{\cos^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi=0$. 即证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-\sin\varphi\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot(-k^2)\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\frac{\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)+k^2\sin^2\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$. 得证，有 $kF'(k)+F(k)=\frac{E(k)}{1-k^2}$

(2) $\because E'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k^2\sin^2\varphi-1+1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=-\frac{1}{k}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\right)$

即 $E'(k)=\frac{1}{k}(E(k)-F(k))$. 又$\because$由(1)，$F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}$

$\therefore E''(k)=\frac{1}{k}(E'(k)-F'(k))-\frac{1}{k^2}(E(k)-F(k))=\frac{1}{k^2}(E(k)-F(k))-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}+\frac{F(k)}{k^2}-\frac{1}{k^2}(E(k)-F(k))$

$=-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}+\frac{F(k)}{k^2}$.

$\therefore E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{1}{1-k^2}E(k)=-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}+\frac{F(k)}{k^2}+\frac{E(k)}{k^2}-\frac{F(k)}{k^2}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$

Week 15

南開大學 作 业 纸

系别________ 班级______ 姓名________ 第 页

6. (1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

令 $I(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx$ 　显然 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = I(1)$, $I(0)=0$

$\because \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 连续

$\therefore I'(a)=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+ax}dx = \frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left(\frac{x+a}{x^2+1}-\frac{a}{1+ax}\right)dx$

$= \frac{1}{1+a^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+a\cdot\arctan x-\ln(1+ax)\right]\Big|_0^1$

$= \frac{1}{1+a^2}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}a-\ln(1+a)\right)$

由Newton-Leibniz公式 $I(1)-I(0)=\int_0^1 I'(a)da = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1\frac{da}{1+a^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{a\,da}{1+a^2}-\int_0^1\frac{\ln(1+a)}{1+a^2}da$

$= \frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{\pi}{8}\ln 2 - I(1)$

$\therefore 2I(1)=\frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)dx$ 　$|a|>1$.

令 $u=x-\frac{\pi}{2}$. $\therefore I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(a^2-\cos^2 u)du$

令 $v=x+\frac{\pi}{2}$ 　$\therefore I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(a^2-\cos^2 v)dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\cos^2 v)dv$ 　(由函数 $\ln(a^2-\cos^2 x)$ 对称性)

$\therefore 2I=\int_0^{\pi}\ln(a^2-\cos^2 x)dx = \int_0^{\pi}\ln(a+\cos x)dx+\int_0^{\pi}\ln(a-\cos x)dx$

$=\int_0^{\pi}\ln|a|dx+\int_0^{\pi}\ln(1+\frac{1}{a}\cos x)dx+\int_0^{\pi}\ln|a|dx+\int_0^{\pi}\ln(1-\frac{1}{a}\cos x)dx$.

由P231 例13. $-1<\theta<1$时, $\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)dx=\pi\cdot\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}$

$\therefore 2I=2\pi\ln|a|+2\pi\cdot\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}{2}$ 　$\therefore I=\pi\ln|a|+\pi\ln\frac{|a|+\sqrt{a^2-1}}{2|a|}=\pi\cdot\ln\frac{|a|+\sqrt{a^2-1}}{2}$

7. $\Rightarrow$ $\because \int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ 对 $\forall t\in I$ 一致收敛. （记 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,t)dx = u_n(x)$）

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists M>a$, 使 $A''>A'>M$ 时. 对 $\forall t\in I$, 有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,t)dx\right| < \varepsilon$

又 $\because a_n \to +\infty$ $\therefore$ 对 $M>0$, $\exists N\in \mathbb{N}^*$. $m>n>N$ 时. 有 $A_m>A_n>M$. 对 $\forall t\in I$, 有:

$$|u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots+u_m(x)| = \left|\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,t)dx + \cdots\cdots + \int_{A_m}^{A_{m+1}} f(x,t)dx\right|$$

$$= \left|\int_{A_n}^{A_{m+1}} f(x,t)dx\right| < \varepsilon$$ $\therefore \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

$\Leftarrow$ 反设 $\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ 在 I 上非一致收敛.

