

## 15

## Mesh Surface

## 网格曲面

沿着两个维度的曲线织成的曲面



画家把太阳画成黄点；艺术家把黄点变成太阳。

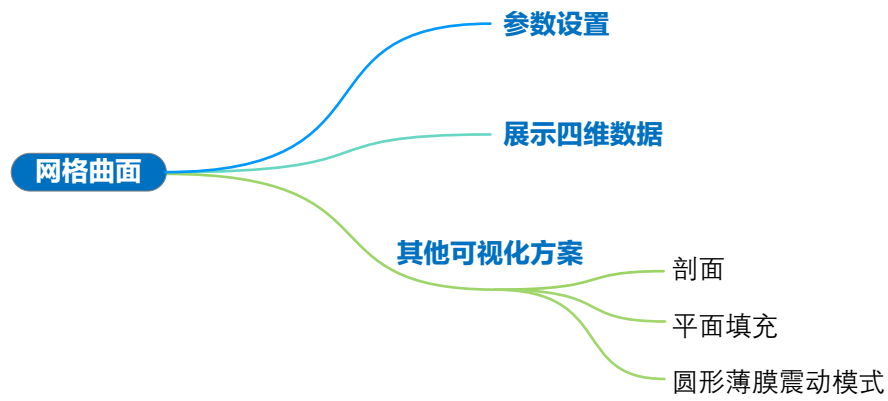
*There are painters who transform the sun to a yellow spot, but there are others who with the help of their art and their intelligence, transform a yellow spot into sun.*

—— 毕加索 (Pablo Picasso) | 西班牙艺术家 | 1881 ~ 1973



- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制平面填充等高线
- ◀ matplotlib.pyplot.plot\_wireframe() 绘制线框图
- ◀ matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- ◀ numpy.diag() 如果 A 为方阵, numpy.diag(A) 函数提取对角线元素, 以向量形式输入结果; 如果 a 为向量, numpy.diag(a) 函数将向量展开成方阵, 方阵对角线元素为 a 向量元素
- ◀ numpy.dot() 计算向量标量积。值得注意的是, 如果输入为一维数组, numpy.dot() 输出结果为标量积; 如果输入为矩阵, numpy.dot() 输出结果为矩阵乘积, 相当于矩阵运算符@
- ◀ numpy.linalg.det() 计算行列式值
- ◀ numpy.linalg.inv() 矩阵求逆
- ◀ numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- ◀ numpy.outer() 计算两个向量的外积、张量积
- ◀ numpy.sqrt() 计算平方根
- ◀ numpy.vstack() 返回竖直堆叠后的数组
- ◀ numpy.zeros\_like() 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵
- ◀ scipy.stats.dirichlet.pdf() 计算 Dirichlet 分布的概率密度函数
- ◀ scipy.stats.multivariate\_normal.pdf() 多元高斯分布概率密度函数
- ◀ sympy.diff() 求解符号导数和偏导解析式
- ◀ sympy.exp() 符号自然指数
- ◀ sympy.lambdify() 将符号表达式转化为函数





# 15.1 网格曲面

## 颗粒度

在绘制网格曲面时，我们也会碰到颗粒度问题。如图 1 (a) 所示，当网格稀疏时，生成的网格曲面很粗糙。

另外一个极端，如图 1 (b) 所示，当颗粒度过高时，生成的网格过于绵密，虽然线条变得光滑很多，但是整个曲面变化趋势的辨识度反而降低。

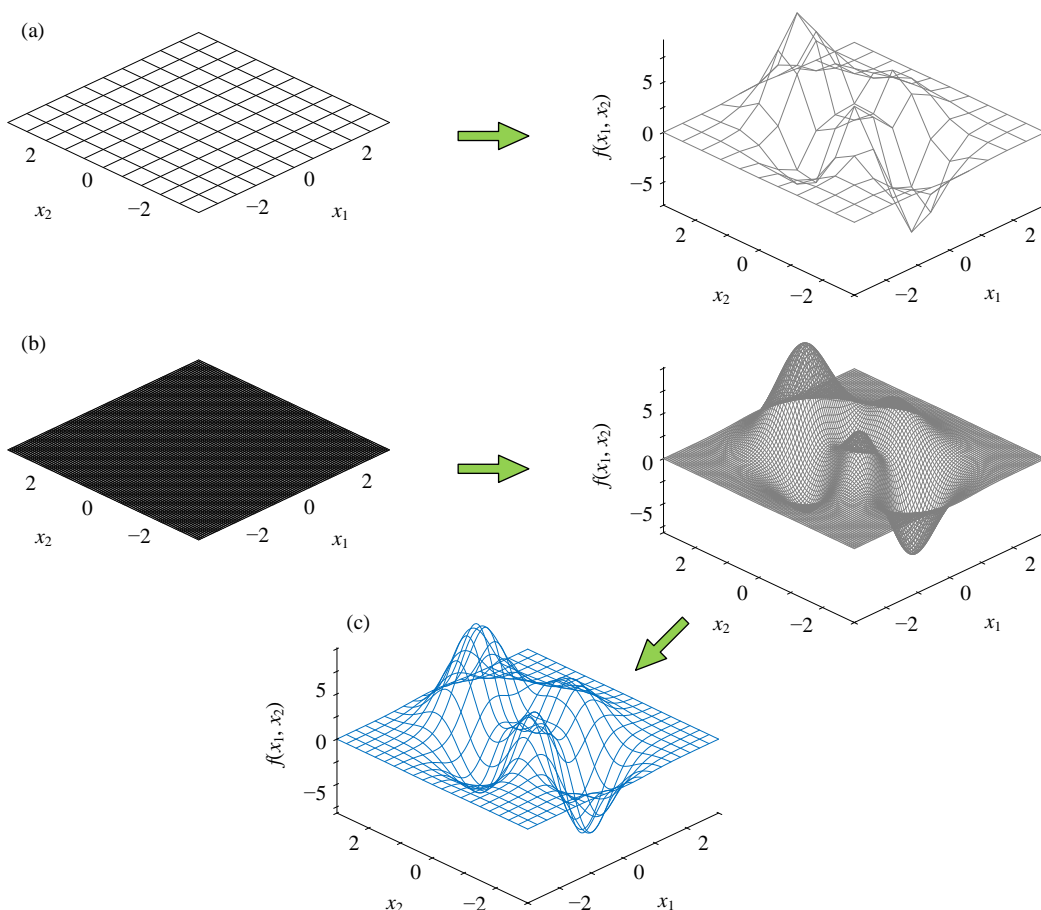


图 1. 网格颗粒度 | BK\_2\_Ch15\_01.ipynb

解决这个问题的办法很简单，在使用 `Axes3D.plot_wireframe()` 绘制网格曲面时，可以使用图 1 (b) 这种颗粒度很高的网格面，同时设置 `rstride`、`cstride` 来调节步幅。如图 1 (c) 所示，增大单一维度上的步幅，可以保证线条的光滑程度，但是网格面看上去更清爽。

注意，使用 `Axes3D.plot_wireframe()` 时，如果不提供 `rstride`、`cstride`，函数会自动设置步幅。但是，为了保证质量可控，建议大家主动设置 `rstride`、`cstride`。

