

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

5.3 手解逆矩阵



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 方阵可逆的前提是行列式不为零。
- ▶ 删除对应行列，构造每个元素的余子矩阵。
- ▶ 每个余子矩阵求行列式结果为余子式。
- ▶ 根据位置符号调整余子式，得到代数余子式。
- ▶ 代数余子式构成代数余子式矩阵。
- ▶ 代数余子式矩阵进行转置，得到伴随矩阵。
- ▶ 逆矩阵可通过伴随矩阵除以行列式得到。
- ▶ 复习：拉普拉斯展开计算行列式。

对于形状较小(或者形状特殊)的方阵，我们可以手解。常用的方法有两种：伴随矩阵法、初等行变换法。本节将介绍伴随矩阵法；本册最后会介绍初等行变换法。

不需要了解手解逆矩阵的读者，这一节可以跳过。

本节，我们从简单的 2×2 矩阵入手。我们首先回顾矩阵逆的基本概念，并探讨其与行列式、伴随矩阵的关系。然后逐步扩展到 3×3 矩阵，详细讲解如何通过伴随矩阵求逆，并结合具体实例进行计算演示。

这一节采用的例子来自上一章手解行列式；所以，这一章也可以帮助我们回顾余子式、代数余子式、拉普拉斯展开计算行列式。

2×2 矩阵的逆

给定如下 2×2 矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1)$$

A 的逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

本章前文提过方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 的**行列式**不为 0。

上式中分母就是 A 的**行列式** $\det(A)$ ；也就是说， $ad-bc \neq 0$ 时， A 存在逆矩阵。

(2) 的分母为 A 的**行列式**，那么分子是什么？

这个分子叫 A 的**伴随矩阵** (adjoint of a matrix)，记作 $\text{adj}(A)$ 。

这样如果矩阵 A 可逆的话， A 的逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \quad (3)$$

也就是说，为了计算逆矩阵，我们要计算其**行列式**、**伴随矩阵**。

伴随矩阵

伴随矩阵的定义为：

$$\text{adj}(A) = C^T \quad (4)$$

其中， C 叫做**代数余子式矩阵**。显然，**伴随矩阵**是**代数余子式矩阵**的转置。

代数余子式矩阵

代数余子式矩阵是由矩阵中每个元素对应的**代数余子式**构成的矩阵。

而每个**代数余子式**是通过删除该元素所在的行和列后，求**余子矩阵**的**行列式** (**余子式**)，再引入符号调整得到的，即

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} \quad (5)$$

余子式 $M_{i,j}$ 是从矩阵 A 中去掉第 i 行、第 j 列后，剩下的**余子矩阵**的行列式。

$$M_{i,j} = \det(A_{i,j}) \quad (6)$$

余子矩阵 $A_{i,j}$ 是矩阵 A 中去掉第 i 行、第 j 列后剩余元素构成的矩阵。

反过来看整个求解逆矩阵的过程：

a) 计算行列式展开时用到所有行或列，提取**余子矩阵** (方阵)。

b) 根据**余子矩阵** (方阵) 计算原矩阵所有元素的**余子式** (标量)；

- c) 计算每个元素的**代数余子式** (标量)，即调整符号后的**余子式** (标量)；
- d) 根据**拉普拉斯展开**，计算**行列式**。
- e) 根据 c) 构造**代数余子式矩阵**。
- f) **代数余子式矩阵**转置得到伴随矩阵。
- g) 最后，用**行列式**倒数乘上**代数余子式矩阵**得到逆矩阵。

⚠ 注意，计算**行列式**时，只需要在特定行、列展开提取余子矩阵；而构造**代数余子式矩阵**时，需要提取所有元素的余子矩阵。

相信看到这里很多读者已经晕了。

下面，让我们用上一章最后一节的例子，完整地计算一个 3×3 矩阵的逆矩阵。

一个完整的例子

给定如下 3×3 方阵 A ，让我们根据以上步骤一步步计算逆矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

大家会发现以下大部分运算都来自上一章最后一节计算行列式的过程。

提取余子矩阵

取出每个元素对应的**余子矩阵** $A_{i,j}$ 。

余子矩阵 $A_{1,1}$ (去掉第 1 行、第 1 列) 为

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

余子矩阵 $A_{1,2}$ (去掉第 1 行、第 2 列)：

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

余子矩阵 $A_{1,3}$ (去掉第 1 行、第 3 列)：

$$A_{1,3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

余子矩阵 $A_{2,1}$ (去掉第 2 行、第 1 列)：

$$A_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

余子矩阵 $A_{2,2}$ (去掉第 2 行、第 2 列):

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

余子矩阵 $A_{2,3}$ (去掉第 2 行、第 3 列):

