第三章 连续

<连续定义> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

<三类间断点>
可去: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但 $\neq f(x_0)$
第一类: x_0 左右极限不等
第二类: x_0 左右极限至少一者不存在

<连续性质> 局部有界性、局部保号性

<复合函数连续性> $\left.\begin{array}{l}\text{内层函数极限存在}\\ \text{外层函数连续}\end{array}\right\}\Rightarrow$ 极限号与外层函数可换序

$R(x)$: 任意点极限为0. 在无理点连续 处处不可导. $R^2(x)$ 处处不可导.
$D(x)$: 任意点极限不存在. 在所有点不连续 处处不可导.
$xD(x)$: 非0点极限不存在. 0是唯一的连续点

南開大學 作业纸

系别＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿ 第 页

练习3.1

1. (1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=1$ $f(0)=1$.

$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ $\therefore f(x)$ 在点 $x_0=0$ 连续.

(2) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{1}{\infty}=0$ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{1+0}=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ $\therefore f(x)$ 在 $x_0=1$ 是第一类间断点.

2. 对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon$. $|x|<\delta=\varepsilon$ 时.

有 $|f(x)-f(0)|\leq|f(x)|+|f(0)|\leq|x|+0=|x|<\varepsilon$. $\therefore f(x)$ 在点 0 连续.

3. 由例15. $D(x)$ 所有点均为第二类间断点. 可构造:

(1) $f(x)=\begin{cases}x-a & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}(x-a)(x-b) & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}x & x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}1 & x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x-\frac{1}{n}} & x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})\\ 0 & \text{else}.\end{cases}$

其中(4)与(6)在点0处的连续性可由第2题知.

练习3.2

1. (1) $f(x)+g(x)$：必不连续．若$f+g$连续，则$g(x)=f+g-f$在x_0连续，矛盾．

$f(x)\cdot g(x)$：可能连续．取$f(x)=x$，$g(x)=x\sin\frac{1}{x}$．f在0连续，g在0不连续．

但$f\cdot g=x\sin\frac{1}{x}$　$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f\cdot g(0)$　$\therefore f(x)\cdot g(x)$在0连续．

(2) $f(x)+g(x)$：可能连续．取$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ -1 & x>0\end{cases}$　f、g在0均不连续．

但$f+g\equiv 0$．在点0处连续．

$f(x)\cdot g(x)$：可能连续．取$f(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}$　f、g在0均不连续．

$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}-x & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}=|x|$在点0处连续．

(3) $f(x)+g(x)$：必不连续．若$f+g$连续，则$f+g$在x_0处有极限存在．

又$\because f(x)$在x_0处存在左、右极限　$\therefore g(x)$在x_0处存在左右极限．

与x_0是$g(x)$的第二类间断点矛盾．

$f(x)\cdot g(x)$：可能连续．取$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 0\\ x & x<0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ \sin\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$　f、g在0均不连续

$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}x^2+x & x\ge 0\\ x\sin\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$　在点0处连续．

2. 引理 若$f(x)$在I上连续，则$|f(x)|$在I上也连续．

$\because f$、g在I上均连续　$\therefore f+g$、$f-g$在I上均连续　$\therefore f+g$，$|f-g|$在I上均连续．

由$\varphi(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$，　$\psi(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$；

φ、ψ在I上均连续．

南開大學 作业纸

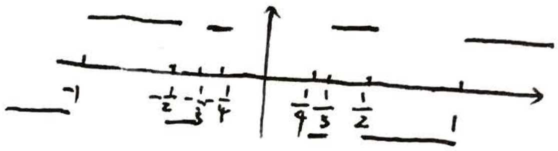
系别________ 班级______ 姓名________ 第 页

练习3.3

1.(1) $x^2-3x+2=0$. 点$x=1,2$处为间断点 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$ 但f在1处无定义 $\Rightarrow$ 1是可去间断点

$\lim\limits_{x\to2+}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ 不存在 $\Rightarrow$ 2是第二类间断点

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x})=\begin{cases}1 & \frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k} \text{ 或 } x>1\\ 0 & x=\frac{1}{k} \quad \forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\\ -1 & \frac{1}{2k}<x<\frac{1}{2k-1} \text{ 或 } x<-1\end{cases}$



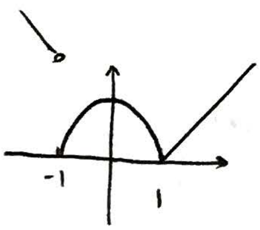
$\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $x_k=\frac{1}{k}$, $\lim\limits_{x\to x_k^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_k^-}f(x)$ 均存在. $\therefore$ 对点$\pm1,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm\frac{1}{k},\cdots$ 均为第一类间断点

而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在 $\therefore$ 0是第二类间断点.

