

作者	生姜 DrGinger
脚本	生姜 DrGinger
视频	崔崔 CuiCui
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

8.6 镜像



本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 镜像是通过对称轴或对称面，将点映射到其对面位置的几何变换。
- ▶ 用法向量构造镜像矩阵。
- ▶ 镜像矩阵是对称矩阵，也是正交矩阵。
- ▶ 镜像矩阵的逆矩阵就是它本身。
- ▶ 镜像变换保持图形面积，但会翻转方向，使行列式变号。
- ▶ 正交投影矩阵、镜像矩阵的关系，涉及豪斯霍尔德矩阵。

平面镜像

镜像 (reflection)，也叫反射，通过某个对称轴、对称面将一个点映射到其镜像位置。数学上，镜像变换通常使用矩阵乘法完成，并涉及很多线性代数的知识点。

给定一个**法向量**为 \mathbf{n} 通过原点的直线，以它为对称轴完成镜像的矩阵

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \frac{\mathbf{n} @ \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} = \mathbf{I} - 2 \cdot \frac{\mathbf{n} @ \mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T @ \mathbf{n}} \quad (1)$$

特别地，如果法向量为单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$ ， \mathbf{M} 为

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} @ \hat{\mathbf{n}}^T \quad (2)$$

举个例子，当 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ 过原点时， $b = 0$ ，即 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ 。

(过原点的) 直线 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ 法向量为

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

关于 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ 镜像的镜像矩阵为

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{I} - 2 \cdot \frac{\mathbf{n} @ \mathbf{n}^T}{\mathbf{n}^T @ \mathbf{n}} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{a_1^2 + a_2^2} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left(\begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a_1^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & 2a_2^2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 - a_1^2 & -2a_1a_2 \\ -2a_1a_2 & a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

只需选定一个单位法向量，即可构造以这个法向量定义的(过原点)超平面的镜像变换。用法向量构造的镜像矩阵不仅适用于二维、三维空间，在任意 n 维欧几里得空间都成立。

几组例子

下面让我们看几个特殊的例子。

图 1 (a) 关于横轴 x_1 镜像。横轴对应的方程式为 $x_2 = 0$ ，容易得到其单位法向量为

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

计算其镜像矩阵

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} @ \hat{\mathbf{n}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

向量 $[x_1, x_2]^T$ 关于横轴镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

这和图 1 (a) 结果一致，即 x_1 坐标不变， x_2 坐标取反。

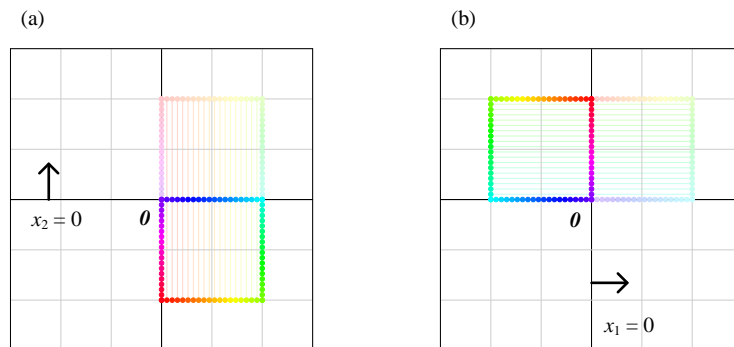


图 1. 关于横轴、纵轴对称

图 1 (b) 关于纵轴 x_2 镜像。纵轴对应的方程式为 $x_1 = 0$ ，其单位法向量为

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

计算对应的镜像矩阵

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \hat{n} @ \hat{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

向量 $[x_1, x_2]^T$ 关于纵轴镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

这和图 1 (b) 的观察一致，即 x_1 坐标取反， x_2 坐标不变。

再看图 2 中两个例子。

图 2 (a) 过原点的镜像直线为 $x_1 - x_2 = 0$ ，对应的镜像矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \hat{n} @ \hat{n}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

? 请大家自行手算 (11) 中 \mathbf{M} 。

向量 $[x_1, x_2]^T$ 关于 $x_1 - x_2 = 0$ 镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

上式相当于横纵轴坐标交换。

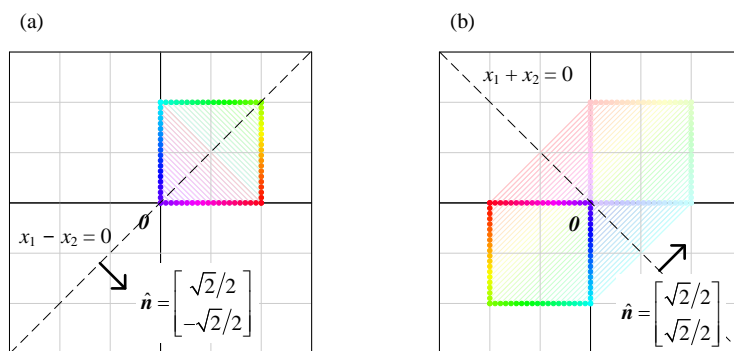


图 2. 关于过原点 45 度、135 度斜线对称

图 2 (b) 过原点的镜像直线为 $x_1 + x_2 = 0$ ，对应的镜像矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \hat{n} @ \hat{n}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