即 $\exists \varepsilon_0>0$. 对 $\forall M>a$, $\exists A''>A'>M$ 和 $t_0\in I$. 使 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,t_0)dx\right| \geq \varepsilon_0$

取 $M_1=\max\{1,a\}$ $\exists A_2>A_1>M_1$ 和 $t_1\in I$. 使 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,t_1)dx\right| \geq \varepsilon_0$

一般地. 取 $M_n=\max\{n, A_{2n-2}\}$ 则 $\exists A_{2n}>A_{2n-1}>M_n$ 及 $t_n\in I$ 使 $\left|\int_{A_{2n-1}}^{A_{2n}} f(x,t_n)dx\right| \geq \varepsilon_0$

由此得到数列 $\{a_n\}$ 递增 且 $\to\infty$.

$\therefore \exists \varepsilon_0>0$. 对 $\forall N\in \mathbb{N}^*$. 只要 $n>N$. 就有某个 $t_n\in I$, 使得:

$$|u_{2n}(t_n)| = \left|\int_{A_{2n}}^{A_{2n+1}} f(x,t_n)dx\right| \geq \varepsilon_0$$

这与 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,t)dx$ 在 I 上一致收敛矛盾.

8. (1) $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^\alpha}dx \quad (\alpha>2)$

对$\forall a>2$. 当$\alpha\geq a$, $x\geq1$时有 $0<\frac{x}{1+x^\alpha}<\frac{x}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-1}}<\frac{1}{x^{a-1}}$ 与α无关

$a-1>1$, 由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a-1}}dx$ 收敛. 根据M判别法 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^\alpha}dx$ 在 $[a,+\infty)$上一致收敛

又 $\frac{x}{1+x^\alpha}$ 在$[0,1]$上有界(无瑕点) $\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^\alpha}dx$ 关于α在$[a,+\infty)$一致收敛.

∴ 关于$\alpha\in(2,+\infty)$内闭一致收敛 ∴ $F(\alpha)$在$(2,+\infty)$上连续

(2) $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx \quad (\alpha>0)$. 对$\forall[a,b]\subseteq[0,+\infty)$

∵ $\left|\int_1^A\cos x\,dx\right|=|\sin A-1|\leq2$, 其关于 $[1,+\infty)\times[a,b]$ 有界

根据 $0\leq\frac{1}{x^\alpha}\leq\frac{1}{x^a}\to0$ 知 $\frac{1}{x^\alpha}\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}0 \ (x\to+\infty)$ 且 $\frac{1}{x^\alpha}$对$\forall x$关于α递减

由Dirichlet $\Longrightarrow$

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}$ 关于$\alpha\in[a,b]$一致收敛, 即关于$\alpha\in(0,+\infty)$内闭一致收敛 ∴ $F(\alpha)$在$(0,+\infty)$上连续

(3) $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2x^2}dx$

$\alpha>0$时. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha x)^2}d(\alpha x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\alpha<0$时 $F(\alpha)=\int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha x)^2}d(\alpha x)=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\alpha=0$时 $F(\alpha)=0$

∴ $F(\alpha)$在$(0,+\infty)$与$(-\infty,0)$连续. 在0处间断.

9. 令 $u_n(\alpha)=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$. 则 $F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\alpha)$

$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

先考虑 $u_0(\alpha)$: 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时. 有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$

又 $\forall b\in(0,1)$. 当 $\alpha\in(0,b]$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时. $\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\le\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\alpha}\le\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{b}$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{b}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^b}dx$ 收敛.

由M判别法 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$ 在 $\alpha\in(0,b]$ 上一致收敛

类似可证 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$ 在 $\alpha\in(0,b]$ 上一致收敛 (令 $y=x-\frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow u_0(\alpha)$ 在 $(0,b]$ 上连续. 由 b 任意性. $u_0(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

令 $x=y+n\pi$ $\quad u_n(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{e^{-y-n\pi}}{|\sin y|^{\alpha}}dy=e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}}{|\sin y|^{\alpha}}dy=e^{-n\pi}\cdot u_0(\alpha)$

于是 $F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\alpha)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}\right)\cdot u_0(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

10. $x\sin(x^3-\lambda x)=\frac{x}{3x^2-\lambda}\cdot(3x^2-\lambda)\sin(x^3-\lambda x)$

- $\left|\int_A^B(3x^2-\lambda)\sin(x^3-\lambda x)dx\right|\le 2$
- $\forall a>0$. 当 $\lambda\in[-a,a]$, $x>\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时. $\left(\frac{x}{3x^2-\lambda}\right)'=-\frac{3x^2+\lambda}{(3x^2-\lambda)^2}<-\frac{3x^2-a}{(3x^2-\lambda)^2}<0$ 单调.

