

## Preface

## 前言

笔者不才，在“数学不难”系列之前还著有“机器学习”系列，两个系列同属“鸢尾花书”学习框架。

“机器学习”系列全套 7 本，致力于提供面向“准人工智能时代”的有趣、有料、有益的“数学 + 编程 + 可视化 + 机器学习”的学习生态。这套书全系已经出版，收获到了广大读者的肯定，这反而让笔者战战栗栗、如履薄冰。

### 为什么创作“数学不难”系列？

既然有了“机器学习”系列，为什么还要另开炉灶？

简单来说，五年前，从开始在 GitHub 开源“机器学习系列”的第一本书稿，虽然笔者已经尽量拉低视角，但仍然有很多“零基础”读者陆续反馈“机器学习”系列的数学部分“太难”（当然也有高手反馈太简单）。此外，很多读者反馈“机器学习”系列 7 本书体系庞大，从数学到机器学习，最容易遇到的障碍就是数学基础概念部分。

而“数学不难”就是关注零基础读者学习感受的新作品。“数学不难”每个分册尽量把基础概念掰开揉碎，讲得清清楚楚，全力提高可学性。

“数学不难”不仅是“机器学习”系列的数学基础学习伙伴，更是帮助不同阶段学习者夯实数学基础的刚需使命：

- ▶ 适用于中学生夯实信息学竞赛的数学基础。
- ▶ “数学 + 编程 + 可视化”帮助本科生领会数学之美，同时学以致用。
- ▶ 毕业后回炉再造，串联知识网络，加深理解，构建更扎实的数学思维。
- ▶ 为考研数学备考提供清晰的思路，更轻松地掌握数学工具，减轻学习负担。
- ▶ 帮助编程学习者、程序员理解编程背后的数学原理。
- ▶ 零基础学数学、入门编程的好帮手，让文科生也能一网打尽核心知识，减小焦虑，跨界无忧。

### AIGC 全程伴读

AI 的高速发展，已经让大语言模型 (DeepSeek、ChatGPT 等) 成为学习的良师益友。大语言模型作为工具，正在以前所未有的速度渗透到各个领域，从文本生成、代码编写到科学研究和金融分析，它的触角几乎无处不在。教育方面，大语言模型可以组织知识，构建个性化学习路径，还可以提供实时解答、可视化复杂概念，并增强学习的互动性。

AI 伴读已经是教育的趋势，有着巨大的现实意义。

“数学不难”也尝试让大语言模型成为教学的生态的一部分，并试图引导读者将 AI 伴读这种学习方式深入到读者未来的学习模式中。

## “数学不难”系列不同于“机器学习”系列

---

“机器学习”系列把“编程 + 可视化 + 数学 + 机器学习”这几个关键元素融会贯通，其学习终点是机器学习；而“数学不难”则强调数学概念的透彻理解，并作为工具应用起来，其学习起点和重点都是数学。

“机器学习”系列是 7 本一套的宏大机器学习体系；“数学不难”则聚焦数学板块（线性代数、高等数学、概率统计）为单位，“轻巧并专注”。

在数学难度上，“数学不难”更适合零基础读者，更简单，更基础；但是，“数学不难”在基础数学知识网络上更全面。

“机器学习”系列特别强调“可视化编程”中的“编程能力”；“数学不难”中的“编程 + 可视化”仅仅是拆解并实施数学概念的手段，而不是目的。

“数学不难”相对“机器学习”系列，即便是相同的知识点，因为需要解决的问题不一样，所以内容也全部重写，绝大部分图片重新创作，可视化方案更为简洁。

学过“机器学习”系列的读者，如果感觉毫无障碍，则无需阅读“数学不难”；如果感觉层峦叠嶂，可以通过“数学不难”扫清障碍后反身再学习“机器学习”系列，相信一定豁然开朗。

先学“数学不难”打好基础的读者，如果有需要，可以进一步学习“数学大系”，迈向机器学习算法、应用——这才是数学 + 编程所产生的生产力之所在。

## AI 时代，数学不是没用而是变得更重要了

---

AI 工具的盛行，让很多工作变得简单高效。我们需要思考一个问题：如果 AI 能干这么多事情，未来我们的职业竞争力来自哪里？

一个现实场景：一家企业优化了 60% 的程序员，留下的主要是架构师和算法工程师。过去，他们带领团队协作完成开发工作，而现在，他们与 AI 并肩协作，高效完成任务。