? 请大家计算 (13) 中 \mathbf{M} 。

向量 $[x_1, x_2]^T$ 关于 $x_1 + x_2 = 0$ 镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

上式相当于横纵轴坐标交换，并取相反数。

矩阵性质

显然，(4) 中方阵 M 为对称矩阵，即满足

$$M = M^T \quad (15)$$

镜像矩阵 M 也是正交矩阵，即满足

$$MM^T = M^T M = I \quad (16)$$

这意味着镜像操作的逆操作为本身。同时，这也意味着 M 的列向量也构成规范正交基。

联合 (15)、(16)，我们发现

$$M^2 = I \quad (17)$$

这意味着，同一个镜像连续操作两次，还原原始图形，如图 3 示例所示。

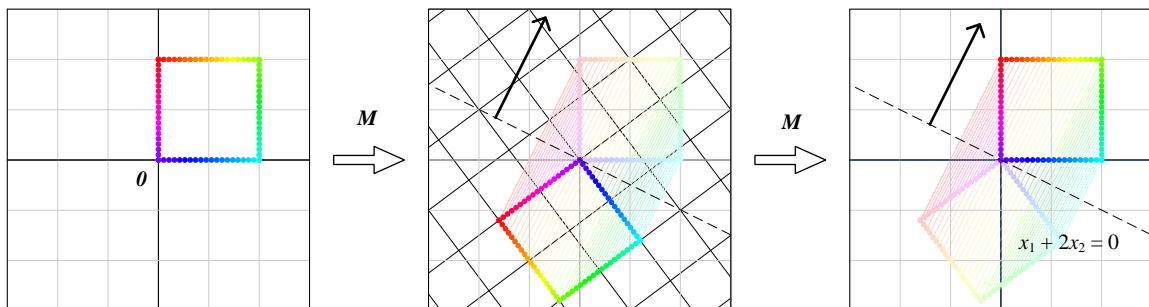


图 3. 同一个镜像连续操作两次，还原原始图形

计算 (4) 行列式

$$\det(M) = \det \left(\frac{-1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1^2 - a_2^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & a_2^2 - a_1^2 \end{bmatrix} \right) = \frac{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_1^2) - 4a_1^2a_2^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} = \frac{-(a_1^2 + a_2^2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} = -1 \quad (18)$$

本书前文提过，行列式的正负与几何操作的方向性有关。简单来说，如果行列式为正，则变换保持了基向量的先后顺序。如果行列式为负，则反转了基向量的先后顺序，比如镜像。

虽然镜像不改变图形面积，但是图像发生翻转，列向量次序交换。

推导 (18) 用到了行列式一章讲过的性质。对于 $n \times n$ 方阵 A ，标量乘法 kA 的行列式为

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (19)$$



请大家回顾本书前文有关行列式性质的内容。

正交投影、镜像之间的关系

(1) 中矩阵 M 有自己的名字——**豪斯霍尔德矩阵** (Householder matrix)。这个豪斯霍尔德矩阵和正交投影有直接关系，下面让我们聊聊这一点。