(3) $f(x)=\sin(\pi x)\cdot D(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & x\text{有理}\\ 0 & x\text{无理}\end{cases}=\begin{cases}\sin(\pi x)\neq0 & x\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cup\mathbb{Z}\end{cases}$

由例6步骤可知. 所有整数点上均连续. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$中所有点为第二类间断点.

(4)



$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2} & |x|\le1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$

-1为唯一的间断点. $\because \lim\limits_{x\to-1+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=-2$ $\therefore$ -1是第一类间断点.

2. (1) 令 $t=\frac{1}{x}$. 当 $x\to+\infty$ 时. $t\to0^+$.

原式 $=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt[n]{(1+\alpha_1t)(1+\alpha_2t)\cdots(1+\alpha_nt)}-1}{t}\triangleq\frac{\sqrt[n]{y}-1}{t}$. 其中 $y=(1+\alpha_1t)\cdots(1+\alpha_nt)$.

∵ $y-1=(\sqrt[n]{y}-1)(y^{\frac{n-1}{n}}+y^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1)$ ∴ $\sqrt[n]{y}-1=\frac{y-1}{y^{\frac{n-1}{n}}+y^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}$

∴ $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt[n]{y}-1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{y-1}{t}\cdot\frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+1}=\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{t\to0^+}\frac{y-1}{t}$. ($t\to0$ 时 $y\to1$)

∵ $\frac{y-1}{t}=\frac{(1+\alpha_1t)\cdots(1+\alpha_nt)-1}{t}=\frac{t\cdot\sum\alpha_i+t^2\cdot\sum\limits_{i<j}\alpha_i\alpha_j+t^3\cdot\sum\limits_{p<q<r}\alpha_p\alpha_q\alpha_r+\cdots+t^n\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{t}\to\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\ (t\to0)$

∴ $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt[n]{y}-1}{t}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$.

(2) 令 $x-a=t$. ∴ 原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{\tan(a+t)-\tan a}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{\tan a+\tan t}{1-\tan a\cdot\tan t}-\tan a}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\tan t}{t}(1+\tan^2a)=1+\tan^2a=\frac{1}{\cos^2a}$

(3) 令 $\arctan(a+x)-\arctan a=t$. $x\to0$ 时 $t\to0$.

∵ $\tan t=\frac{(a+x)-a}{1+a(a+x)}=\frac{x}{1+a^2+ax}$ ∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{t}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan t}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+a^2+ax}=\frac{1}{1+a^2}$

(4) 令 $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}=t$. $x\to\infty$ 时 $t\to0$.

∵ $\tan t=\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{2x+1}$ ∴ $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot t=\lim\limits_{t\to0}x\cdot\tan t=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$.

(5) 令 $t=\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\to0\ (x\to a)$

∴ 原式 $=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}=\lim\limits_{t\to0}e^{\sin a\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}$. 令 $y=x-a$.

由于 $\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(y+a)-\sin a}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin a\cos a+\sin a(\cos y-1)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\cos a\cdot\frac{\sin y}{y}=\cos a$

∴ 上式 $=e^{\frac{1}{\sin a}\cdot\cos a}=e^{\cot a}$

(6). 令 $t=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\to 0\quad(x\to+\infty)$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{x}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot tx}=\lim\limits_{t\to0}e^{tx}$.

$\because \lim\limits_{t\to0}tx=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y+\cos y-1}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y+\cos y-1}{\sin y}=1+\lim\limits_{y\to0}\frac{\cos y-1}{\sin y}$

$=1+\lim\limits_{y\to0}\frac{-2\sin^{2}\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}=1-\lim\limits_{y\to0}\tan\frac{y}{2}=1$ $\quad\therefore$ 原式 $=e$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}$.