## 绘制沿特定方向曲线

对于 `Axes3D.plot_wireframe()`，我们可以分别将 `rstride`、`cstride` 设置为 0，从而绘制沿单一方向曲线，如图 2 (a)、(c) 所示。这种可视化方案很适合分析二元函数。这两种曲面可以投影在平面上，如图 2 (b)、(d) 所示。

## 进一步变形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

在网格曲面基础之上，我们还可以绘制并强调特定曲线，如图 2 (e)、(f) 所示。在网格曲面上，我们可以绘制等高线，也可以绘制散点（如图 2 (g)、(h) 所示）。

### 聊聊代码

Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch15\_01.ipynb 绘制图 1 和图 2 所有子图，下面聊聊其中关键语句。

代码 1 在使用 `plot_wireframe()` 绘制网格曲面时，设定步长。

**a** 利用 `matplotlib.pyplot.subplots()`，简作 `plt.subplots()`，创建图形对象和轴对象。

`subplot_kw={'projection': '3d'}` 是通过关键字参数来指定子图的属性；其中 `projection: '3d'` 表示创建一个 3D 坐标轴对象。

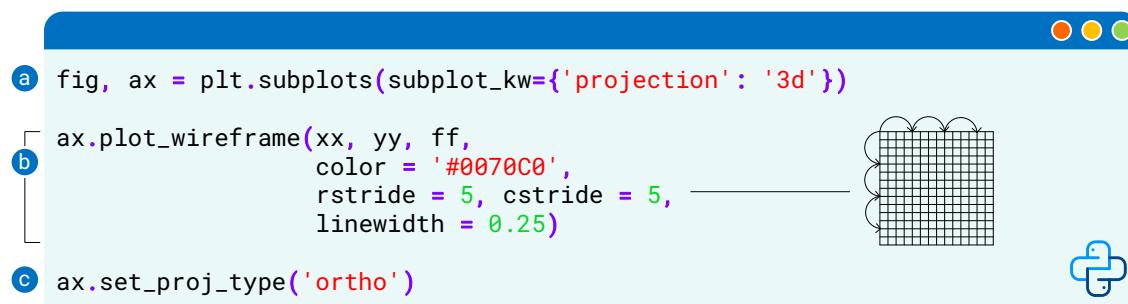
**b** 利用 `plot_wireframe()` 在三维轴对象上绘制网格曲面。

`xx`, `yy`, 和 `ff` 是要绘制的三维网格曲面的坐标。`xx` 和 `yy` 表示网格的  $x$  和  $y$  坐标，而 `ff` 表示在这些坐标点上的二元函数值。在 BK\_2\_Ch15\_01.ipynb 中，我们利用 `sympy` 符号变量定义二元函数，然后将其转化为 Python 函数。

`color='#0070C0'` 指定网格曲面颜色。在这里，`'#0070C0'` 是一个十六进制表示法的 RGB 值，对应于蓝色。

`rstride=5`, `cstride=5` 控制绘制的步幅。`rstride` 是行步幅，`cstride` 是列步幅。这两个参数指定在网格上跳过多少行和列来绘制线。

**c** 将投影模式设置为正交投影。



代码 1. 设置步幅 | BK\_2\_Ch15\_01.ipynb

把图 1 (c) 比作一块布的话，它相当于由两组织线交织而成。而图 2 (a)、(c) 仅仅展示其中一组织线。对于二元函数来说，我们可以用这种可视化方案展示偏导数。代码 2 完成这种可视化方案。

**a** 还是利用 `plt.subplots()` 创建图形对象和轴对象。

**b** 利用 `plot_wireframe()` 绘制网格曲面时，设置 `cstride=0`，这意味着不显示列方向数据（ $y$  方向织线）。

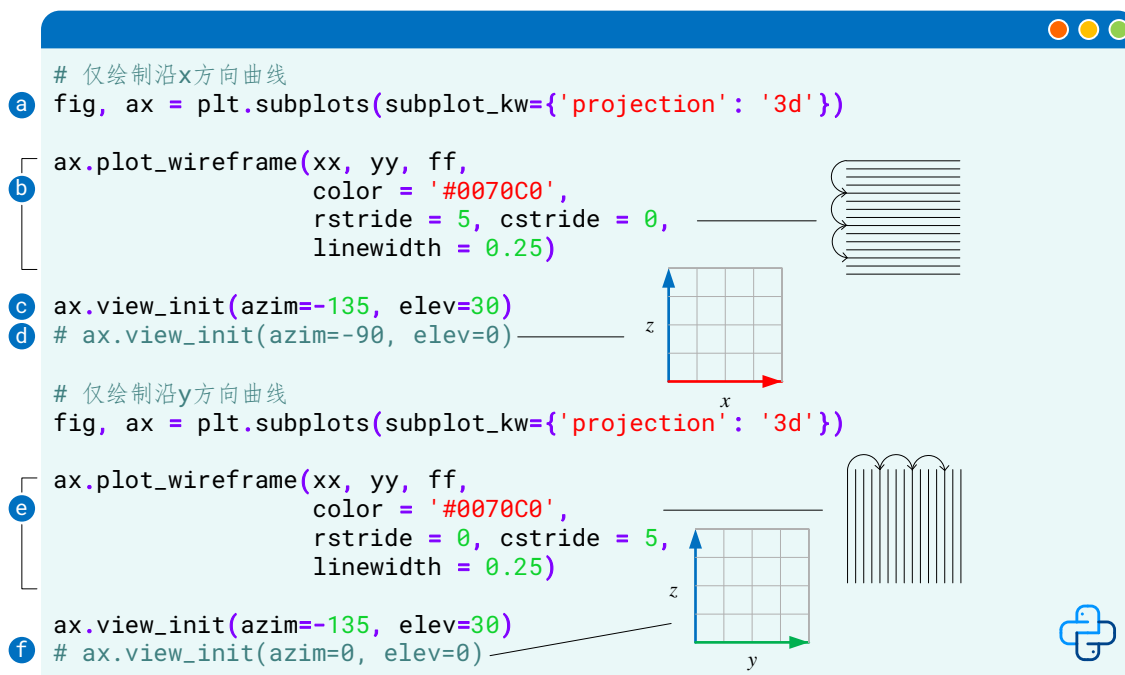
**c** 设置视角，呈现效果为三维。

**d** 设置视角，呈现效果为  $xz$  平面投影。

**e** 利用 `plot_wireframe()` 绘制网格曲面时，设置 `rstride=0`，这意味着不显示行方向数据（ $x$  方向织线）。

**f** 设置视角，呈现效果为  $yz$  平面投影。

请大家自行分析 BK\_2\_Ch15\_01.ipynb 其他可视化方案对应代码。



代码 2. 展示单一维度织线 | BK\_2\_Ch15\_01.ipynb

## 15.2 在三维平面展示四维数据

一般情况下，用 `Axes3D.plot_surface()` 函数绘制三维曲面  $f(x, y)$  时，渲染曲面的颜色也会根据  $f(x, y)$  取值，如图 3 (a) 所示。