数学，是理解世界的基础，是解决问题的重要工具，是驱动类似 DeepSeek、ChatGPT 等炙手可热的大语言模型运行的底层逻辑。面对日益智能的大语言模型，我们不仅要学会使用它们，更要具备足够的数学素养，以理解其原理、识别其局限，避免被‘忽悠’或误导。

有了 DeepSeek、ChatGPT，也不需要大家死记硬背定理公式！

理解，而不是死记硬背。只有掌握扎实的数学基础，我们才能与这些智能工具‘平等’对话，充分发挥其潜力，提高工作、学习效率。在这个智能化时代，数学不再只是学科知识，而是每个人都应具备的核心竞争力。

把“为数学而数学”留给“天才”；让“普通人”平等地、高效地理解、使用数学工具箱中常用工具，是“数学不难”的追求。

对于“普通人”，不管是理工科，还是文科，学好线性代数（外加矩阵论的一部分知识）、高等数学（单变量、多变量微积分，外加优化方法）、概率统计（一元、多元），应付大部分的数学应用场景就足够了。

总而言之，基础数学知识“理解力”是决定职业天花板高度的决定性指标之一。

## 编程不是目的，编程是工具，是手段

---

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

在人工智能快速发展的今天，编程早已不仅仅是程序员的技能，而成为每个人都应掌握的“第二语言”。和掌握一门外语一样，编程已经成为“必修课”！就像英语曾是全球化时代的通行证一样，编程正在成为数据时代的重要工具。

在“数学不难”中，学习编程的目的，并不是让所有人都成为“码农”，而是为了更高效地解决实际问题，让数学、科学、工程、金融等领域的理论真正落地，转化为可执行的方案。即便使用 DeepSeek、ChatGPT 等等工具来生成代码，你仍然需要清楚地提出需求，理解代码的功能，知道如何修改和优化，并掌握部署方法。

AI 工具的确提高了编程效率，但也对编程能力提出了更高的要求，要求使用者具备逻辑思维、问题分析和代码调试的能力。

“数学不难”也试图帮助大家入门、提升编程能力，解决具体问题。

### 解决方案：编程 + 数学

---

笔者认为，边学数学，边用 Python 编程计算验证，是“普通人”学习数学、学习编程的高效方案。

编程让数学工具落地，缩短理论到实践的距离；数学赋予编程逻辑与深度，拓展技术的边界。

数学提供了严谨的逻辑思维和强大的计算能力，而 Python 等编程语言则让这些数学工具得以快速实现。

特别是在自学过程中，“边学数学，边用 Python 计算”是一种高效的方法，它不仅帮助大家加深对数学概念的理解，还能培养实践能力，让知识不再停留在纸面上，而是成为可以被验证、应用的工具。

### 最优解：编程 + 数学 + 可视化

---

可视化是鸢尾花书“机器学习”系列的利器！可视化当然也是“数学不难”的看家宝！

数学不仅仅是一系列符号和公式，更是对世界规律的抽象表达。

真实物质世界是几何世界。人类是视觉学习者，复杂概念应该通过可视化呈现，使学习过程更直观、易懂。笔者认为，最好的学习方式，莫过于将抽象的数学概念可视化，让每个公式都能在脑海中形成直观的几何画面。

“数学不难”给每一个话题，配备大量优质平面可视化方案，以及可视化视频。“数学 + 编程 + 可视化”这种学习方式不仅能大幅降低理解难度，更能让知识在大脑中留下深刻的印象，真正做到“过目不忘”。

相比于死记硬背，数学可视化让我们从直觉上掌握核心概念，从而更轻松地运用数学工具解决实际问题。掌握这种学习方法，就意味着你不仅在学数学，更是在训练思维，让每个公式都成为解决问题的有力武器。

