

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

8.5 正交投影



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 切向量构造平面投影矩阵。
- ▶ 法向量构造二维、三维、更高维投影矩阵。
- ▶ 切向量、法向量之间的关系。
- ▶ 正交投影矩阵行列式为 0，不可逆。
- ▶ 连续投影结果不变，说明正交投影矩阵幂等。

回顾向量投影

如图 1 所示，朝着非零向量 τ (起点位于原点) 投影，就是朝过原点、切向量为 τ 的直线投影，投影矩阵 P 为

$$P = \frac{\tau @ \tau^T}{\tau^T @ \tau} = \frac{\tau}{\|\tau\|} @ \left(\frac{\tau}{\|\tau\|} \right)^T \quad (1)$$

形象来说，直线的切向量就是描述这条直线“朝哪个方向走”的箭头。

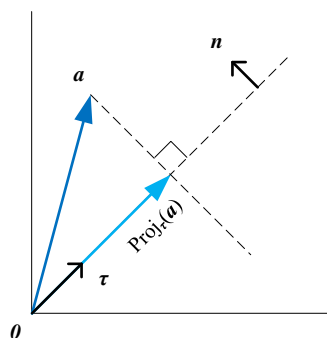


图 1. 过原点直线切向量

把非零向量 τ 写成方向向量 (单位向量), (1) 为

$$P = \hat{\tau} @ \hat{\tau}^T \quad (2)$$

上式显然为秩一矩阵。

本书前文介绍过, 秩一矩阵是指可以表示为一个 (非零) 列向量和一个 (非零) 行向量的外积的矩阵, 即整个矩阵的所有行 (或列) 都互相线性相关。

⚠ 注意, (2) 给出的投影矩阵适合朝单一方向投影。对于更高维度空间朝平面/超平面的正交投影, 用法向量来构造正交投影矩阵。

本书前文介绍过如何计算向量投影, 下面简单回顾一下。

如图 1 所示, 向量 a 朝 τ 向量投影

$$\text{proj}_{\tau} a = \frac{\tau @ \tau^T}{\tau^T @ \tau} a \quad (3)$$

用本书前文介绍过的向量投影, 以内积形式来写, (3) 等价

$$\text{proj}_{\tau} a = \underbrace{\|a\| \cos \theta}_{\text{Scalar projection}} \times \underbrace{\hat{\tau}}_{\text{Direction vector}} = \frac{a \cdot \tau}{\|\tau\|} \times \frac{\tau}{\|\tau\|} = \frac{a \cdot \tau}{\|\tau\|^2} \tau = \frac{a \cdot \tau}{\tau \cdot \tau} \tau \quad (4)$$

几个例子

平面几何形状向横轴 ($x_2 = 0$) 正交投影, 横轴对应的切向量 $\tau = [1, 0]^T$, 这样投影矩阵为

$$P = \hat{\tau} @ \hat{\tau}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