如果，渲染三维曲面  $f(x, y)$  时采用另外一组数据  $V(x, y)$ ，我们便得到类似图 3 (b) 这幅图。

举个例子， $(x, y)$  代表经纬度，三维曲面  $f(x, y)$  代表一座山峰的海拔高度，而  $V(x, y)$  代表山峰不同位置某个时刻的温度值。

反过来，我们也可以用  $V(x, y)$  构造曲面，而用  $f(x, y)$  作为依据渲染曲面，具体如图 3 (c) 所示。

Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch15\_02.ipynb 绘制图 3 所有子图；代码 3 绘制图 3 (b)，下面聊聊这段代码。

**a** 使用 `matplotlib.pyplot.Normalize()`，简作 `plt.Normalize()`，创建了一个归一化 (normalization) 对象，用于将数据映射到颜色映射范围内。

`V.min()` 和 `V.max()` 分别是二元函数  $V(x, y)$  数据数组中的最小值和最大值。

`plt.Normalize()` 接受两个参数，即映射的最小值和最大值。这些参数用来规范化数据，确保它们在颜色映射中的范围内。

函数的结果 `norm_plt` 为一个归一化对象。

**b** 利用 `matplotlib.cm.turbo()`，简作 `cm.turbo()`，将归一化数组映射到一系列颜色值。

`cm.turbo` 是 Matplotlib 中的一个内置颜色映射。

`norm_plt(V)` 使用之前创建的归一化对象 `norm_plt` 来对数据数组  $V$  进行归一化处理。这一句确保数据在颜色映射中的范围内。

最终结果，`colors` 为一个包含颜色信息的数组，其形状与原始数据数组相同。

**c** 利用 `plot_surface()` 在三维轴对象上绘制颜色渲染网格曲面图。

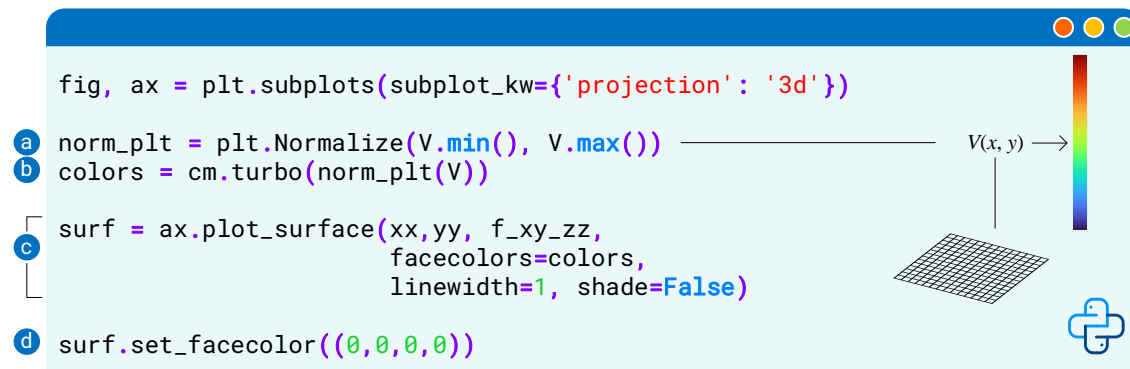
默认情况下，这个函数会根据 `f_xy_zz` 具体数值来渲染曲面。

但是，由于设置了 `facecolors=colors`，这样我们便可以使用之前生成的颜色数组 `colors` 来为曲面的各个面指定颜色。而 `colors` 直接和函数  $V(x,y)$  值对应，这样我们便将第四维度投影到了网格曲面上。

`linewidth=1` 设置曲面上线的宽度为 1。

`shade=False` 禁用阴影效果。

④ 利用 `surf.set_facecolor((0, 0, 0, 0))` 将曲面的表面颜色设置为透明，这样仅仅显示曲线。



代码 3. 将第 4 维数据投影到曲面上 | BK\_2\_Ch15\_02.ipynb

### Dirichlet 分布

图 4 所示为用这种方案可视化 Dirichlet 分布。这个分布  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  的取值范围都是  $[0, 1]$ ，且满足  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ 。给定不同分布参数  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ ，将不同位置 Dirichlet 分布概率密度值映射到  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$  平面上，我们便得到图 4 图像。

实际上， $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$  起到的作用是降维，将三维空间降低到二维平面。

➔ 本书后续还会用重心坐标系可视化 Dirichlet 分布。此外，《统计至简》第 7 章将专门讲解 Dirichlet 分布。



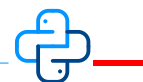
Bk\_2\_Ch15\_03.ipynb 绘制图 4 所有子图，请大家自行分析这段代码。

## 15.3 其他可视化方案

本章最后一节再给出几种和网格曲面有关的可视化方案，有了前文的详细讲解，这些可视化方案就留给大家自行学习了。

### 绘制剖面

我们可以用 `Axes3D.plot_wireframe()` 绘制剖面。如图 5 所示，剖面可以平行  $xy$ 、 $xz$ 、 $yz$  平面。结合线图，这些剖面可以用来可视化剖面线。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch15\_04.ipynb 绘制图 5 子图，请大家自行学习。

### 绘制剖面线

如图 6 (a) 所示，这幅图中有几个重要元素：网格曲面、特定高度等高线、剖面。从数学角度来看，浅蓝色剖面切割网格曲面的结果是红色曲线。

图 6 (b)、(c) 两幅子图中的红色剖面线则是用线图绘制。图 6 (b) 的剖面位于  $y = 0$ ，红色剖面线则展示当  $y = 0$  时，函数  $f(x, y)$  随  $x$  变化。图 6 (c) 的剖面位于  $x = 0$ ，红色剖面线则展示当  $x = 0$  时，函数  $f(x, y)$  随  $y$  变化。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch15\_05.ipynb 绘制图 6 子图，请大家自行学习。

### 平面填充

图 7 两个子图所示为二元高斯分布的概率密度函数曲面。为了可视化  $x_1$ 、 $x_2$  分别取不同值时函数曲线下方的面积，我们可以采用 `Axes3D.add_collection3d()` 函数在三维空间可视化填充对象。

➡ 《统计至简》第 10 章将专门讲解二元高斯分布。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch15\_06.ipynb 绘制图 7 子图，请大家自行学习。

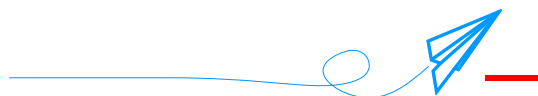
### 可视化圆形薄膜振动模式

图 8 ~ 图 10 可视化各种圆形薄膜振动模式；当然，本书的目的仅仅是展示这些现象，解释这些现象背后的数学、物理机理就要靠大家自己了。

❓ 此外，大家如果对振动模式感兴趣，可以自己查找阅读文献，并绘制矩形薄膜的振动模式。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch15\_07.ipynb 绘制图 8 ~ 图 10，请大家自行学习。



