

16

3D Contours

三维等高线

可视化应用极为灵活，特别是在展示隐函数



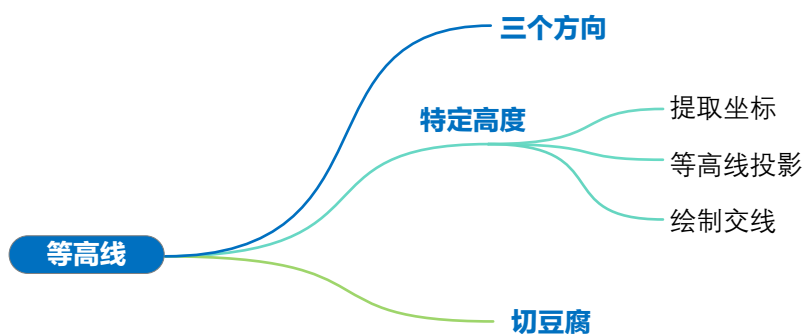
真正的艺术家不是被启发，而是启发别人。

A true artist is not one who is inspired, but one who inspires others.

—— 萨尔瓦多·达利 (Salvador Dali) | 西班牙超现实主义画家 | 1904 ~ 1989



- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制平面填充等高线
- ◀ matplotlib.pyplot.plot_wireframe() 绘制线框图
- ◀ numpy.dot() 计算向量标量积。值得注意的是，如果输入为一维数组，numpy.dot() 输出结果为标量积；如果输入为矩阵，numpy.dot() 输出结果为矩阵乘积，相当于矩阵运算符 \odot
- ◀ numpy.linalg.det() 计算行列式值
- ◀ numpy.linalg.inv() 矩阵求逆
- ◀ numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- ◀ numpy.sqrt() 计算平方根
- ◀ numpy.vstack() 返回竖直堆叠后的数组
- ◀ sympy.diff() 求解符号导数和偏导解析式
- ◀ sympy.exp() 符号自然指数
- ◀ sympy.lambdify() 将符号表达式转化为函数