向量 $[x_1, x_2]^T$ 向横轴正交投影结果

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

这和图 2 (a) 一致, 即 x_1 坐标不变, x_2 为 0。

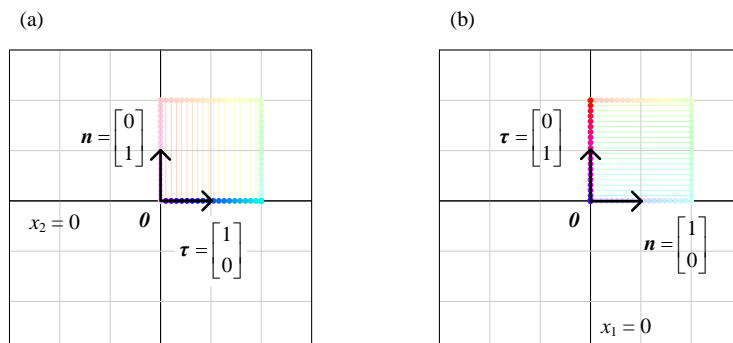


图 2. 向横轴、纵轴投影

如图 2 (b) 所示, 平面几何形状向纵轴 ($x_1 = 0$, 切向量 $\tau = [0, 1]^T$) 正交投影, 投影矩阵为

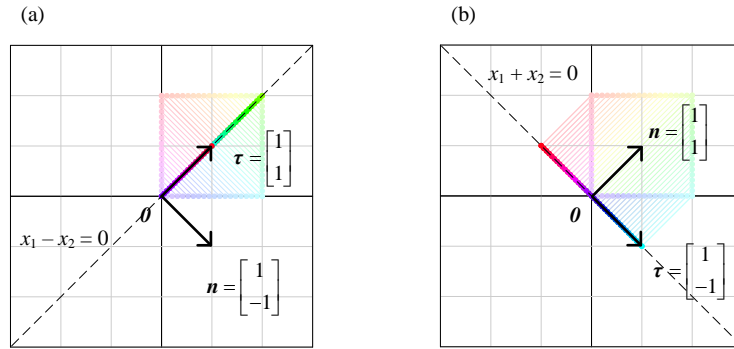
$$P = \hat{\tau} @ \hat{\tau}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

向量 $[x_1, x_2]^T$ 向纵轴正交投影结果

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

这意味着 x_1 坐标变为 0, x_2 坐标不变。

再看图 3 两个例子。

图 3. 向 $x_1 - x_2 = 0$ 、 $x_1 + x_2 = 0$ 投影

如图 3 (a) 所示, 平面几何形状向 $x_1 - x_2 = 0$ 正交投影, $x_1 - x_2 = 0$ 对应的切向量 $\tau = [1, 1]^T$, 将 τ 单位化得到

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

这样投影矩阵为

$$P = \hat{\tau} @ \hat{\tau}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

向量 $[x_1, x_2]^T$ 向 $x_1 - x_2 = 0$ 正交投影, 坐标变化

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1 + 0.5x_2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

上式告诉我们投影后横纵坐标相同, 这和图 3 (a) 一致, 所有点落在了 $x_1 - x_2 = 0$ 这条直线上。

如图 3 (b) 所示, 向 $x_1 + x_2 = 0$ 正交投影, $x_1 + x_2 = 0$ 对应的切向量 $\tau = [1, -1]^T$, 这样投影矩阵为

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{t}} @ \hat{\mathbf{t}}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (12)$$

向量 $[x_1, x_2]^T$ 向 $x_1 + x_2 = 0$ 正交投影，坐标为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1 - 0.5x_2 \\ -0.5x_1 + 0.5x_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

从上式中，我们看到投影后横轴坐标为相反数。这和图 3 (b) 一致，所有点落在了 $x_1 + x_2 = 0$ 。

平面法向量

简单来说，直线的法向量垂直于直线，平面的方向了垂直于平面。

给定直线 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ，对应的法向量为

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

请大家自行分析图 4 中给出的几个例子。

⚠ 注意，图 4 中直线法向量都是自由向量，它们起点并不在原点。

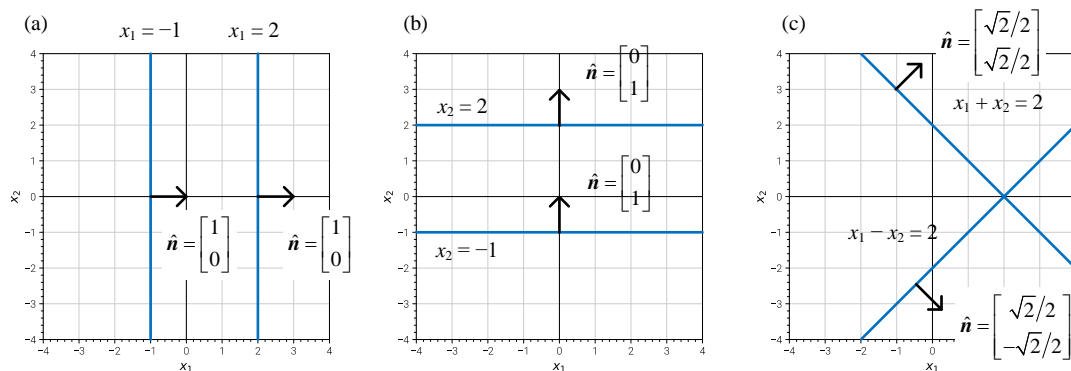


图 4. 平面直线单位法向量

根据向量正交分解，如图 5 所示，我们可以计算 \mathbf{a} 朝 \mathbf{n} (法向量) 向量正交投影

$$\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{n} @ \mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T @ \mathbf{n}} \mathbf{a} \quad (15)$$