本章以网格曲面为基础，向大家展示各种丰富的可视化方案。请大家特别注意如何用三维平面展示四维数据。



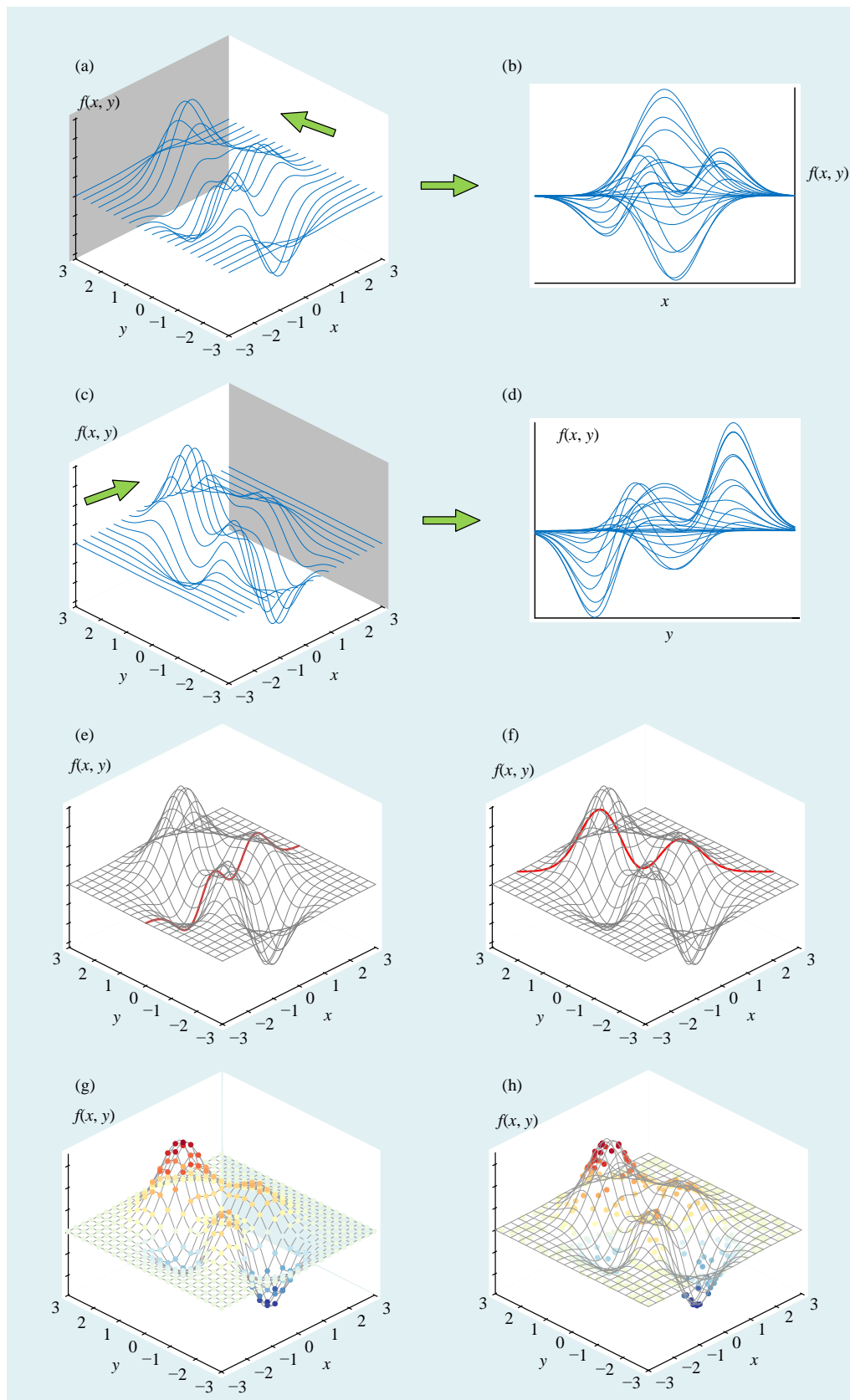


图 2. 网格曲面的进一步变形 | BK\_2\_Ch15\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

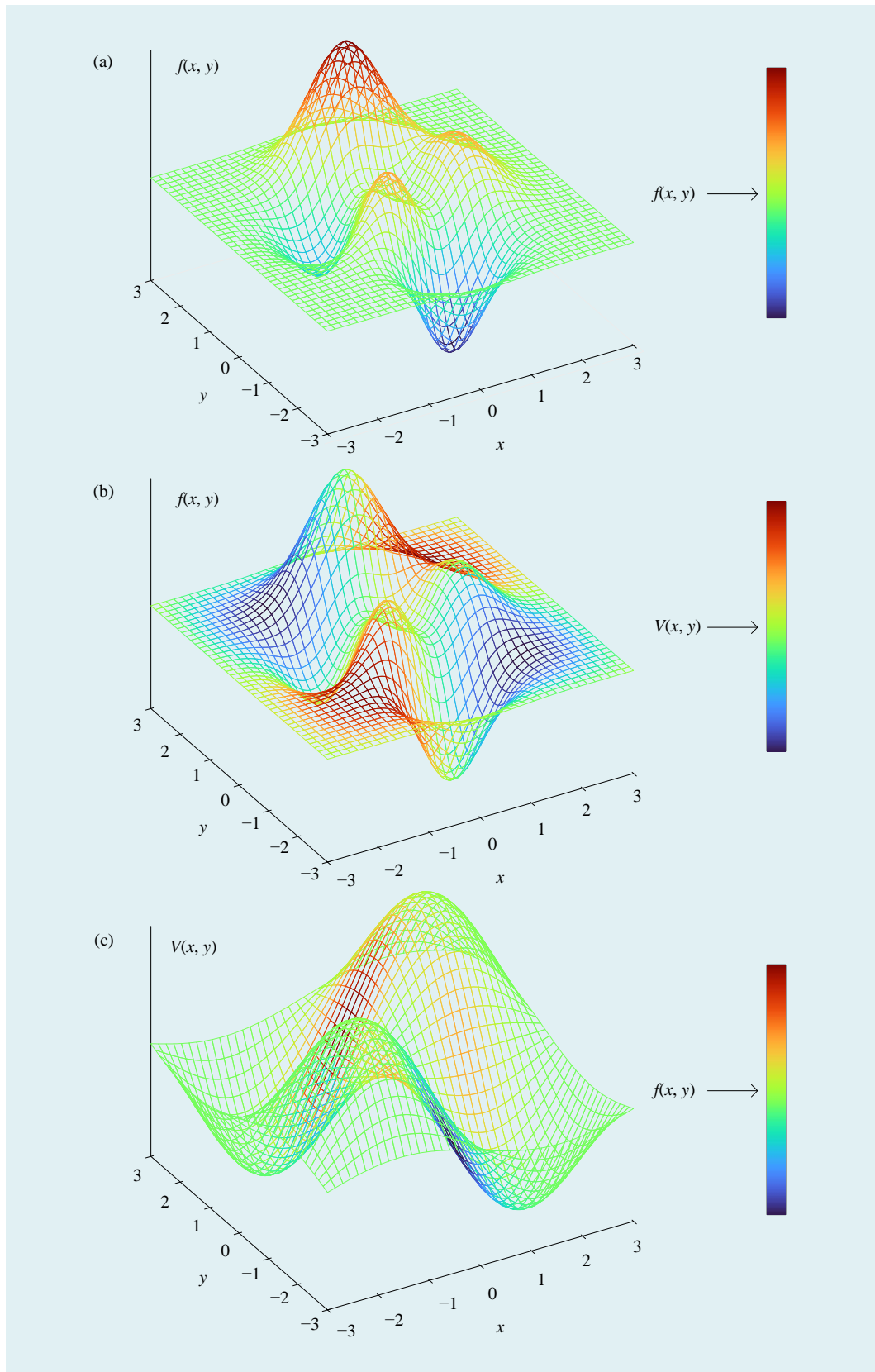
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 3. 渲染三维曲面 |  BK\_2\_Ch15\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