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2a^{\frac{1}{x}}-1)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2a^{\frac{1}{x}}-2)^{\frac{1}{2a^{\frac{1}{x}}-2}\cdot2x(a^{\frac{1}{x}}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x(a^{\frac{1}{x}}-1)}$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{y\to0}\frac{a^y-1}{y}=\ln a$ $\quad\therefore$ 上式 $=e^{2\ln a}=a^{2}$

(9). $\because \left[\frac{a^x-1}{(a-1)x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{a-1}-\frac{1}{x}\ln x}$. 其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. 而对于 $\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{a-1}$ 而言:

- $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{a^x-1}{a-1}=\ln\frac{1}{1-a}$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{a-1}=0$
- $a>1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{a-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(a^x-1)}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\log_a(t+1)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\ln(t+1)}\cdot\ln a=\ln a$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{(a-1)x}\right)^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}1 & 0<a<1\\ a & a>1\end{cases}=\max\{a,1\}$.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1-(1+\frac{x}{4})}{1+(1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{4}}+(1+\frac{x}{4})^{\frac{2}{4}}+(1+\frac{x}{4})^{\frac{3}{4}}}-\frac{1-(1+\frac{x}{3})}{1+(1+\frac{x}{3})^{\frac{1}{3}}+(1+\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}}}}{\frac{1-(1-\frac{x}{2})}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{7}{36}$

练习3.4.

1. $\because f(x)$在$[a,b]$连续 $\therefore |f(x)|$在$[a,b]$连续 $\therefore |f(x)|$在$[a,b]$有界.

设$|f(x)|_{min}=|f(x_0)|$. 若$|f(x_0)|>0$ 则$\exists y\in[a,b]$使$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|<|f(x_0)|$

与$|f(x_0)|$是$|f(x)|$的最小值矛盾 $\therefore |f(x_0)|=0$ 即$|f(x)|_{min}=0$

$\therefore \exists\xi\in[a,b]$使$f(\xi)=0$.

2. 取$\varepsilon_1=\frac{\eta-A}{2}>0$. $\varepsilon_2=\frac{B-\eta}{2}>0$.

$\exists X_1$, $x<X_1$时$|f(x)-A|\le\varepsilon_1$ $\therefore f(x)-A\le|f(x)-A|\le\varepsilon_1\Rightarrow f(x)\le A+\varepsilon_1=\frac{A+\eta}{2}<\eta$

$\exists X_2$, $x>X_2$时$|f(x)-B|\le\varepsilon_2$ $\therefore B-f(x)\le|f(x)-B|\le\varepsilon_2\Rightarrow f(x)\ge B-\varepsilon_2=\frac{B+\eta}{2}>\eta$.

$\therefore$取$x_3\in(-\infty,X_1)$ 则$f(x_3)-\eta<0$. 取$x_4\in(X_2,+\infty)$ 则$f(x_4)-\eta<0$.

记$F(x)=f(x)-\eta$ $\because F(x_3)\cdot F(x_4)<0$ $\therefore \exists\xi\in(x_3,x_4)$, $f(\xi)=\eta$.

3. 记$f(x_i)_{max}=f(X_M)$. $f(x_i)_{min}=f(X_m)$.

记$c=\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$ $\therefore f(X_m)\le c\le f(X_M)$.

$\because X_m、X_M\in[a,b]$ 设$f(x)$在$[a,b]$上的值域为H. $\therefore [f(X_m),f(X_M)]\subseteq H$.

$\because c\in[f(X_m),f(X_M)]\subseteq H$ $\therefore \exists\xi\in[x_1,x_n]$使$f(\xi)=c$.

习题3.

1. 假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上存在可去间断点 x_0. $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

· 由 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 取 $x=x_0$, $y=x_0-2\Delta x$. 则 $f(x_0-\Delta x) \le \frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_0-2\Delta x)$

令 $\Delta x \to 0$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0)$.

· 由 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 取 $x=x_0-\Delta x$, $y=x_0+\Delta x$. 则 $f(x_0) \le \frac{1}{2}f(x_0-\Delta x)+\frac{1}{2}f(x_0+\Delta x)$.

令 $\Delta x \to 0$ $\therefore f(x_0) \le \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ $\therefore f(x_0) \le \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

$\Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $\therefore$ 在 x_0 连续，矛盾. $\therefore f(x)$ 在 (a,b) 上不存在可去间断点.

假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上存在第一类间断点 x_0.

· 由 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 取 $x=x_0+\Delta x$, $y=x_0-2\Delta x$ 则 $f(x_0-\frac{1}{2}\Delta x) \le \frac{1}{2}f(x_0+\Delta x)+\frac{1}{2}f(x_0-2\Delta x)$.