然后 \mathbf{a} 减去 $\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}$ 这个向量投影，就是 \mathbf{a} 向 $\boldsymbol{\tau}$ 正交投影结果

$$\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{n} @ \mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T @ \mathbf{n}} \mathbf{a} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{n} @ \mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T @ \mathbf{n}} \right) \mathbf{a} \quad (16)$$

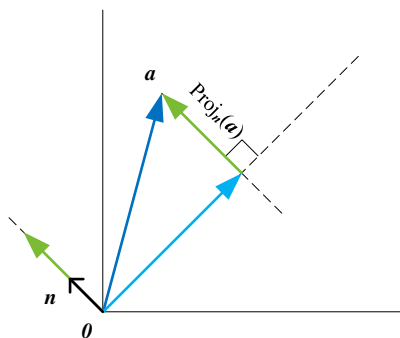


图 5. 过原点直线法向量

这样 a 朝 n 投影矩阵 P 为

$$P = I - \frac{n @ n^T}{n^T @ n} \quad (17)$$

⚠ 注意，对于高维度空间正交投影，我们一般使用 (17) 这种以法向量方式定义的投影矩阵；大家很快就会在本节后文看到。

把 (14) 带入 (17) 得到

$$\begin{aligned} P &= I - \frac{n @ n^T}{n^T @ n} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left(\begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

? 请大家分别用切向量、法向量自行计算图 6 中对应的投影矩阵。

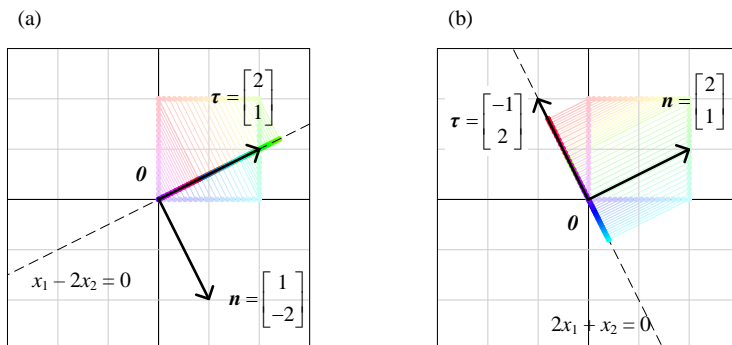


图 6. 两个正交投影变换的例子，法向量

换个角度来推导 (18)，如果 $n = [a_1, a_2]^T$ ， $\tau = [-a_2, a_1]^T$ ，利用 (1) 得到同样的结果

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\boldsymbol{\tau} @ \boldsymbol{\tau}^T}{\boldsymbol{\tau}^T @ \boldsymbol{\tau}} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}} \\
 &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

正交矩阵：规范正交基

联立 (1) 和 (17)，整理得到

$$\frac{\boldsymbol{n} @ \boldsymbol{n}^T}{\boldsymbol{n}^T @ \boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{\tau} @ \boldsymbol{\tau}^T}{\boldsymbol{\tau}^T @ \boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{I} \tag{20}$$

即

$$\hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^T + \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^T = \boldsymbol{I} \tag{21}$$

计算 $\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}$ 这个方阵格拉姆矩阵

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{n}}^T \\ \hat{\boldsymbol{\tau}}^T \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^T + \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^T = \boldsymbol{I} \tag{22}$$

我们发现这个格拉姆矩阵是个单位阵！

这说明单位法向量、切向量构造规范正交基

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{n}} & \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} \tag{23}$$