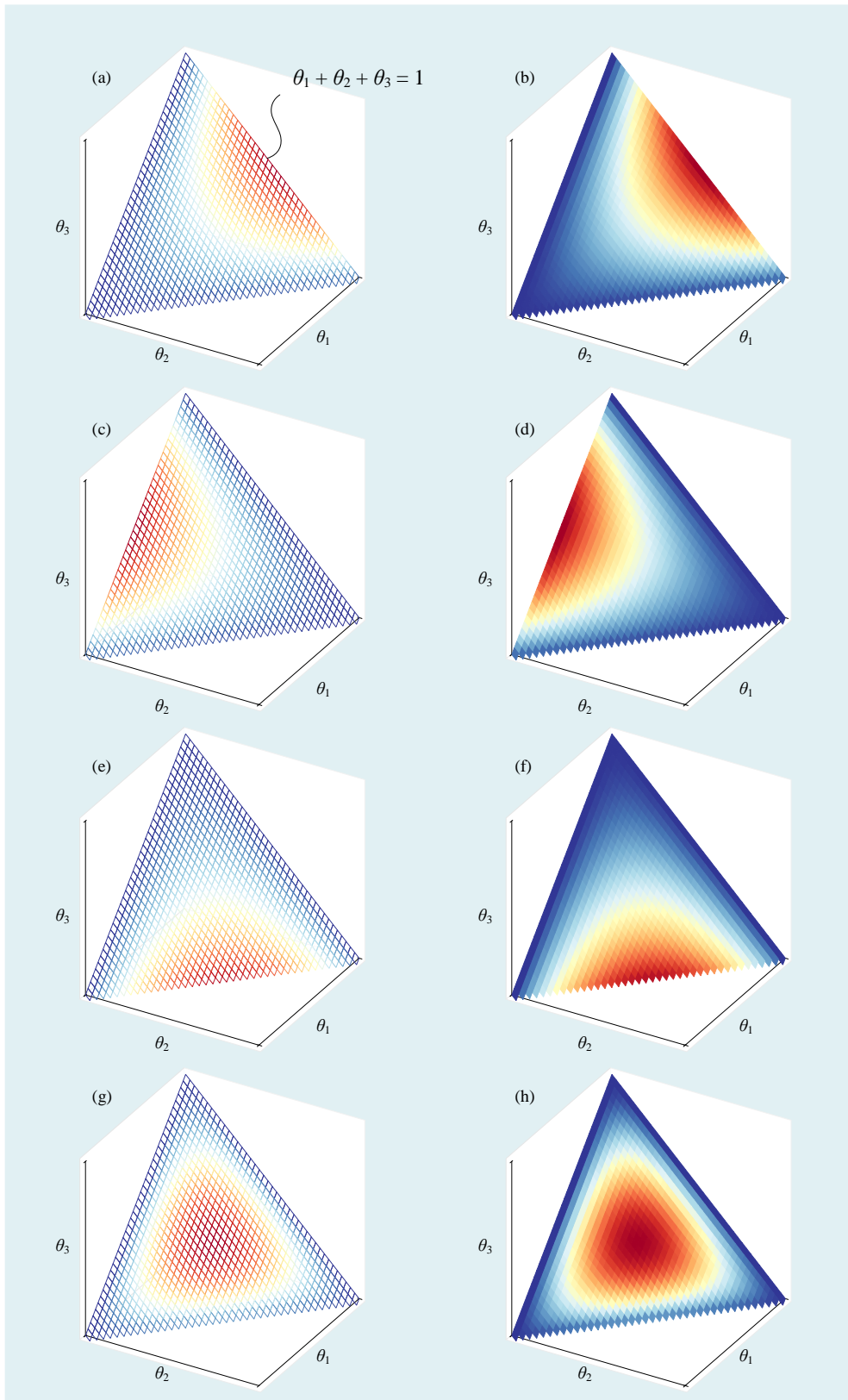


图 4. Dirichlet 分布 |  BK\_2\_Ch15\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