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

余子矩阵 $A_{3,1}$ (去掉第 3 行、第 1 列):

$$A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

余子矩阵 $A_{3,2}$ (去掉第 3 行、第 2 列):

$$A_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

余子矩阵 $A_{3,3}$ (去掉第 3 行、第 3 列):

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

计算余子式

计算每个**余子矩阵** $A_{i,j}$ 的行列式，即**余子式** $M_{i,j}$ 。

余子式 $M_{1,1}$:

$$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 \times 1) - (1 \times 2) = 0 - 2 = -2 \quad (17)$$

余子式 $M_{1,2}$:

$$M_{1,2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1) - (1 \times 1) = 3 - 1 = 2 \quad (18)$$

余子式 $M_{1,3}$:

$$M_{1,3} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (0 \times 1) = 6 - 0 = 6 \quad (19)$$

余子式 $M_{2,1}$:

$$M_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (3 \times 2) = 2 - 6 = -4 \quad (20)$$

余子式 $M_{2,2}$:

$$M_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (3 \times 1) = 1 - 3 = -2 \quad (21)$$

余子式 $M_{2,3}$:

$$M_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (2 \times 1) = 2 - 2 = 0 \quad (22)$$

余子式 $M_{3,1}$:

$$M_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (3 \times 0) = 2 - 0 = 2 \quad (23)$$

余子式 $M_{3,2}$:

$$M_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (3 \times 3) = 1 - 9 = -8 \quad (24)$$

余子式 $M_{3,3}$:

$$M_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1 \times 0) - (2 \times 3) = 0 - 6 = -6 \quad (25)$$

计算代数余子式

代数余子式就是在**余子式**上加了符号，根据的法则为 $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 。

代数余子式 $C_{1,1}$:

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1} M_{1,1} = (1) \times (-2) = -2 \quad (26)$$

代数余子式 $C_{1,2}$:

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} M_{1,2} = (-1) \times (2) = -2 \quad (27)$$

代数余子式 $C_{1,3}$:

$$C_{1,3} = (-1)^{1+3} M_{1,3} = (1) \times (6) = 6 \quad (28)$$

代数余子式 $C_{2,1}$:

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1} M_{2,1} = (-1) \times (-4) = 4 \quad (29)$$

代数余子式 $C_{2,2}$:

$$C_{2,2} = (-1)^{2+2} M_{2,2} = (1) \times (-2) = -2 \quad (30)$$

代数余子式 $C_{2,3}$:

$$C_{2,3} = (-1)^{2+3} M_{2,3} = (-1) \times (0) = 0 \quad (31)$$

代数余子式 $C_{3,1}$:

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$C_{3,1} = (-1)^{3+1} M_{3,1} = (1) \times 2 = 2 \quad (32)$$

代数余子式 $C_{3,2}$:

$$C_{3,2} = (-1)^{3+2} M_{3,2} = (-1) \times (-8) = 8 \quad (33)$$

代数余子式 $C_{3,3}$:

$$C_{3,3} = (-1)^{3+3} M_{3,3} = (1) \times (-6) = -6 \quad (34)$$

计算行列式

仅用第 1 行展开计算行列式

$$\det(A) = a_{1,1}C_{1,1} + a_{1,2}C_{1,2} + a_{1,3}C_{1,3} \quad (35)$$

代入值:

$$\det(A) = 1 \times (-2) + 2 \times (-2) + 3 \times 6 = -2 - 4 + 18 = 12 \quad (36)$$

构造代数余子式矩阵

根据 (26) ~ (34) 结果, 最终的代数余子式矩阵 C

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix} \quad (37)$$

转置得到伴随矩阵

根据伴随矩阵的定义

$$\text{adj}(A) = C^T \quad (38)$$

代入具体数值, 得到 $\text{adj}(A)$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad (39)$$

计算逆矩阵

根据

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (40)$$

代入具体值

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad (41)$$



LA_05_03_01.ipynb 帮助大家掌握余子矩阵的提取、余子式与代数余子式的计算、行列式求解、代数余子式矩阵的构造、伴随矩阵的求取以及逆矩阵的计算。同时，学习如何将数学公式转化为代码实现。从计算效率、稳定性、数值精度等角度来看，仍然建议优先使用 NumPy 提供的线性代数函数来执行相关运算。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 用本节介绍的方法计算如下 2×2 矩阵的逆。

► $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Q2. 用本节介绍的方法手解如下 3×3 矩阵的逆，并用 NumPy 验证结果。

► $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Q3. 请自学使用 `time.time()`，比较 `numpy.linalg.inv()`、自定义函数求解矩阵逆的运算时间。

Q4. 请自学初等变换手解逆矩阵。