如图 4 所示，向量 a 和向量 b 关于过原点法向量为 n 的直线镜像对称。

而两者之差为 a 在 n 方向向量投影的两倍，即

$$a - b = 2 \text{proj}_n a \quad (20)$$

上式可以整理得到 (1)，这个问题交给感兴趣的读者。

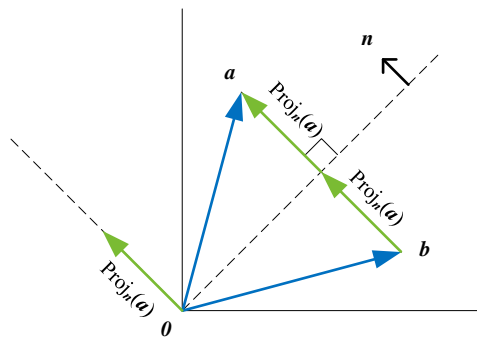


图 4. 豪斯霍尔德矩阵和正交投影

三维空间镜像

(1) 这个镜像矩阵也适用于二维平面的镜像。前文提过，对于一个平面而言，它的法向量就是和平面相垂直的向量。

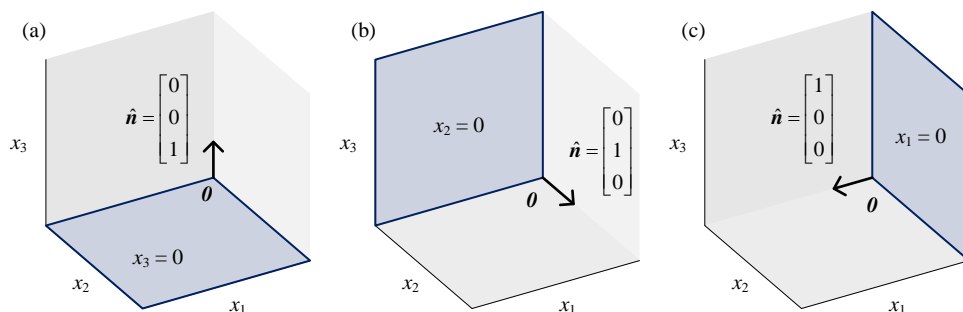


图 5. 平面的法向量

如图 5 (a) 所示， x_1x_2 平面的单位法向量为 $[0, 0, 1]^T$ ，镜像矩阵为

$$M = I - 2 \cdot \hat{n} @ \hat{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

? 请大家计算上述镜像矩阵的行列式。

如图 6 所示，三维列向量 \mathbf{x} 关于 x_1x_2 平面镜像后结果为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

也就是说， x_1 、 x_2 坐标不变， x_3 坐标反转。

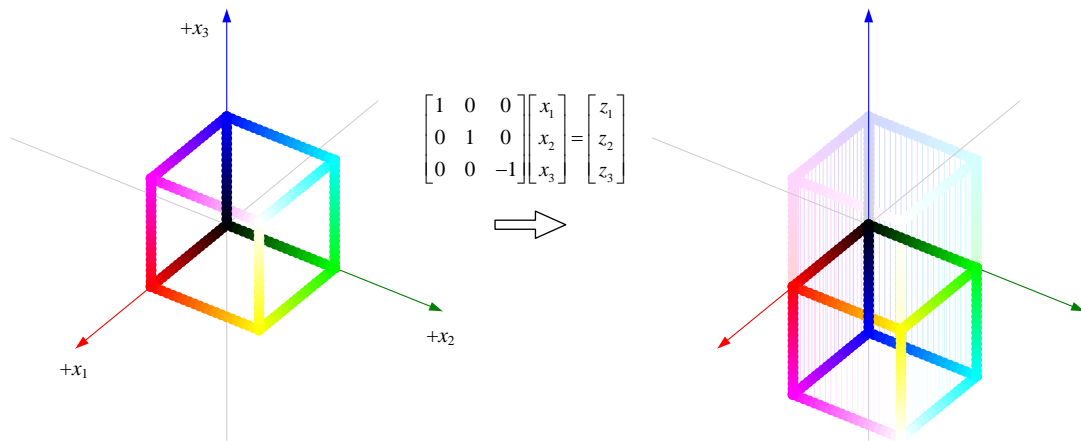


图 6. 关于 x_1x_2 平面镜像，三维空间

也请大家根据图 7，回顾本书前文介绍的如何利用右手定则判定 (21) 行列式正负。

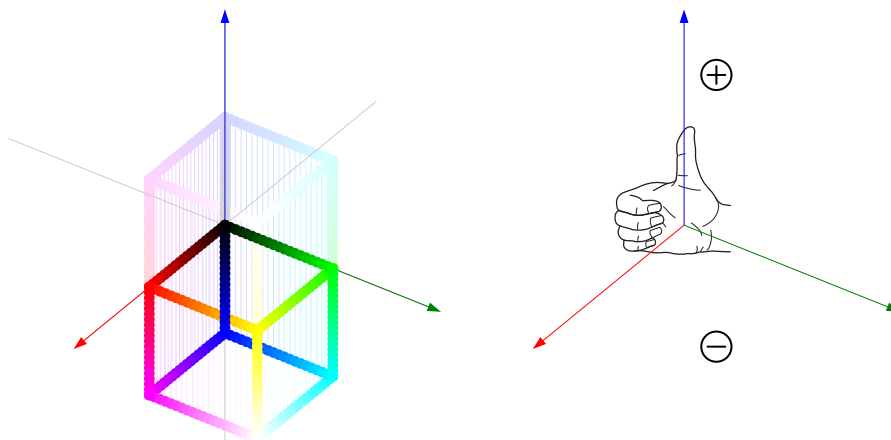


图 7. 右手法则判定行列式正负

如图 5 (b) 所示, x_1x_3 平面的单位法向量为 $[0, 1, 0]^T$, 镜像矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} @ \hat{\mathbf{n}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