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

16.1 沿三个方向获取等高线

如图 1 所示，Matplotlib 中三维空间等高线和填充等高线实际上可以指定三个不同方向；这种灵活性可以帮助我们设计很多有趣的可视化方案。

下面，我们首先分别介绍这三种不同获取等高线的方向。

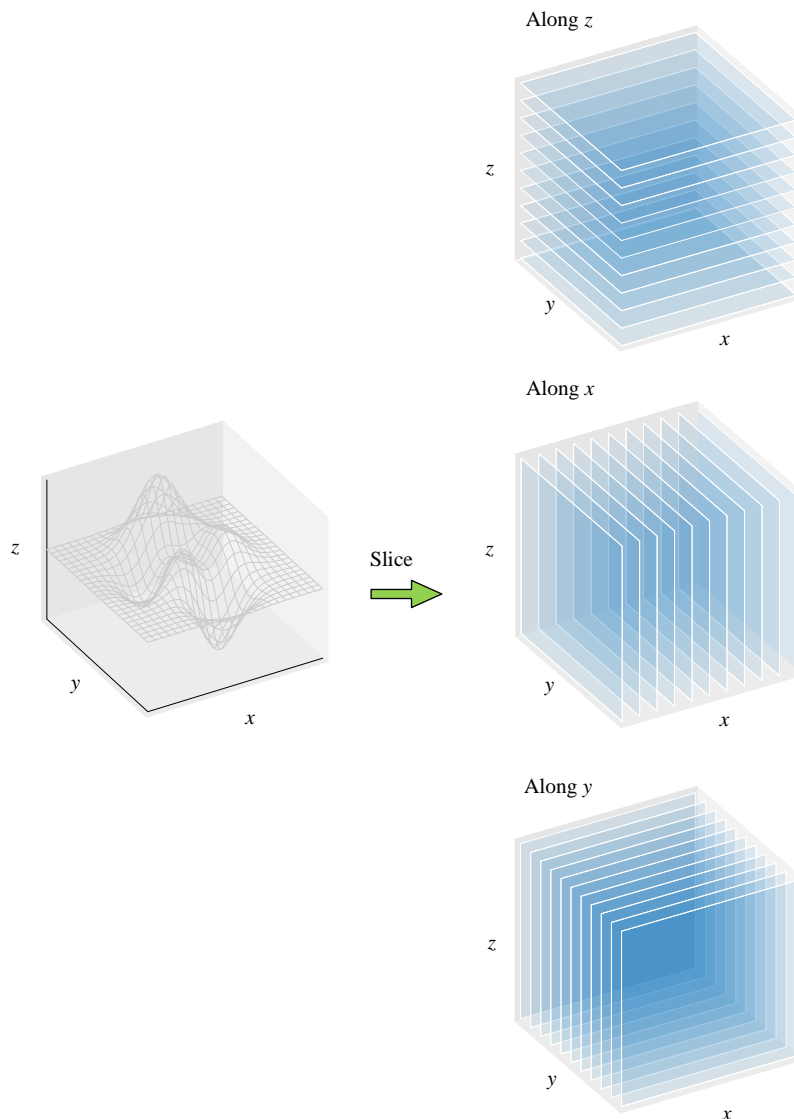


图 1. 三种不同切取等高线的方式

沿 z 方向

大家已经非常熟悉的是其默认垂直方向，即 z 方向，具体如图 9 (a)、(b) 所示。

此外，`matplotlib.pyplot.contour()` 和 `matplotlib.pyplot.contourf()` 还可以通过设置 `offset` 指定绘制所有等高线的具体高度。图 9 剩下几幅子图绘制等高线高度不同。

Bk_2_Ch16_01.ipynb 绘制图 9 所有子图。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

a 用 `matplotlib.pyplot.subplots()`，简作 `plt.subplots()`，创建了图形对象 `fig`，和三维轴对象 `ax`。

b 在三维轴对象 `ax` 上用 `plot_wireframe()` 绘制单色网格，网格颜色为灰色。参数 `rstride`、`cstride` 控制数组采样步长。