令 $\Delta x \to 0$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

· 由 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 取 $x=x_0-\Delta x$, $y=x_0+2\Delta x$. 则 $f(x_0+\frac{1}{2}\Delta x) \le \frac{1}{2}f(x_0+2\Delta x)+\frac{1}{2}f(x_0-\Delta x)$.

令 $\Delta x \to 0$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) + \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. 与 x_0 是第一类间断点矛盾 $\therefore f(x)$ 在 (a,b) 上不存在第一类间断点.

综上所述. 又 $\because f(x)$ 在 (a,b) 上不存在第二类间断点

$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 上连续

2. 不妨设$f(x)$在$[a,b]$递增，又设$f(x)$在$[a,b]$上有间断点x_0

由习题1(A)-21. $f(x)$在x_0处有左、右极限，且$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)\le f(x_0)\le\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$.

设$A=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$，$B=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ ∵x_0是间断点 ∴$A<B$.

且由于$f(x)$递增，∴对于$C\in(A,B)$，不存在$x\in[a,b]$使$f(x)=C$.

这与$f(x)$可取遍$[f(a),f(b)]$间所有值矛盾 ∴$f(x)$在$[a,b]$上无间断点 即$f(x)$在$[a,b]$连续

3. (1) 在$f(x+y)=f(x)+f(y)$中，取$x=y=0$. ∴$f(0)=0$.

取$y=-x$ ∴$f(x)+f(-x)=f(0)=0$ ∴$f(x)$是$\mathbb{R}$上的奇函数.

取$x=x_0$，$y=\Delta x$ ∴$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$. 令$\Delta x\to0$ ∴$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$

取$x=x_0$，$y=-\Delta x$ ∴$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-f(\Delta x)$ 令$\Delta x\to0$ ∴$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$

∴$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x_0)$ $\Rightarrow$ $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ ∴$f(x)$在x_0连续. 由x_0任意性，$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续.

(2) 由$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 易知$m,n\in\mathbb{N}^*$时 $f(mx)=mf(x)$ 与 $f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x)$成立.

∴$f(\frac{m}{n}x)=\frac{1}{n}f(mx)=\frac{m}{n}f(x)$. 令$x=1$，∴$f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1)$.

即$f(x)=x\cdot f(1)$ 对$\forall x\in\mathbb{Q}$均成立.

而：对$\forall x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. ∵$f(x)$连续 ∴∃有理数列$\{q_n^{(x_0)}\}\to x_0$

由海涅定理 $\lim\limits_{n\to\infty}f(q_n^{(x_0)})=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(1)\cdot x_0$

即$f(x)=x\cdot f(1)$ 对$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$也成立.

综上：∃常数$a=f(1)$，使$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=ax$.

4. ∵ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续 ∴ $f(x)$ 在 1 连续，即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

由海涅定理，∃ 收敛于 1 且不为 1 的数列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

对 $\forall x>0$ 且 $x\neq 1$ 取 $x_n=\sqrt[2^n]{x}=x^{2^{-n}}$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{x})=f(1)$.

又∵ 由 $f(x)=f(x^2)$ 知 $f(\sqrt[2^n]{x})=f(\sqrt[2^{n-1}]{x})=\cdots=f(\sqrt{x})=f(x)$. ∴ $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{x})=\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=f(x)=f(1)$.

∴ 对 $\forall x>0$ 且 $x\neq 1$. $f(x)=f(1)$. 特别地 $f(1)=f(1)$. ∴ $f(x)=f(1)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 成立.

5. 仅对 $M(x)$ 证明，$m(x)$ 同理.

由于 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 递增，由习题 1A-21 知在 (a,b) 上任意一点其左右极限均存在，对 $\forall x_0\in[a,b]$.

(1) 验证 $M(x_0-)=M(x_0)$:

- $\forall x<x_0$. 由单调性 $M(x)\le M(x_0) \Rightarrow M(x_0-)\le M(x_0)$
- $\forall x<x_0$. $f(x)\le \sup\limits_{t\in[a,x]} f(t)=M(x)\le M(x_0-)$ 两边对 x 求 max 有 $\max\limits_{x\in[a,x_0)} f(x)\le M(x_0-)$.