换个角度来看，上式是一个正交矩阵。

⚠ 注意，(22) 这个式子非常重要，是下一章的关键点之一。

平面正交投影的性质

很容易观察知道，投影矩阵是对称矩阵

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \tag{24}$$

观察 (18)，我们发现平面正交投影矩阵列向量相关

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

从 (2) 也能看出，平面正交投影矩阵 \boldsymbol{P} 为秩一矩阵，这和上式结论一致。

⚠ 注意， \boldsymbol{P} 为秩一矩阵仅仅适用于平面正交投影这个场景；对于三维、更高维正交投影，投影矩阵则不是秩一矩阵。

计算平面正交投影矩阵行列式

$$\det(\mathbf{P}) = 0 \quad (26)$$

如图 7 所示，这意味着 \mathbf{P} 将平面几何图形压缩，导致信息丢失。这也说明，正交投影矩阵不可逆。

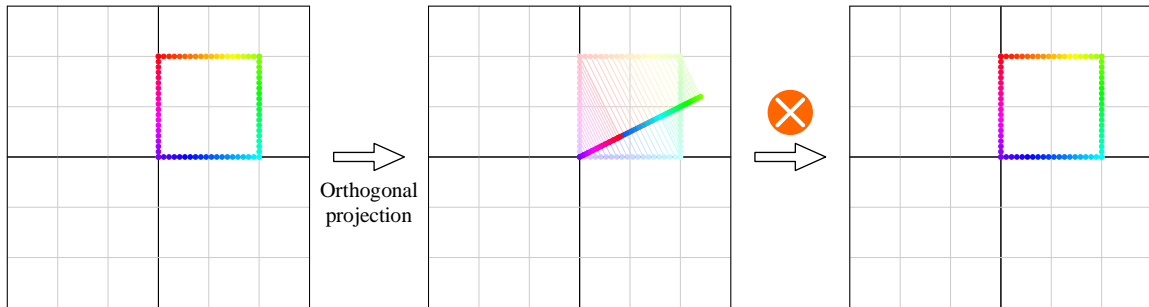


图 7. 正交投影变换不可逆

投影矩阵满足

$$\mathbf{P} @ \mathbf{P} = \mathbf{P} \quad (27)$$

我们管 \mathbf{P} 叫**幂等矩阵** (idempotent matrix)；简单来说，幂等矩阵与自身相乘仍等于自身。

