统计学院本科生 2022——2023 学年第 2 学期随机过程课程期末考试试卷（A 卷）

专业： **年级：** **学号：** **姓名：** **成绩:**

草 稿

得 分

一 、（本题共 25 分，第一小问 10 分，其余小问 5 分）

设到达某银行的顾客人数 N 服从泊松过程，其速率（rate)为每小时 6 人，已知银行从每天上午 9：00 开始营业。

（1）求出开始营业后一小时内无顾客到达的概率；求出在上午 10：00 到上午 11：00 之间有大于等于两个顾客到达的概率；若从中午 12：00 开始数，求第四个顾客的期望到达时间。

（2）已知在开始营业后的一小时内有两个顾客到达，问在开始营业后的 20 分钟内至少有一个顾客到达的概率。

（3）已知 9：20 前有 3 名顾客到达，求第 4 名顾客在 9：30 前到达的概率。

（4）求 9：20 前恰有两名顾客，且 9：10 到 9：30 之间恰有两名顾客的概率。

得 分

二、（本题共　15　分）

证明概率转移矩阵 P 为如下矩阵的离散马尔科夫链有多个平稳分布，并求出P^n的极限$(n\rightarrow\infty)$.

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

得 分

三、（本题共　20 分，每小题 10 分）

X 为可数状态空间 S 上具有时间齐次性(time homogeneity)连续马尔科夫链（即 P(X(t+s)=i|X(t)=j)=P(X(s)=i|X(0)=j))，转移速率矩阵 $Q=(q_{ij})$, $i,j\in\mathbf{S}$. 连续马尔科夫链的跳跃时间（jump time）定义为

$$T_0=0，T_n:=inf\{t>T_{n-1}:X(t)\neq X(T_{n-1})\},n\geq 1.$$

（1）对于任意一个状态 i ∈S, 令τ_i表示其在状态 i 停留的时长，证明其服从指数分布，并给出其均值。(Hint: 利用无记忆性证明：$P(\tau_i>s+t|\tau_i>s)=P(\tau_i>t)$, 其中$\tau_i>s+t$ 意味着 $X(u)=i, 0\leq u\leq s+t$, 结合时间齐次性).

（2）定义$X_n=X(T_n)$, n ≥0. 证明X_n是离散马尔科夫链并求出其转移概率矩阵 P。

得 分

四、（本题共 20 分，每小题 10 分）

考虑一个排队模型，只有一个服务台（single server), 顾客到达服务台的过程为速率为 λ的泊松过程，但并不是每一位顾客都会进入到系统中，已知顾客到达服务台后只有概率为 p 的可能性会停留在系统中（有(1-p)的概率会立刻离开）。服务台服务的时长服从参数为μ的指数分布。

(1)将该排队模型改写成连续马尔科夫链模型，即定义当前状态X_t的含义，给出状态空间 S 与转移概率矩阵 Q。

（2）计算极限概率（limiting probability) 以及繁忙期的平均时长（mean length of busy periods).

得 分

五、（本题共　20 分，每小题 10 分）

蝙蝠侠在一个方格中追小丑。小丑和蝙蝠侠只能在从一个角落跳到临近角落。在每一步中，蝙蝠侠都会以概率 α 留在他当前的角落，否则移动到临近的一个随机角落。小丑以概率 β 留在他当前的角落，否则跳到临近的角落。

(1)　以小丑与蝙蝠侠之间的距离（小丑和蝙蝠侠在对角，则距离为 2；在同一角落，则距离为 0；在邻近角落，则距离为 1）为状态点，给出概率转移矩阵。

（2）若小丑与蝙蝠侠的初始位置是在对角，求出蝙蝠侠追上小丑的期望时间。(Hint:条件在第一步跳跃上）