**⚠ 注意**，并不是所有读者都需要掌握复杂的可视化编程，因此，“数学不难”虽然提供大量的可视化方案，但是编程部分强调“计算”，而不是画图。有“可视化编程”需求的读者可以参考“机器学习”系列。

### 感谢

---

特别感谢同学们、读者朋友们的信任！“机器学习”系列开源、出版得到了还能多同学的大力支持。很多同学留言、邮件告诉笔者，他们把“机器学习”系列从头到尾翻了很多遍，配套代码也都跑了不止一

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

遍，而且收获满满。很多同学还提出批评意见。在笔者眼里，这些互动比任何“奖项”都更加珍贵。它们不仅证明了这套书的价值，更是推动笔者不断更新内容、优化可视化方案、打磨细节的最大动力。

特别感谢清华大学出版社的栾大成老师一路陪伴。毫不夸张地说，没有栾大成老师，就没有鸢尾花书“机器学习”系列，也不会有“数学不难”！这几年，笔者几乎每天都要和栾大成老师“聊上几句”，聊天话题不限于创意、结构、内容、排版、校对、印刷、图书周边、生活工作琐碎……

“数学不难”创作团队又增加了一位新伙伴——崔影 (崔崔)！崔崔拥有哈工大、加拿大 McMaster 大学双硕士学位，是我多年的好友，和我一样特别热爱数学可视化。从编程、调试、敲定素材，到剪片、后期处理，“数学不难”配套的视频都是崔崔担纲完成整个制作流程。

## Acknowledgement

# 致谢

To my parents.

谨以此书献给我的母亲父亲

## How to Use the Book

# 使用本书

### “数学不难”有哪些创作特点？

---

**读者看不懂，是作者的问题。**全媒体直接连线作者：请大家告诉我哪里看不懂，我来改！

**不预设门槛，不做筛选。**特别**关注零基础读者的学习体验**，假设读者什么都不知道。

**以提高兴趣，满足好奇心，产生内驱力**，为目标。

**学以致用，以用为主**，用数学工具解决具体问题。

铺垫式、启发式学习法。**把知识连成网络**，在不同位置以不同角度、强化同一概念的理解。

不贪多，不求全，**讲透知识**才周全。

创新，创造，观念引导，而**不死记硬背，不刷题，不拼解题技巧**。把死记硬背留给语言模型。

**赏心悦目，数学一定要美。**践行“数学 + 艺术”，用《可视之美》的图像水准挖掘“简单”数学概念背后的几何直觉。

“数学不难”提供**更丰富、更精彩**的可视化方案，放飞你的想象力。用图像解释每一个公式、每一个定理，图像细节丰满，但每个细节都服务于知识点，确保过目不忘。

**把数学打扮成人见人爱的样子**，公式尽量少，讲解口语化。

“数学不难”每节提供习题，提供一个**可扩展的学习框架**。提供更高效、不容易忘记的学习路径。**结合大语言模型** (DeepSeek, ChatGPT 等) **的学习体验**。有引导的自主学习，习题中用 DeepSeek\ChatGPT 学习拓展知识点。

**免费开源！**保持“机器学习”系列的优良传统。PDF 书稿，Python 代码，视频，全部免费开源。

**⚠ 特别声明：**虽然“数学不难”覆盖且不限于大学本科数学绝大部分知识点，但并不试图取代传统数学教学模式，仅仅作为一个补充，提供**另一条学习路径，短期内也没有教学课件的制作计划**。“数学不难”也会推介进阶经典教材，向这些图书致敬。

### “数学不难”适合哪些读者？

---

写给觉得抽象数学符号很枯燥，但是**对几何图形敏感的人**。

觉得数学**“好玩儿”**，数学**“很美”**的读者。

想**开窍**，提高**好奇心**，提升**求知欲**，提升**空间想象力**。

**不仅仅满足于“题海战术、解题技巧”**的读者。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

**再捡起来数学**。如果你放弃数学，或被告知放弃数学，不妨试试“数学不难”！

数学底子好的读者，可以关注“数学不难”的**美学体验**。

想把“**数学 + 编程 + 可视化**”三者结合起来的读者。

想知道**数学有什么用**、**数学怎么用**的读者。

学编程，但又**漫无目的**的读者。

## 配套资源

“数学不难”提供的配套资源有以下几个：

- ◀ 纸质图书；
- ◀ PDF 稿件，方便移动终端学习；请大家注意，纸质图书经过出版社五审五校修改，内容细节上会和 PDF 文件有出入。
- ◀ Python 代码文件 (Jupyter Notebooks)；
- ◀ 有趣有料短视频，提升空间想象力、几何直觉。