c 在三维轴对象 `ax` 上用 `contour()` 绘制三维等高线。

`xx`, `yy`, `ff` 用于定义等高线图的横坐标、纵坐标和高度值（二元函数值）。

`zdir='z'` 指定了等高线图的投影方向。在这里，`'z'` 表示在 `z` 轴特定高度上绘制等高线。

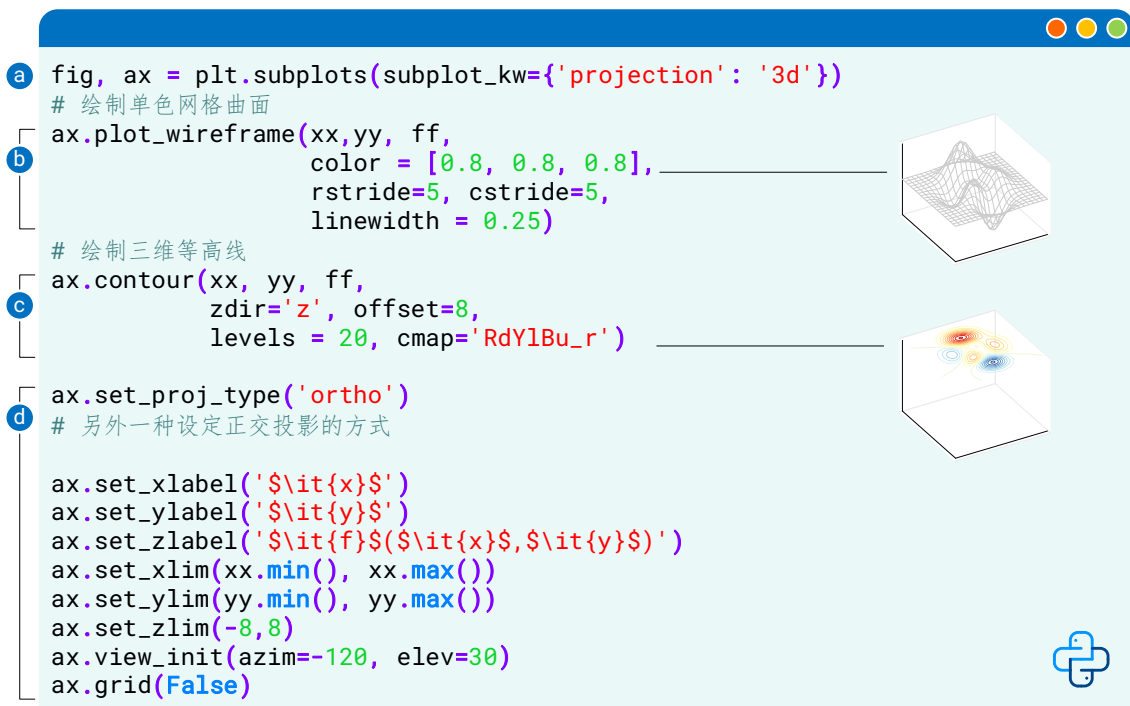
更形象地说，我们在 `z` 轴取不同值上切割曲面，结果是一系列剖面线，具体如图 2 所示。

`offset=8` 是等高线图的偏移值。它将整个图形沿着 `z` 轴方向上移，以防止与其他元素重叠。

`levels=20` 指定了等高线的层数。

`cmap='RdYlBu_r'` 指定颜色映射的参数。

d 对 `ax` 进行各种美化设置，请大家自行分析这些语句。



代码 1. 在指定 `z` 高度上绘制三维等高线 | Bk_2_Ch16_01.ipynb

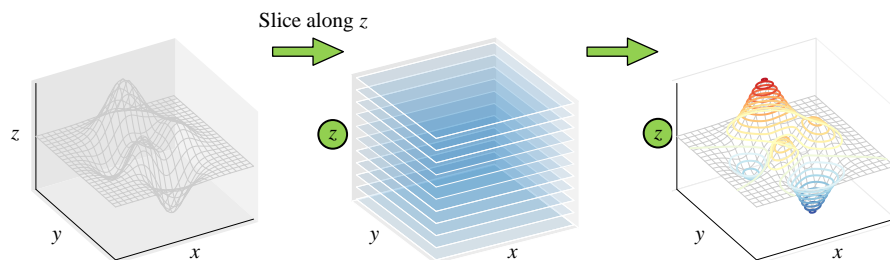


图 2. 在指定 `z` 轴高度上切割曲面，等高线垂直 `z` 轴，平行 `xy` 平面

沿 `x` 方向

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

设置 `zdir='x'`，我们可以绘制沿 x 轴方向的等高线，如图 10 (a) 所示。注意，只有在 3D 轴的条件下，这个设置才会生效。同时设定 `offset`，我们可以在不同位置绘制这些等高线，如图 10 (c)、(e)、(g) 所示。

BK_2_Ch16_02.ipynb 绘制图 10 所有子图，下面聊聊代码 2 这几句关键语句。

- a 用 `numpy.linspace()`，简作 `np.linspace()`，生成等差数组，对应等高线的具体高度值。
- b 用 `contour()` 在三维轴对象 `ax` 上绘制等高线。和前文不同的是，`zdir='x'` 指定等高线图的投影方向是沿着 x 轴，即在 x 取不同值时切割曲面。之前的例子则是在特定 z 轴高度上切割曲面。
- c 是在另外一个三维轴对象 `ax` 上用 `plot_wireframe()` 绘制网格曲面。
- d 也是用 `contour()` 在三维轴对象 `ax` 上绘制等高线。