$\left|\frac{x}{3x^2-\lambda}\right|<\frac{x}{3x^2-a}\to 0$ 故 $\frac{x}{3x^2-\lambda}$ 在 $[\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty)$ 上关于 x 单调, 关于 $\lambda\in[-a,a]\rightrightarrows 0$

由 Dirichlet $\int_{\sqrt{\frac{a}{3}}}^{+\infty}x\sin(x^3-\lambda x)dx$ 在 $\lambda\in[-a,a]$ 上一致收敛.

又 $\because x\cdot\sin(x^3-\lambda x)$ 在 $[0,\sqrt{\frac{a}{3}}]$ 有界 (无奇点)

$\therefore\int_0^{+\infty}x\sin(x^3-\lambda x)dx$ 在 $\lambda\in[-a,a]$ 上一致收敛 $\Rightarrow I(\lambda)$ 在 $[-a,a]$ 上连续.

由 a 任意性. 命题得证.

11. $a>b$ 时. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(a+b)x-\cos(a-b)x}{-2x^2}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{\sin tx}{x}dt\right)dx$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_{a-b}^{a+b}\frac{\sin tx}{2x}dt$

由Dirichlet 显然 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dt$ 关于 $t\in[a-b,a+b]$ 一致收敛.

由于 $\frac{\sin tx}{2x}$ 在 $[0,+\infty)\times[a-b,a+b]$ 连续, 累次积分可换序:

$I=\frac{1}{2}\int_{a-b}^{a+b}dt\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_{a-b}^{a+b}\frac{\pi}{2}dt=\frac{\pi}{4}\cdot 2b=\frac{b}{2}\pi$

$a<b$ 时. 类似有 $I=\frac{a}{2}\pi$

$a=b$ 时 $I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2dx=a\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=a\cdot\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\frac{a}{2}\pi$

记 $m=\min\{a,b\}$ 综上有 $I=\frac{m}{2}\pi$

12. 由 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x}dx$

$=\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{3x}d(3x)$

$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名__________ 第 页

13. (1) $\because \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t_0+x}dx$ 收敛. 对 $\forall t>0$, $\frac{t_0+x}{t+x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调有界.

由Abel判别法, $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{t+x}dx$ 收敛.

令 $g(x,t)=\frac{f(x)}{x+t}$, $g_t'(x,t)=-\frac{f(x)}{(x+t)^2}$, $\frac{\partial^k}{\partial t^k}g(x,t)=\frac{(-1)^k\cdot k!\cdot f(x)}{(x+t)^{k+1}}$

$\because f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续 $\therefore g(x,t)$、$g_t'(x,t)$ 在 $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 连续.

由定理3 (P230) $\varphi(t)=\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x+t}dx$ 连续可微且 $\varphi'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{-f(x)}{(x+t)^2}dx$.

由数学归纳法可证 $\varphi(t)$ 当 $t>0$ 任意次可微. 且 $\varphi^{(k)}(t)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot k!\cdot f(x)}{(x+t)^{k+1}}dx$.

(2) $\because \int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{t+x}dx$ 收敛, $\frac{t+x}{(x-t)^2+\varepsilon^2}$ 关于 x 单调有界. 由Abel判别法: $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-t)^2+\varepsilon^2}dx$ 收敛.

对 $\forall t_0>0$ 当 $\varepsilon\to0^+$ 时 $\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}=\frac{1}{\pi}\cdot\arctan\frac{x-t_0}{\varepsilon}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{t_0}{\varepsilon}\right)\to1$

$\therefore \left|\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}-f(t_0)\right|=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{|f(x)-f(t_0)|}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon}{\pi}\left(\int_0^{t_0-\sqrt{\varepsilon}}+\int_{t_0-\sqrt{\varepsilon}}^{t_0+\sqrt{\varepsilon}}+\int_{t_0+\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty}\right)\frac{|f(x)-f(t_0)|}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}dx \triangleq I_1+I_2+I_3$ (ε足够小)