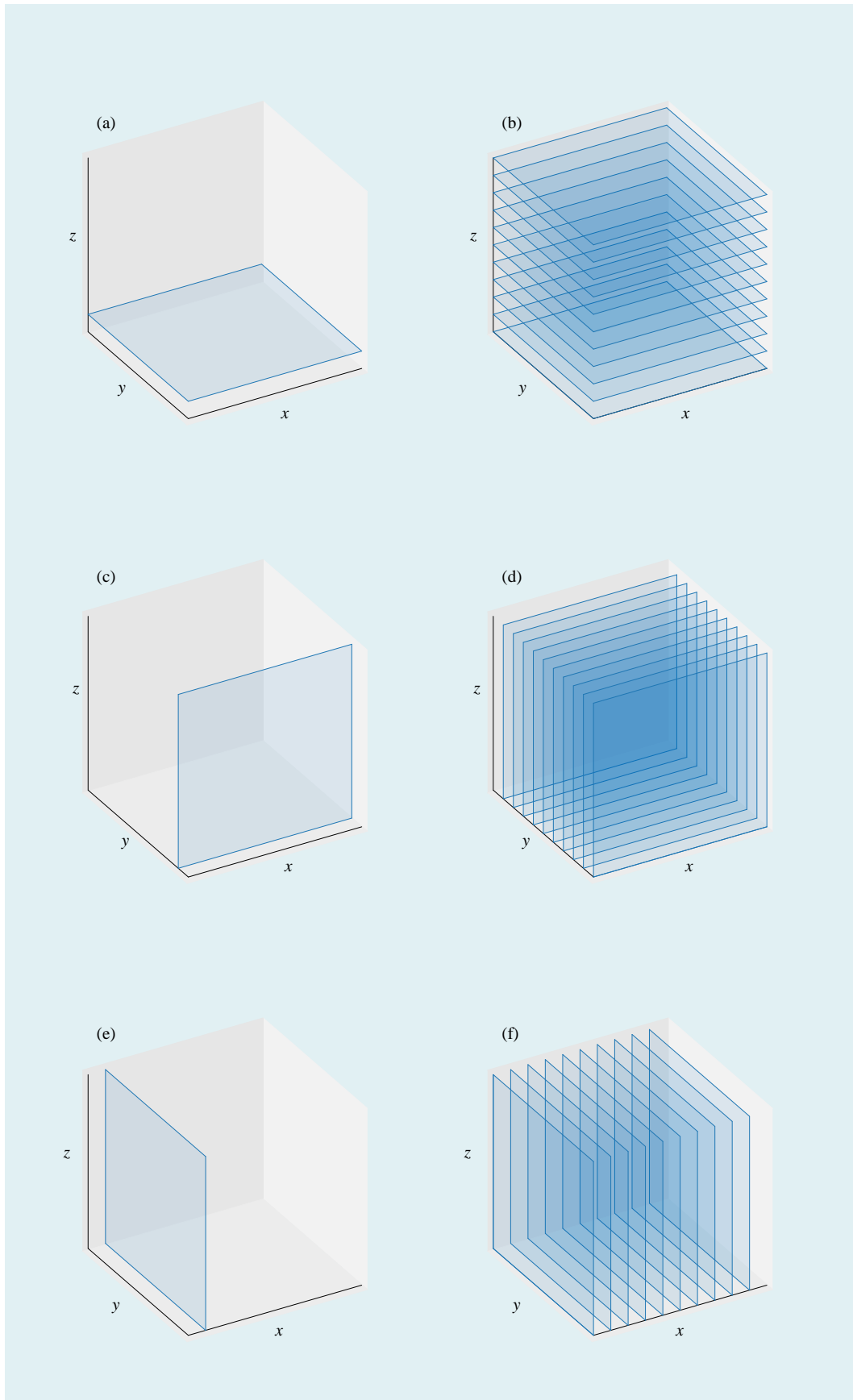


图 5. 平行于不同平面的剖面 |  BK\_2\_Ch15\_04.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