`zdir='x'` 表示等高线图的投影方向是沿着 x 轴。而参数 `offset=3` 指定等高线图在 x 轴上的偏移值。具体来说，我们将在 $x = 3$ 这个平面上绘制等高线。

```
fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

a level_array = np.linspace(-3,3,30)
# 沿x轴具体值，平行y轴
b ax.contour(xx, yy, ff,
             zdir='x',
             levels = level_array,
             cmap='rainbow')

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

c ax.plot_wireframe(xx,yy, ff,
                  color = [0.8, 0.8, 0.8],
                  rstride=5, cstride=5,
                  linewidth = 0.25)
# 沿x轴具体值，平行y轴
d ax.contour(xx, yy, ff,
            zdir='x', offset=3, # 指定具体x值
            levels = level_array,
            cmap='rainbow')
```

代码 2. 在指定 x 高度上绘制三维等高线 | Bk_2_Ch16_02.ipynb

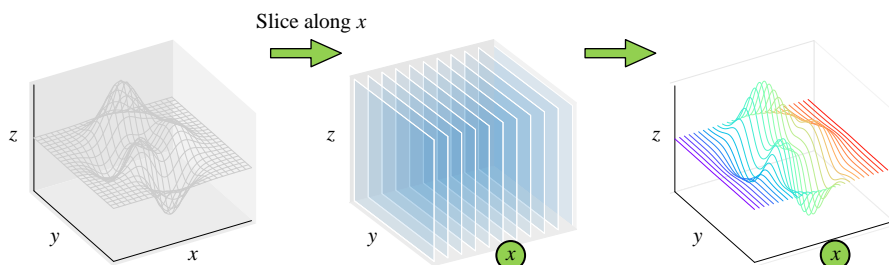


图 3. 在指定 x 轴高度上切割曲面，等高线垂直 x 轴，平行 yz 平面

沿 y 方向

类似地，如图 4 所示，设置 `zdir='y'` 和不同 `offset` 值，我们可以绘制沿 y 轴方向的等高线，如图 10 (b)、(d)、(f)、(h) 所示。

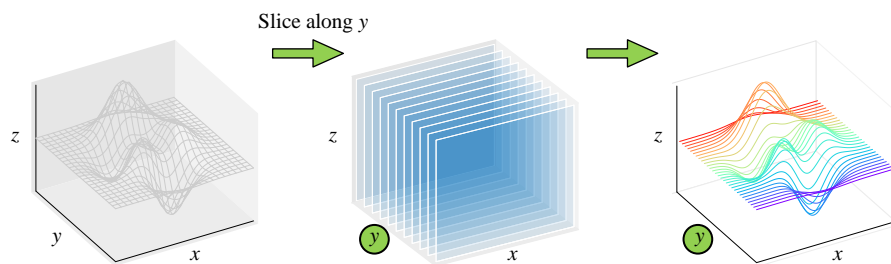
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 4. 在指定 y 轴高度上切割曲面，等高线垂直 y 轴，平行 xz 平面