• 关于 I_2: $\because f(x)\in C[0,+\infty)$ $\therefore$ 对 $\forall\delta>0$, $\exists h>0$ $|x|<h$ 时 $|f(x+t_0)-f(x)|<\delta$

$\therefore I_2=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{t_0-\sqrt{\varepsilon}}^{t_0+\sqrt{\varepsilon}}\frac{|f(x)-f(t_0)|}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}dx=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{|f(x+t_0)-f(x)|}{x^2+\varepsilon^2}dx<\delta\cdot\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\varepsilon}{x}\Big|_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}}<\delta$

• 关于 I_1: $\because f(x)\in C[0,t_0-\sqrt{\varepsilon}]$ 设 $|f(x)|\le M$, $x\in[0,t_0-\sqrt{\varepsilon}]$

$\therefore I_1=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{t_0-\sqrt{\varepsilon}}\frac{|f(x)-f(t_0)|}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}dx\le\frac{2M}{\pi}\cdot\arctan\frac{x-t_0}{\varepsilon}\Big|_0^{t_0-\sqrt{\varepsilon}}=\frac{2M}{\pi}\left(\arctan\frac{t_0}{\varepsilon}-\arctan\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\to0$ $\therefore$ ε足够小时 $I_1<\delta$

• 关于 I_3: 由 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-t)^2+\varepsilon^2}dx$ 收敛. 同上可得 $\int_{t_0+\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty}\frac{|f(x)-f(t_0)|}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}dx$ 有界.

$\therefore I_3=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{t_0+\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty}\frac{|f(x)-f(t_0)|}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}dx\to0$ $(\varepsilon\to0^+)$ $\therefore$ ε足够小时 $I_3<\delta$

综上所述. $I_1+I_2+I_3<3\delta$ (δ为任意正数) $\therefore \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left|\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{(x-t_0)^2+\varepsilon^2}-f(t_0)\right|=0$

即对 $\forall t>0$, $\forall\varepsilon>0$ $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon f(x)}{(x-t)^2+\varepsilon^2}dx=\pi f(t)$

14. 令 $t=\frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x-c}$ $\Rightarrow t(b-a)(x-c)=(b-c)(x-a) \Rightarrow \left(t(b-a)-(b-c)\right)x = ct(b-a)-a(b-c)$

$\Rightarrow x=\frac{ct(b-a)-a(b-c)}{t(b-a)-(b-c)} \Rightarrow x-c=\frac{(a-c)(b-c)}{(b-c)-(b-a)t} \Rightarrow \frac{1}{x-c}=\frac{1}{a-c}-\frac{(b-a)t}{(a-c)(b-c)}$, $dx=\frac{(b-a)(a-c)(b-c)}{[(b-c)-(b-a)t]^2}dt$

$x: a\to b$ 时, $t: 0\to 1$.

$$I=\int_a^b \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(x-c)^{p+q}}dx=\int_a^b\left(\frac{x-a}{x-c}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{b-x}{x-c}\right)^{q-1}\cdot\frac{1}{(x-c)^2}dx=\int_a^b\left(\frac{x-a}{x-c}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{b-a}{x-c}-\frac{x-a}{x-c}\right)^{q-1}\cdot\frac{1}{(x-c)^2}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{p-1}t^{p-1}\cdot\left[\frac{b-a}{a-c}-\frac{(b-a)^2t}{(a-c)(b-c)}-\frac{b-a}{b-c}t\right]^{q-1}\cdot\frac{[(b-c)-(b-a)t]^2}{(a-c)^2(b-c)^2}\cdot\frac{(b-a)(a-c)(b-c)}{[(b-c)-(b-a)t]^2}dt$$

$$=\int_0^1\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{p-1}\cdot t^{p-1}\cdot\left[\frac{b-a}{a-c}-\frac{b-a}{a-c}t\right]^{q-1}\cdot\frac{b-a}{(a-c)(b-c)}dt$$

$$=\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{b-a}{a-c}\right)^{q-1}\cdot\frac{b-a}{(a-c)(b-c)}\cdot\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

$$=\frac{(b-a)^{p+q-1}}{(b-c)^p(a-c)^q}\cdot B(p,q)$$

15. 先计算 $I(0)$: 作变换 $t=1-x$ $\quad I(0)=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx$

$2I(0)=\int_0^1\ln\Gamma(x)dx+\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx=\int_0^1\ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)dx=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx$ (余元公式)