  由 $f(x)$ 连续性，知 $\max\limits_{x\in[a,x_0)} f(x)=\max\limits_{x\in[a,x_0]} f(x)=M(x_0)$ ∴ $M(x_0)\le M(x_0-)$

(2) 验证 $M(x_0+)=M(x_0)$:

- 由单调性可知 $M(x_0)\le M(x_0+)$
- 反设 $M(x_0)<M(x_0+)$. 则 ∃ $\varepsilon>0$ 使 $M(x_0+)>M(x_0)+\varepsilon$.

  ∴ 对 $\forall z>x_0$. $\max\limits_{t\in[a,z]} f(t)=M(z)>M(x_0+)>M(x_0)+\varepsilon$.

  ∴ ∃ $\tilde{z}\in[a,z]$ 使 $f(\tilde{z})>M(x_0)+\varepsilon\ge f(x_0)+\varepsilon$. 可进一步验证 $\tilde{z}\in[x_0,z]$

  ∴ f 在 x_0 不连续，矛盾 ∴ $M(x_0)\ge M(x_0+)$

综上：$M(x_0)=M(x_0+)=M(x_0-)$ ∴ $\lim\limits_{x\to x_0} M(x)=M(x_0)$ ∴ $M(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

6. 令 $F(x)=f(x)-x$. $\because F(a)=f(a)-a\geq 0$ $F(b)=f(b)-b\leq 0$.

且$F(x)$在$[a,b]$连续，由$F(a)\cdot F(b)\leq 0$，由根的存在定理，$\exists\,\xi\in[a,b]$使 $f(\xi)=\xi$.

7. $n=1$时，取$x_1=0$，显然成立.

$n\geq 2$时，令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，$x\in[0,1-\frac{1}{n}]$

$$\because \begin{cases} F(0)=f(0)-f(\frac{1}{n}) \\ F(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n}) \\ F(\frac{2}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{2}{n}) \\ \cdots\cdots \\ F(1-\frac{1}{n})=f(1-\frac{1}{n})-f(1) \end{cases} \Rightarrow \text{相加} \Rightarrow F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(1-\frac{1}{n})=f(0)-f(1)=0.$$

设 $F(\frac{1}{n_0})=\min\{F(0),F(\frac{1}{n}),\cdots,F(1-\frac{1}{n})\}$

$F(\frac{1}{n_1})=\max\{F(0),F(\frac{1}{n}),\cdots,F(1-\frac{1}{n})\}$

$\because F(\frac{1}{n_0})\leq \frac{1}{n}\left(F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(1-\frac{1}{n})\right)\leq F(\frac{1}{n_1})$.

由介值定理，$\exists$介于$\frac{1}{n_0}$与$\frac{1}{n_1}$之间的x_n，使$F(x_n)=\frac{1}{n}(F(0)+\cdots+F(1-\frac{1}{n}))=0$ 即 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$.

8. (补充) 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续且不恒为常值，若$f(x)$是周期函数，则其必有最小正周期.

证：在$[x_0,x_0+T]$上，设 $f_{max}=f(x_1)$，$x_1\in[x_0,x_0+T]$

令 $F(x)=f(x+1)-f(x)$，在$\mathbb{R}$上连续.

$\because F(x_1)=f(x_1+1)-f(x_1)\leq 0$，$F(x_1-1)=f(x_1)-f(x_1-1)\geq 0$

$\therefore F(x_1)\cdot F(x_1-1)\leq 0$ 由根的存在定理，$\exists\,\xi\in[x_1-1,x_1]$使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi+1)=f(\xi)$.

9. (1) 这样的 $f(x)$ 不存在. 反设: $\exists f$ 使 $f(x)=c$ 对 $\forall c\in\mathbb{R}$ 有两个解.

$\therefore \exists x_1<x_2$ 使 $f(x_1)=f(x_2)=1$. $\because f(x)\in C[x_1,x_2]$ 设 $\underset{[x_1,x_2]}{f_{max}}=M$, $\underset{[x_1,x_2]}{f_{min}}=m$.

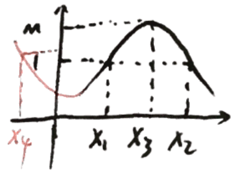
由于 M、m 中至少一者不为1. 不妨设 $M\neq 1$ $\therefore M>1$.

设 $\underset{[x_1,x_2]}{f_{max}}=f(x_3)$. $x_3\in(x_1,x_2)$. 由介值定理, $\forall c\in(1,M)$, $\exists x_1<z_c<x_3<y_c<x_2$ 使 $f(z_c)=f(y_c)=c$.