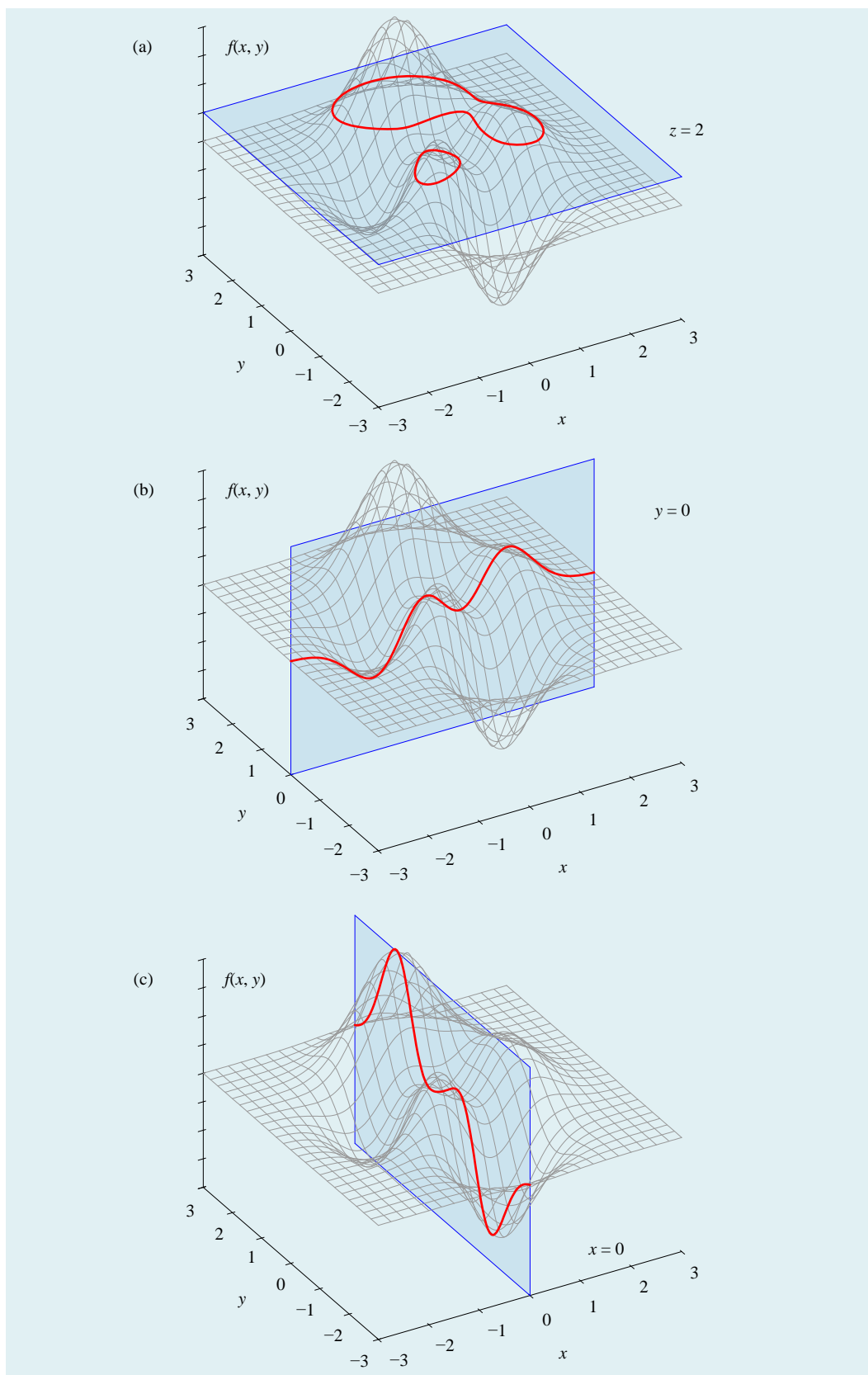



图 6. 二元函数在三个不同剖面上的剖面线 |  BK\_2\_Ch15\_05.ipynb

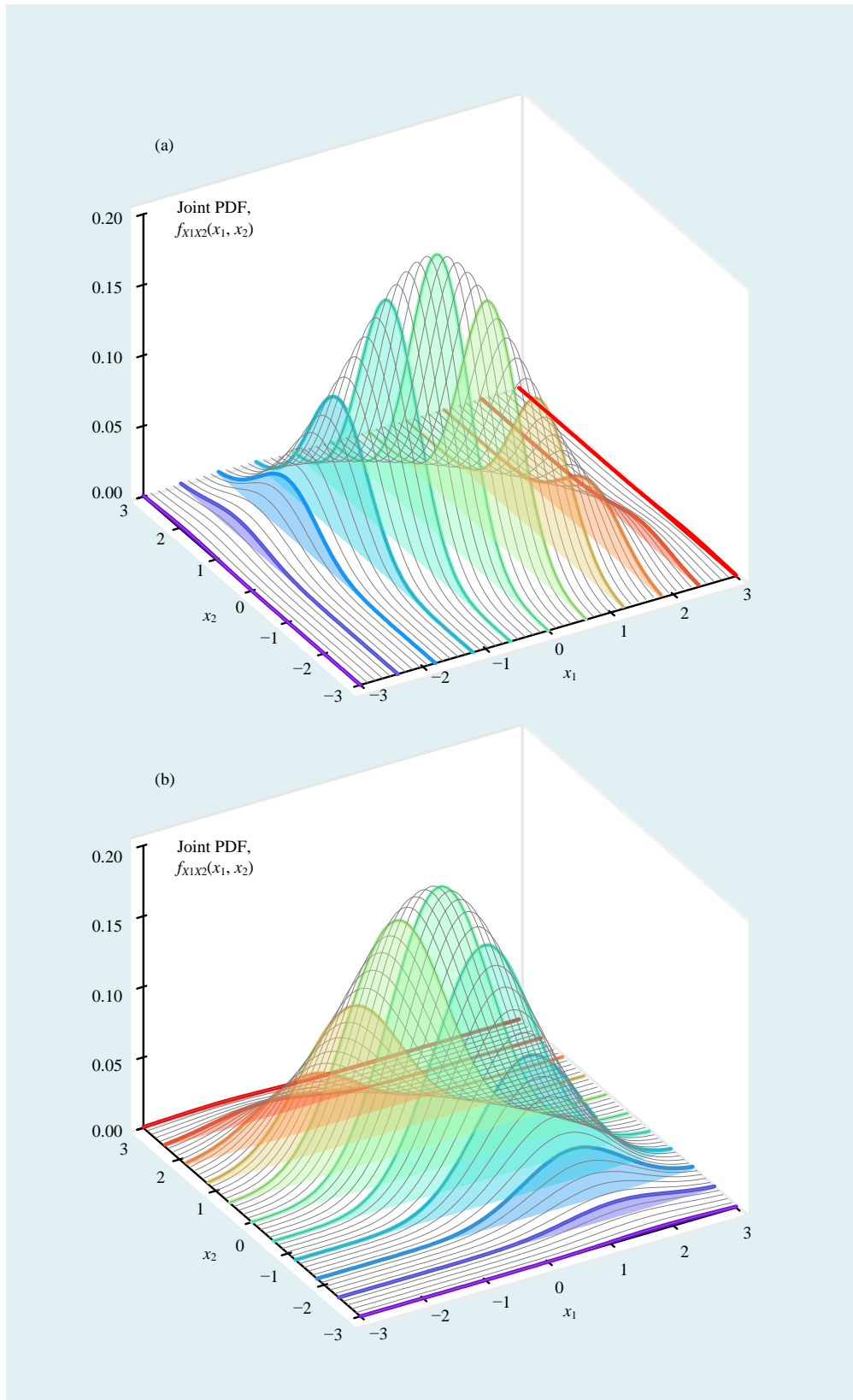
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 7. 三维线图的平面填充 |  BK\_2\_Ch15\_06.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