$\therefore 2I(0)=\ln\pi-\int_0^1\ln(\sin\pi x)dx=\ln\pi-\int_0^\pi\frac{1}{\pi}\cdot\ln(\sin t)dt$

其中 $\int_0^\pi\ln(\sin t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt \overset{a=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos a)da$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t\cdot 2\cos t)dt-\frac{\pi}{2}\ln 2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin(2t)dt-\frac{\pi}{2}\ln 2$

$=\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln(\sin t)dt-\frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \therefore \int_0^\pi\ln(\sin t)dt=-\pi\ln 2 \quad \therefore 2I(0)=\ln 2\pi,\ I(0)=\ln\sqrt{2\pi}$

又 $I'(a)=\int_a^{a+1}[\ln\Gamma(x)]'dx=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln(a\Gamma(a))-\ln\Gamma(a)=\ln a \Rightarrow I(a)=a\ln a-a+C$

$\because I(0)=\ln\sqrt{2\pi} \quad \therefore I(a)=a\ln a-a+\ln\sqrt{2\pi}$

16.

对 $\forall \delta \in (0,1)$. $\because |x^n \sin\pi x| \le |x^n| \le (1-\delta)^n$, $x\in[0,1-\delta]$

$\because \sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n$ 收敛. 由M判别法 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin\pi x$ 在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛.

故求和与积分可换序: $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx\right] = \int_0^{1-\delta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin\pi x\right]dx = \int_0^{1-\delta}\frac{\sin\pi x}{1-x}dx$

$= \int_\delta^1 \frac{\sin\pi x}{x} = \int_{\delta\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$

$\delta\to0^+$ 时. $\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx\right) = \lim_{\delta\to0^+}\int_{\delta\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$

其中右式 $=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$

关于左式: 对 $\forall \varepsilon\in(0,\delta)$. 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上, $\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx \le \int_0^{1-\delta}(1-\varepsilon)^n dx = (1-\delta)(1-\varepsilon)^n \le (1-\varepsilon)^{n+1}$

$\because \sum_{n=0}^{\infty}(1-\varepsilon)^{n+1}$ 收敛 $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上一致收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛. 又 $\because \int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx$ 连续

故求和与极限可换序: $\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\delta\to0^+}\left(\int_0^{1-\delta} x^n \sin\pi x dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n \sin\pi x dx$

$\therefore \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n \sin\pi x dx$

习题-19(B)

1. (1) 求 $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (a,b>0)$ 无奇点 (可补充定义维持连续性)

注意到 $\frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy$

原式 $= \int_0^1 dx\int_a^b \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dy$ 其中: $\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续

$\therefore = \int_a^b dy\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx$

其中 $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\,dx \xlongequal{\ln\frac{1}{x}=t} \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\cos t\,dt = \frac{1+y}{1+(1+y)^2}$

$I = \int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2}dy = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d(y^2+2y+2)}{y^2+2y+2} = \frac{1}{2}\ln(y^2+2y+2)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+2a+2}{b^2+2b+2}$

(2) 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|a|<1)$! 有奇点

记 $f(x,a) = \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ $\quad I(a) = \int_0^1 f(x)\,dx$ 注意到 $I(0)=0$

$f_a(x,a) = \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1)\times(-1,1)$ 连续

对 $\forall r\in(0,1)$ 当 $a\in[-r,r]$ 时有 $|f_a'(x,a)| < \frac{2r}{(1-r^2)\sqrt{1-x^2}}$, $\forall a$ 与a无关

而 $\int_0^1 \frac{2r}{(1-r^2)\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi r}{1-r^2}$ 可积

由M判别法 $\int_0^1 f_a(x,a)dx$ 关于 $a\in[-r,r]$ 上一致收敛 (可换序)

由r的任意性. 对 $\forall |a|<1$ 有:

$I'(a) = \int_0^1 f_a'(x,a)\,dx = \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$ (令 $x=\sin t$)

$= \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\left(\arctan\frac{x-a}{\sqrt{(1-a^2)(1-x^2)}} + \arctan\frac{x+a}{\sqrt{(1-a^2)(1-x^2)}}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}$

$\Rightarrow I(a) = I(0) + \int_0^a I'(t)\,dt = \int_0^a \frac{-\pi t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)$