此外. 由于 $(-\infty,x_1)$ 上有 $f(x)<1$ 恒成立.

[如若不然, 则 $\exists x_4$ 使 $f(x_4)\geq 1$. 则对 $\forall \tilde{c}\in(1,f(x_4))$, $\exists u_{\tilde{c}}\in(x_4,x_1)$ 使 $f(u_{\tilde{c}})=\tilde{c}$.

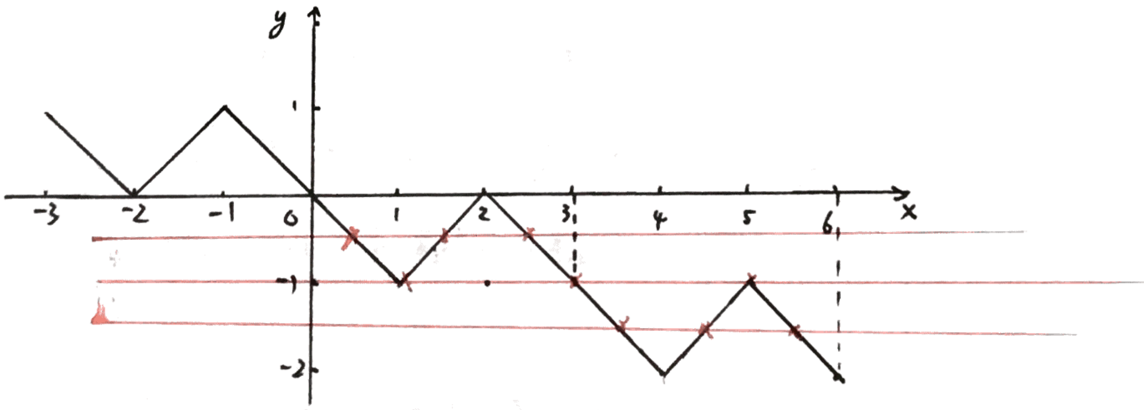
$\therefore f(x)=\tilde{c}$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在至少三个根 $u_{\tilde{c}}$、$y_{\tilde{c}}$、$z_{\tilde{c}}$、矛盾]



类似地, $(x_2,+\infty)$ 上有 $f(x)<1$ 恒成立.

因此 $f(x)\leq M$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 恒成立. $\therefore f(x)=M+1$ 无解. 矛盾.

(2) 取 $f(x)=\begin{cases} -(x-3n)-n & 3n\leq x<3n+1 \\ x-(3n+2)-n & 3n+1\leq x<3n+2 \\ -[x-(3n+2)]-n & 3n+2\leq x<3n+3 \end{cases}$ $n\in\mathbb{Z}$ 符合题意.



南开大学 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

10. (1). $\because \lim_{x\to+\infty} f(x)=A$. $\therefore \exists X_0>a$, $x>X_0$时 $|f(x)-A|<1$ $\therefore |f(x)|<1+|A|$.

$\because f(x)$在$[a,X_0]$连续 $\therefore f(x)$在$[a,X_0]$有界 $\therefore x\in[a,X_0]$时, 设$|f(x)|\le M$.

$\therefore$对$\forall x\in[a,+\infty)$, $|f(x)|\le \min\{M, 1+|A|\}$. 即$f(x)$在$[a,+\infty)$有界.

(2). $\because \lim_{x\to+\infty} f(x)=A$. $\therefore \exists \delta>a$. 当$x>\delta$时. 对$\forall \varepsilon>0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$成立.

① 若$\exists X_0>a$ 使 $f(X_0)-A>0$. 取 $\varepsilon=f(X_0)-A$.

由 $|f(x)-A|<|f(X_0)-A|$ 知 $f(x)<f(X_0)$. $\forall x\in[\delta,+\infty)$.

又$\because f\in C[a,\delta]$ $\therefore f$在$[a,\delta]$上存在max. 设$\underset{[a,\delta]}{f}\ max=f(X_1)$. $X_1\in[a,\delta]$.

$\therefore f_{max}=\max\{f(X_0), f(X_1)\}$

② 若$\exists X_0<a$ 使 $f(X_0)-A<0$.

同理可证 f存在min.

③ 若 $f(x)\equiv A$. 则 $f_{max}=f_{min}=A$.