本系列丛书的 PDF 书稿、Python 代码文件下载地址为：

- ◀ <https://github.com/Visualize-ML>

Python 代码文件会不定期修改，请大家注意更新。图书配套的 PDF 书稿也上传到这个 GitHub 账户。因此，建议大家注册 GitHub 账户，给书稿文件夹标星 (star) 或分支克隆 (fork)。

想专门学习 **Python 编程** 的读者，建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下，学习《编程不难》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book1\\_Python-For-Beginners](https://github.com/Visualize-ML/Book1_Python-For-Beginners)

想提升**可视化编程**的读者，建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下，学习《可视之美》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book2\\_Beauty-of-Data-Visualization](https://github.com/Visualize-ML/Book2_Beauty-of-Data-Visualization)

想学**机器学习**算法的读者，建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下，学习《数据有道》、《机器学习》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book6\\_First-Course-in-Data-Science](https://github.com/Visualize-ML/Book6_First-Course-in-Data-Science)
- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book7\\_Visualizations-for-Machine-Learning](https://github.com/Visualize-ML/Book7_Visualizations-for-Machine-Learning)

想巩固**机器学习的数学基础**，建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下，学习《数学要素》、《矩阵力量》、《统计至简》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book3\\_Elements-of-Mathematics](https://github.com/Visualize-ML/Book3_Elements-of-Mathematics)
- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book4\\_Power-of-Matrix](https://github.com/Visualize-ML/Book4_Power-of-Matrix)
- ◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book5\\_Essentials-of-Probability-and-Statistics](https://github.com/Visualize-ML/Book5_Essentials-of-Probability-and-Statistics)

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 实践平台

本书作者编写代码时采用的 IDE (integrated development environment) 是 Spyder，目的是给大家提供简洁的 Python 代码文件。

但是，建议大家采用 JupyterLab 或 Jupyter notebook 作为本系列丛书配套学习工具。

简单来说，Jupyter 集合“浏览器 + 编程 + 文档 + 绘图 + 多媒体 + 发布”众多功能与一身，非常适合探究式学习。

运行 Jupyter 无需 IDE，只需要浏览器。Jupyter 容易分块执行代码。Jupyter 支持 inline 打印结果，直接将结果图片打印在分块代码下方。Jupyter 还支持很多其他语言，比如 R 和 Julia。

使用 markdown 文档编辑功能，可以编程同时写笔记，不需要额外创建文档。Jupyter 中插入图片和视频链接都很方便。此外，还可以插入 Latex 公式。对于长文档，可以用边栏目录查找特定内容。

Jupyter 发布功能很友好，方便打印成 HTML、PDF 等格式文件。

大家可以下载安装 Anaconda，JupyterLab、Spyder、PyCharm 等常用工具都集成在 Anaconda 中。下载 Anaconda 的地址为：

◀ <https://www.anaconda.com/>

有关安装 Anaconda、使用 JupyterLab，请大家参考《编程不难》前三章，下载地址为

◀ [https://github.com/Visualize-ML/Book1\\_Python-For-Beginners](https://github.com/Visualize-ML/Book1_Python-For-Beginners)

## 意见建议

欢迎大家对本系列丛书提意见和建议，丛书专属邮箱地址为：

◀ [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

一直以来，“鸢尾花书”都延续着一个传统：对于提出了关键意见和宝贵建议的读者，我们会准备一些周边小礼物（鸢尾花伞、登顶包、单肩背...），聊表心意。



## Contents

# 目录

# 0 Introduction

## 绪论

看到公式背后的几何之美

## 0.1 聊聊线性代数和《线性代数不难》

简单来说，线性代数是研究向量、矩阵及其线性变换关系的数学分支。

线性代数是现代科学和工程的数学语言。线性代数不仅是从单变量微积分过渡到多变量微积分的桥梁，更是从一元概率统计走向多元统计分析的核心工具。在机器学习、计算机视觉、自然语言处理、机器人控制、图像处理、量化金融、数据分析等前沿领域，线性代数几乎无处不在。