如图 8 所示，几何角度来看，上式意味着对一个点投影多次，结果不变。

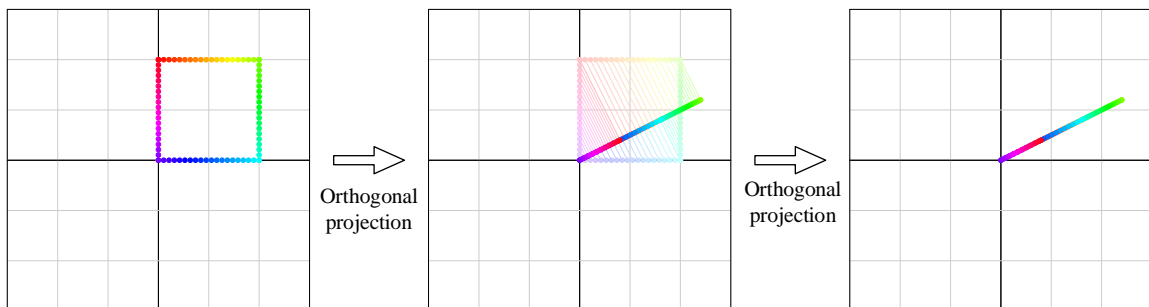


图 8. 连续正交投影结果不变

三维投影到平面

三维、更高维度正交投影，法向量就有优势了！

如图 9 所示，对于一个平面而言，它的法向量就是和平面相垂直的向量。

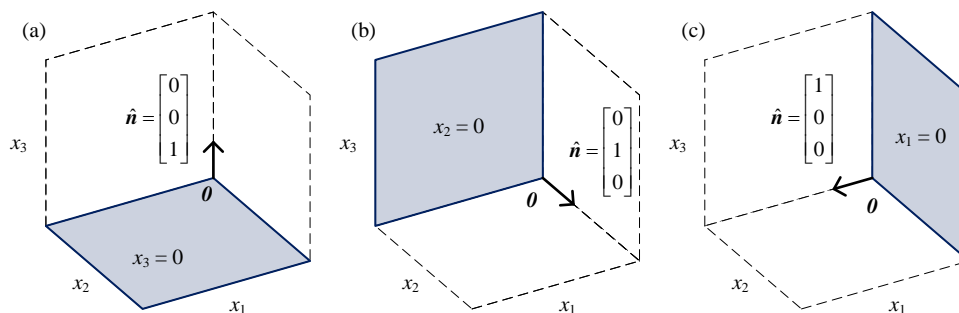


图 9. 平面的法向量

一个平面的单位法向量为 \hat{n} ，朝这个平面正交投影矩阵 P 为

$$P = I - \hat{n} @ \hat{n}^T \quad (28)$$

如图 9 (a) 所示， x_1x_2 平面的单位法向量为 $[0, 0, 1]^T$ ，向 x_1x_2 平面正交投影矩阵为

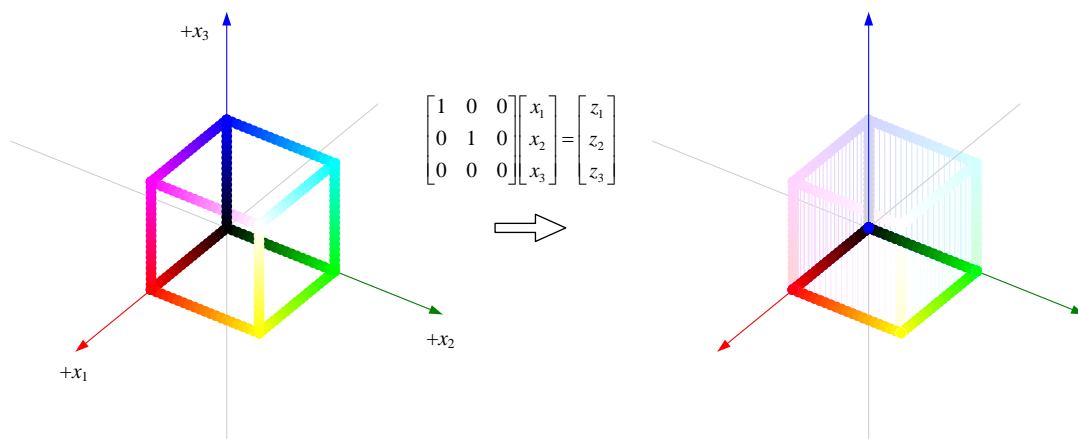
$$P = I - \hat{n} @ \hat{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

? 请大家计算 (29) 正交投影矩阵的秩、行列式。投影矩阵 P 是否还是秩一矩阵？

如图 10 所示，三维列向量 x 关于 x_1x_2 平面镜像后结果为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