如图 8 所示, x_1 、 x_3 坐标不变, x_2 坐标反转。

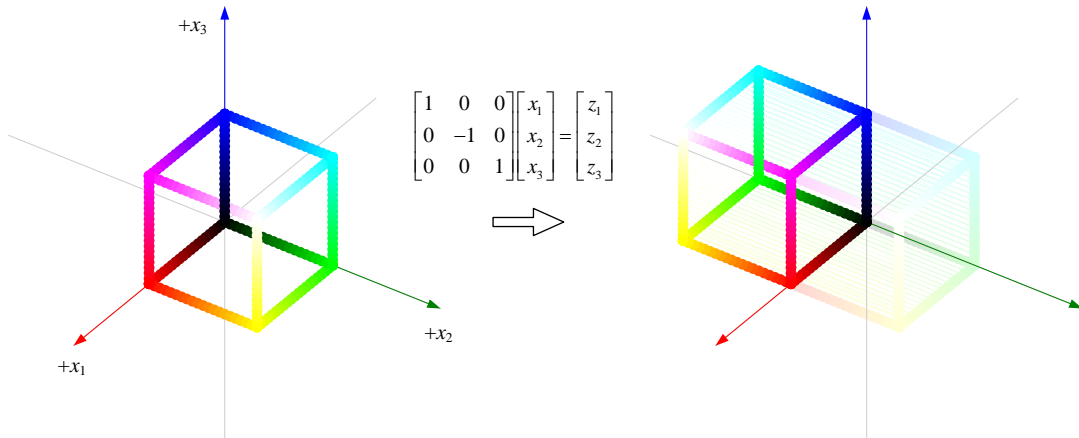


图 8. 关于 x_1x_3 平面镜像, 三维空间

? 请大家自行计算图 9 对应的镜像矩阵, 并指出坐标变换。

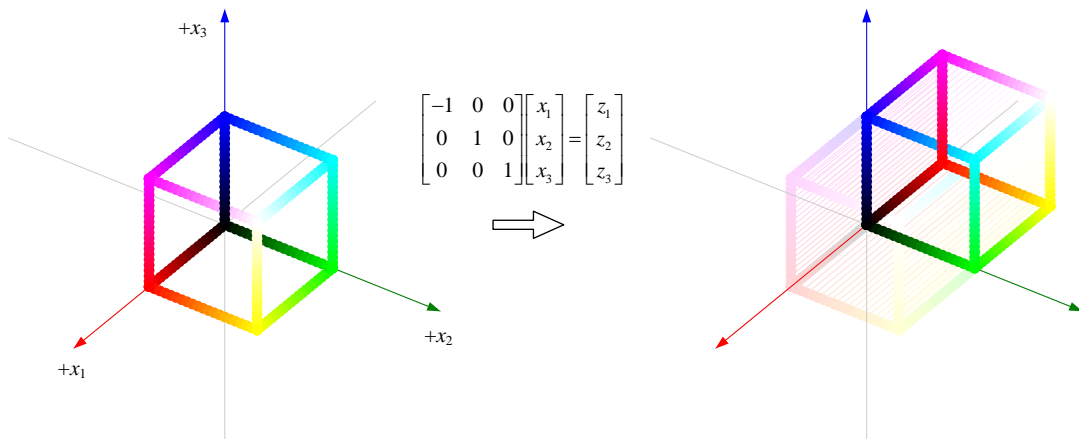


图 9. 关于 x_2x_3 平面镜像, 三维空间



请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

Q1. 给定如下平面上过原点直线，分别计算其法向量、镜像矩阵。

- ▶ $-x_2 = 0$
- ▶ $-x_1 = 0$
- ▶ $x_1 - 2x_2 = 0$
- ▶ $2x_1 - x_2 = 0$
- ▶ $x_1 + 2x_2 = 0$
- ▶ $2x_1 + x_2 = 0$

Q2. 给定如下三维空间中过原点平面，分别计算法向量、镜像矩阵。

- ▶ $x_2 = 0$
- ▶ $x_1 = 0$
- ▶ $x_1 + x_2 = 0$
- ▶ $x_1 + x_3 = 0$
- ▶ $x_2 + x_3 = 0$
- ▶ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
- ▶ $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Q3. 请修改 LA_08_02_01.ipynb，可视化图 1、图 2 几个平面镜像投影操作。

Q4. 请修改 LA_08_03_01.ipynb，可视化图 6、图 8、图 9 几个三维镜像操作。

Q5. 给定如下超平面法向量，计算镜像矩阵。

- ▶ $[0, 0, 0, 1]^T$
- ▶ $[0, 0, 1, 0]^T$
- ▶ $[1, 1, 1, 1]^T$

Q6. 给定如下超平面，计算镜像矩阵。

- ▶ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
- ▶ $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$