线性代数是一门本科阶段普遍开设的基础课程。笔者认为，大学本科教育的核心使命是培养专业人才，而不是“筛选”或“淘汰”学生；因此，高中时期那种以“死记硬背”“刷题”“分数”为导向的教学模式，已不再适用于高等教育。

因此，线性代数的教学不应成为一道人为设置的门槛，而应当成为帮助学生建立现代科学思维的重要起点。每一位大学毕业生，都应该能将线性代数作为工具箱中游刃有余、得心应手的数学工具，在未来的学习、科研与工作中自如运用。

这也对教师教学、课程设计、教材编排提出了更高要求。线性代数的教学不应仅停留在符号堆砌和公式推导，更应结合图形直观、实际应用与编程计算工具，帮助学生理解向量空间、线性变换、矩阵运算背后的几何与结构。现代教学可以充分利用可视化、编程实践、建模案例，让学生“看见数学之美”、“活学活用数学”，从而激发他们的学习兴趣与应用能力。

笔者认为现在的线性代数教学确实存在一些问题，具体来说。

- ▶ 忽视几何直觉。很少用二维/三维图像展示抽象概念，导致学生“看不懂也想不到”。比如，很多教材开篇就引入行列式，几乎不解释其几何直观含义。
- ▶ 重计算、轻理解。练习题偏向套路、技巧、难题怪题，忽视几何本质理解和建模能力的培养。很多教材“定义-定理-例题”模式过于机械，只关注“答题”，不关注“学懂”、“会用”。
- ▶ 不注重理论联系实际。缺乏和实际问题、真实世界或其他学科的联系。多数教材极少提及线性代数在现实中的应用案例，比如数据分析、图像处理、机器学习、图论与网络等等。
- ▶ 教学脱离现代工具。需要结合 Python 编程、可视化、动画来教学。大部分教材满纸公式，不主动结合图形、Python 编程、可视化工具来加深理解，构建应用场景。

《线性代数不难》试图解决这些问题。

- ▶ 系统性引入几何直觉。用大量图形、动画展示诸如向量、矩阵、矩阵乘法、线性变换、行列式、逆矩阵、线性方程、特征值分解、奇异值分解等等概念背后的几何直觉，甚至试图让读者领略“数学之美”！

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

- ▶ 将重点从“解题”转向理解和应用。通过引入实际应用，比如主成分分析、图像压缩、最小二乘拟合等等，让读者真正看到数学工具的实际用途，真正做到“学有所用”。
- ▶ 合理设计知识结构。先从向量、矩阵入手，配齐矩阵乘法、行列式、逆矩阵、向量空间等核心工具之后，再深入到线性方程组求解、线性变换、特征值分解、奇异值分解等进阶话题，其中穿插线性代数工具的应用案例。
- ▶ 边学数学，边学编程，边学可视化。将 Python 编程、Jupyter Notebook、图形化交互工具、大语言模型等融入教学，让学生在“写代码”中学懂数学，在“动手可视化”中建立模型思维。

## 0.2 本书结构

《线性代数不难》分上下两册。上册已经帮助我们备齐了线性代数“工具箱”的常见“利器”，其中包括向量运算、矩阵运算（特别是矩阵乘法）、行列式、逆矩阵、向量空间、线性方程组等等。

本书为《线性代数不难》下册，上册的各种线性代数工具将在本书大展拳脚！

### 几何变换

这一章承上启下。本章将用到《线性代数不难》上册的几乎所有的线性代数工具；因此，这是一个复习上册知识点的好机会。同时，这章讲到的各种几何变换（缩放、旋转、剪切、正交投影、镜像、平移、仿射变换）将会广泛地应用到 QR 分解、特征值分解、Cholesky 分解、LDL 分解、奇异值分解等等矩阵分解。这些几何变换也会用在理解各种数据分析、机器学习算法应用中，比如回归、降维、谱聚类等等。