也就是说， x_1 、 x_2 坐标不变， x_3 坐标为 0。

图 10. 朝 x_1x_2 平面正交投影，三维空间

如图 9 (b) 所示， x_1x_3 平面的单位法向量为 $[0, 1, 0]^T$ ，向 x_1x_3 平面正交投影矩阵为

$$P = I - \hat{n} @ \hat{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

如图 11 所示， x_1 、 x_3 坐标不变， x_2 坐标为 0。

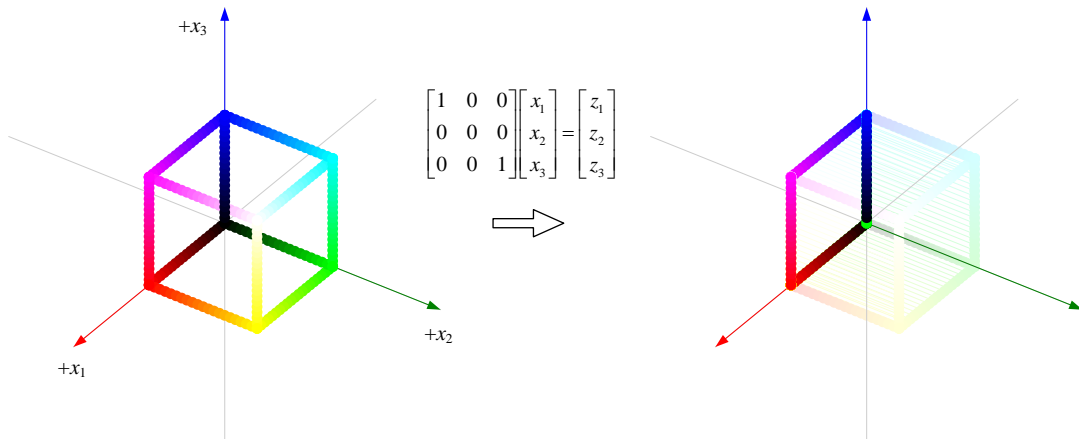


图 11. 超 x_1x_3 平面正交投影，三维空间

? 请大家自行计算图 12 对应的正交投影矩阵，并指出坐标变换。

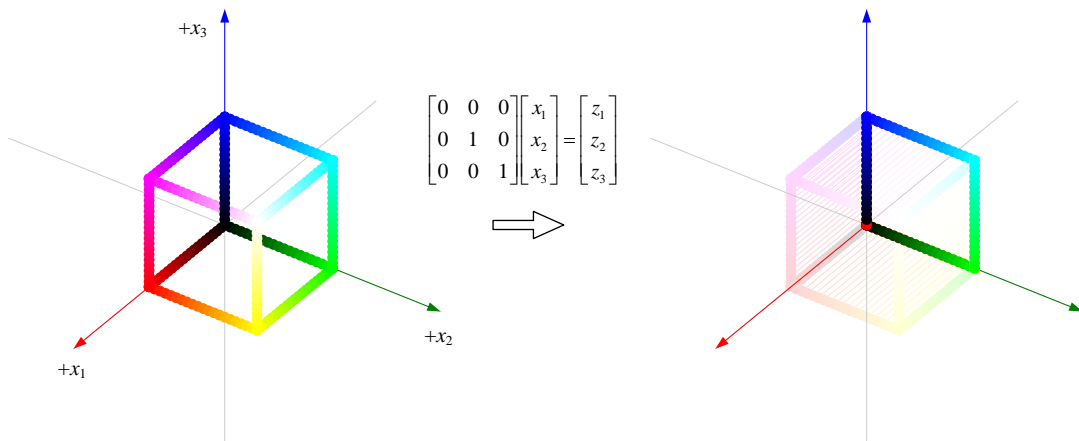


图 12. 超 x_2x_3 平面正交投影，三维空间

大家可能会好奇，正交投影丢失的信息去哪了？怎么能补全这部分信息？正交投影还有什么使用场景？这些都是下一章要探讨的话题。



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

Q1. 给定如下平面上过原点直线，分别计算其切向量、法向量、投影矩阵；请用两种方法计算投影矩阵。

- ▶ $-x_2 = 0$
- ▶ $-x_1 = 0$
- ▶ $x_1 - 2x_2 = 0$
- ▶ $2x_1 - x_2 = 0$
- ▶ $x_1 + 2x_2 = 0$
- ▶ $2x_1 + x_2 = 0$

Q2. 给定如下三维空间中过原点平面，分别计算法向量、投影矩阵。

- ▶ $x_2 = 0$
- ▶ $x_1 = 0$
- ▶ $x_1 + x_2 = 0$
- ▶ $x_1 + x_3 = 0$
- ▶ $x_2 + x_3 = 0$
- ▶ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
- ▶ $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Q3. 计算点 $(3, 4)$ 朝如下单位向量投影 (以这些向量为切向量的过原点直线正交投影)：

- ▶ $[0, 1]^T$
- ▶ $[1, 0]^T$
- ▶ $[3/5, 4/5]^T$
- ▶ $[4/5, -3/5]^T$

Q4. 过原点的直线和水平轴正方向夹角为 30° ，请计算点 $(3, 4)$ 朝这条直线正交投影。

Q5. 请修改 LA_08_02_01.ipynb，可视化图 2、图 3 几个平面正交投影操作。

Q6. 请修改 LA_08_03_01.ipynb，可视化图 10、图 11、图 12 几个三维正交投影操作。

Q7. 给定如下超平面法向量，计算投影矩阵。

- ▶ $[0, 0, 0, 1]^T$
- ▶ $[0, 0, 1, 0]^T$
- ▶ $[1, 1, 1, 1]^T$

Q8. 给定如下超平面，计算投影矩阵。

- ▶ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
- ▶ $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

Q9. 朝平面上不过原点的直线投影，请思考如何计算投影点？