Bk_2_Ch16_02.ipynb 还绘制图 11、图 12 这两组曲面剖面线，请大家自行分析。

通过调整视角我们还可以绘制如图 5 所示平面等高线，请大家自行学习 BK_2_Ch16_03.ipynb。

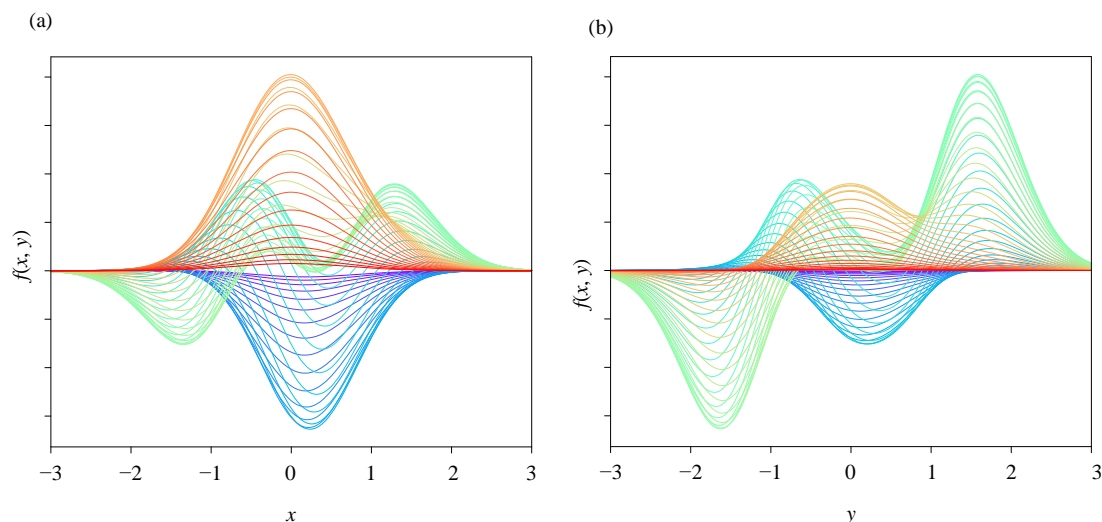


图 5. 通过改变视角绘制两组平面等高线 | Bk_2_Ch16_03.ipynb

16.2 特定等高线

提取特定等高线数值

将满足单位圆 ($x_1^2 + x_2^2 = 1$) 的坐标映射到不同二次曲面，我们可以得到如图 13、图 14 所示的几个子图。我们用的是极坐标方法产生单位圆的坐标。