### 投影

这一章相当于上一章正交投影的延续。我们首先从理解  $2 \times 2$  和  $3 \times 3$  正交矩阵的几何视角开始，然后介绍正交矩阵的各种性质。之所以用三节介绍正交矩阵是因为正交矩阵特别重要，我们还会在回归、谱分解、奇异值分解、主成分分析等话题中看到正交矩阵。这一章最后介绍格拉姆-施密特正交化、QR 分解，请大家特别注意两者联系。

### 回归

本章从正交投影角度讲解一元回归、二元回归、多元回归、多项式回归。回归是一种统计方法，用于分析变量之间的关系，尤其是预测一个变量如何随着另一个变量的变化而变化。线性回归是指变量之间呈线性关系的回归模型，非线性回归则用于处理变量关系不是直线形式的复杂模型。

### 特征值分解

特征值分解可以帮助我们找出方阵的特征向量和特征值；特征向量可以理解为矩阵“固有的方向”，而特征值则表示这些方向上的“伸缩比例”。请大家特别注意实对称矩阵的谱分解，格拉姆矩阵、协方差矩阵、线性相关性系数矩阵、无向图邻接矩阵、无向图拉普拉斯矩阵等都是实对称矩阵。几何角度，对

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

称矩阵、非对称矩阵的特征值分解对应的几何操作完全不同，请大家特别注意。我们将在下一章中看到，主成分分析正是借助特征值分解（谱分解）来发现数据中最重要的方向。

## 降维

---

主成分分析是重要的降维工具，里面涉及到各种线性代数工具。本章将从最基本的数据矩阵出发，逐步深入理解主成分分析的核心原理。其中，协方差矩阵、线性相关性系数矩阵——特殊的格拉姆矩阵——将作为关键工具登场。借助上一章介绍的特征值分解方法，我们将分析协方差矩阵，进而揭示数据的内部结构，实现降维、压缩和特征提取。特别是，本章第二节从椭圆出发以几何视角讲解主成分分析。

## 二次型

---

本章从正定性出发，帮助大家理解正定、半正定、负定等概念几何意义，并掌握判断方法。随后介绍两种适用于正定矩阵的分解方式：Cholesky 分解与 LDL 分解，常用于数值计算。接着引入瑞利商，它是二次型在单位球面上的推广，揭示方向与特征值的关系。最后，我们将讲解常见距离度量，特别是马氏距离，它与前文的旋转椭圆密切相关。

## 奇异值分解

---

本章将深入讲解奇异值分解，这是线性代数中最强大也最广泛应用的工具之一。具体来说，不同形状的奇异值分解结果，背后对应的几何含义各不相同，是理解矩阵变换本质的关键。我们将逐一介绍并比较四种常见的奇异值分解形式：完全型、经济型、紧凑型和截断型，帮助大家在不同应用场景下做出合适选择。这些变体虽然结构不同，但通过分块矩阵乘法可以统一理解，它们的本质是一致的。尤其是截断型奇异值分解，在降维中发挥重要作用。

## 图论和网络

---

本书最后一章相当于图论和网络的入门。本章先介绍无向图、有向图，我们将重点学习如何用邻接矩阵来表示图，这种“矩阵化”的方式将图结构转化为可以进行线性代数运算的形式。随后，我们将引入转移矩阵的概念，它是一种特殊的邻接矩阵，常用于描述状态之间的转移概率，广泛应用于马尔可夫过程等模型中。通过这些矩阵的构建，我们可以将图的结构与线性代数工具相结合，从而进入更深层次的分析。在本章的最后，我们将介绍拉普拉斯矩阵，特别是如何对归一化拉普拉斯矩阵进行谱分解，并利用其特征向量完成图上的聚类分析。这一过程就是“谱聚类”，它将线性代数方法与图的结构信息结合，是现代数据分析中极具威力的工具。

学完《线性代数不难》上下两册，大家可以忘记每一条公式；但是，如果大家以后再看到任何矩阵、矩阵运算，都习惯性地从几何视角做出分析，这就是笔者认为《线性代数不难》能够做出的最大贡献。

下面，让我们正式开始《线性代数不难》收官之旅，让线性代数变得非但不难，而且好用！