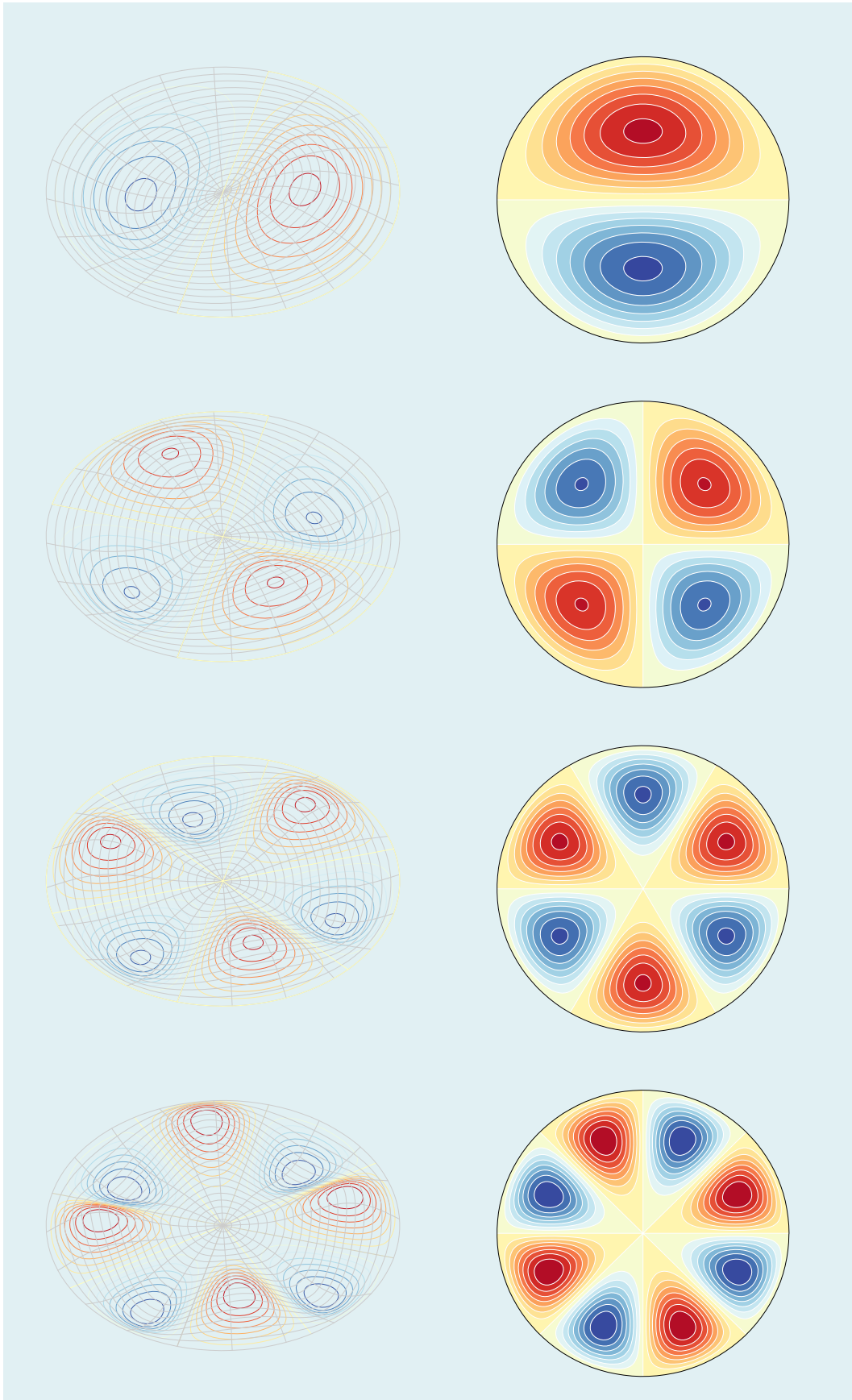

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



图 8. 圆形薄膜振动模式, 第 1 组 |  BK\_2\_Ch15\_07.ipynb

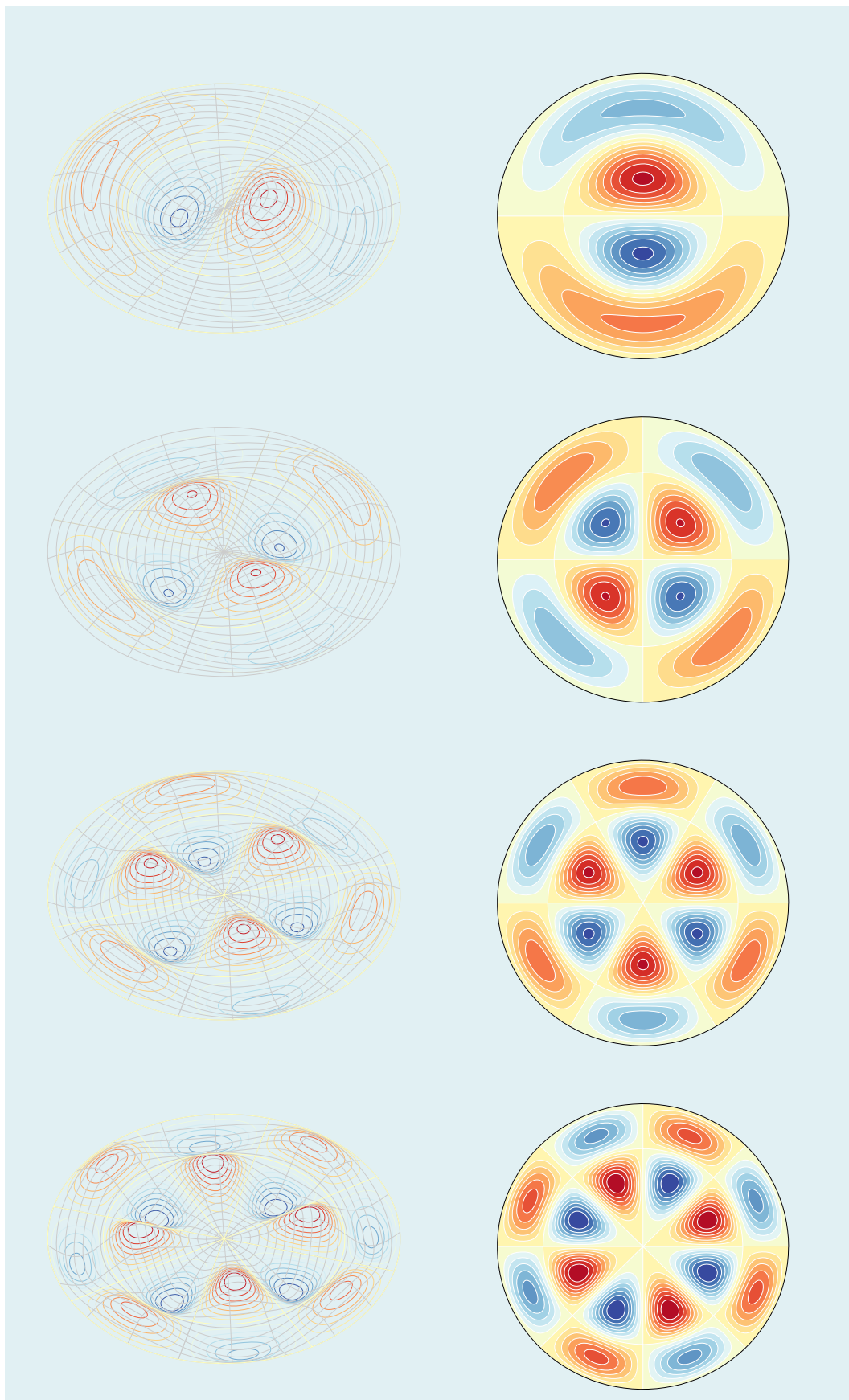

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 9. 圆形薄膜振动模式, 第 2 组 |  BK\_2\_Ch15\_07.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



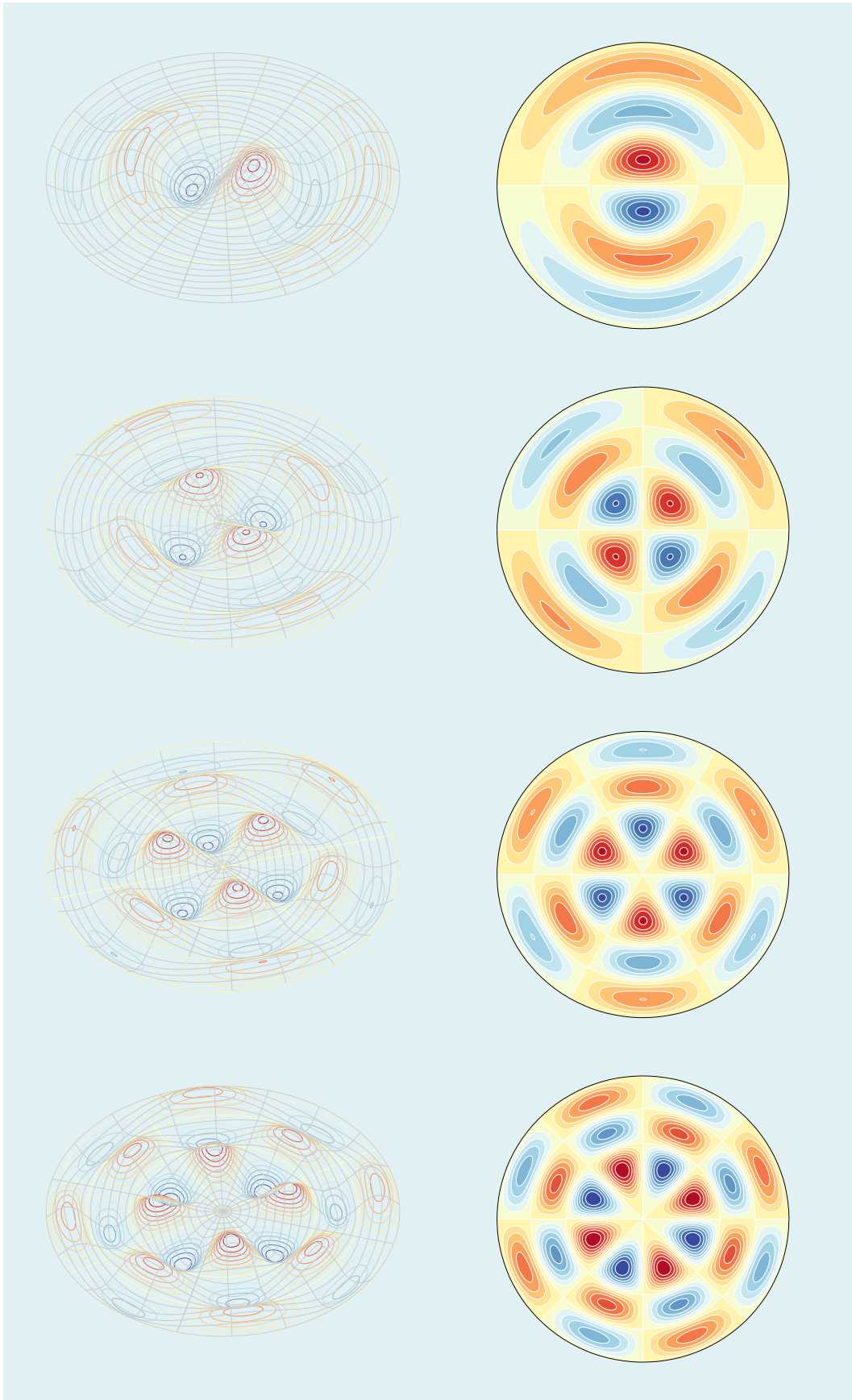



图 10. 圆形薄膜振动模式，第 3 组 |  BK\_2\_Ch15\_07.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)