对于单位圆，我们可以用极坐标系很容易获得满足条件的一系列坐标 (x_1, x_2)。然后再用三维线图绘制 ($x_1, x_2, f(x_1, x_2)$)。



图 13、图 14 这几幅图和正定性、瑞利商有关。《矩阵力量》一册将介绍这两个概念。

Bk_2_Ch16_04.ipynb 绘制图 13、图 14 所有子图。

下面首先分析代码 3。读过《编程不难》的话，大家应该对这部分代码很熟悉了，下面简单讲解一下。



自定义函数计算二次型函数值。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

- b 定义符号变量列向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 。
- c 计算二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 符号解析式。
- d 将符号解析式转换为 Python 函数。
- e 计算网格坐标二元函数值。

```

x1, x2 = symbols('x1 x2')
# 自定义函数计算二次型函数值
a def quadratic(Q, xx1, xx2):
    b     x = np.array([[x1],
                        [x2]])
    # 二次型, 符号
    c     f_x1x2 = x.T @ Q @ x
    d     f_x1x2_fcn = lambdify([x1, x2], f_x1x2[0][0])
    # 将符号函数表达式转换为Python函数
    e     ff = f_x1x2_fcn(xx1, xx2)
    # 计算二元函数函数值

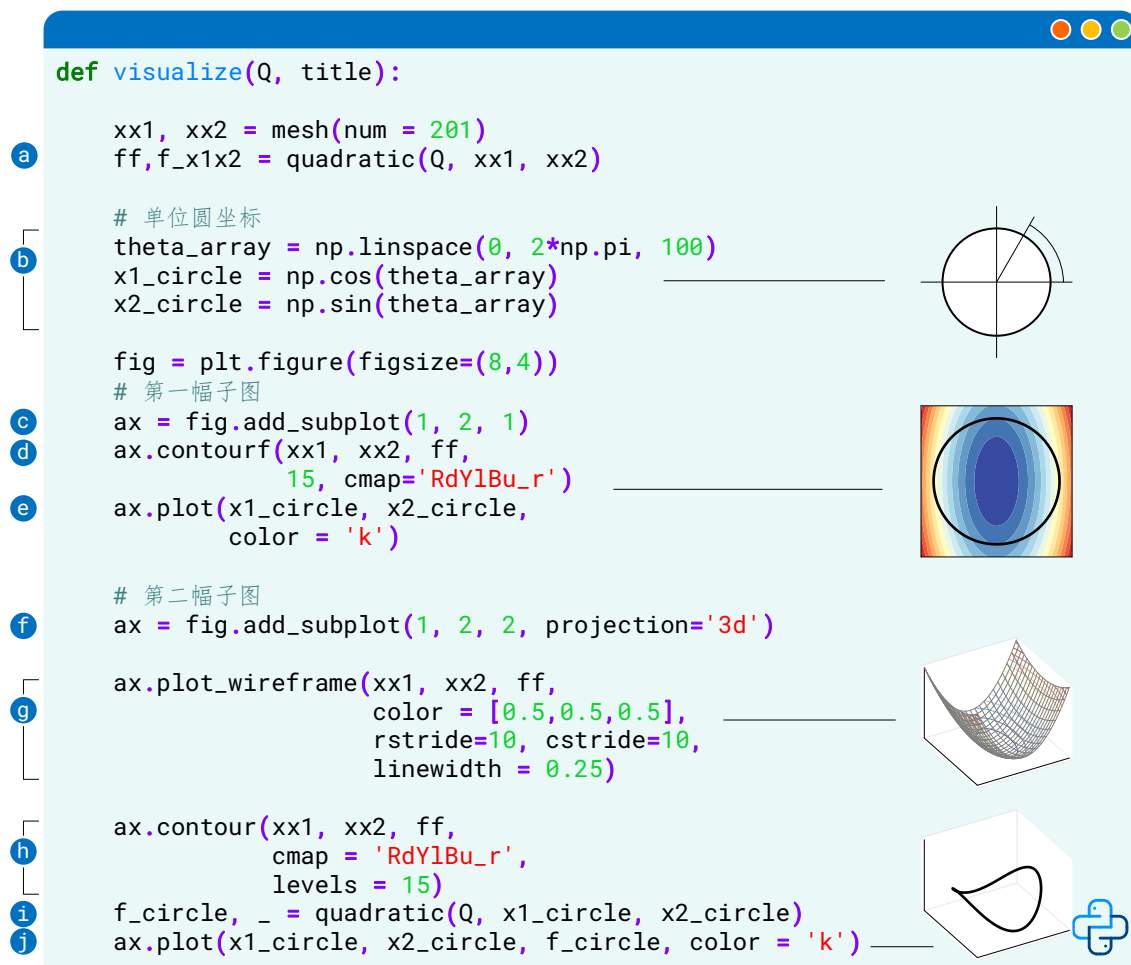
    return ff, simplify(f_x1x2[0][0])

```

代码 3. 二次型自定义函数 |  Bk_2_Ch16_04.ipynb

代码 4 自定义函数可视化二次型。

- a 利用自定义函数根据给定的函数输入计算二元函数值。
- b 利用极坐标获得单位圆坐标。
- c 用 `add_subplot()` 在图形对象 `fig` 上增加第 1 幅子图轴对象 `ax`，默认为平面轴对象。
- d 用 `contourf()` 绘制填充等高线。
- e 用 `plot()` 绘制单位圆。
- f 用 `add_subplot()` 在图形对象 `fig` 上增加第 2 幅子图轴对象 `ax`，设定为三维轴对象。
- g 在三维轴对象上用 `plot_wireframe()` 绘制网格曲面，可视化二次型。
- h 用 `contour()` 绘制三维等高线。
- i 计算单位圆上一组坐标点对应的二次型坐标。
- j 用 `plot()` 绘制线图展示，单位圆在二次型曲面的投影。



代码 4. 自定义函数可视化二次型 | Bk_2_Ch16_04.ipynb

提取特定等高线数值

下面，我们了解一种相对更为方便的可视化方案。如图 6 所示，我们可以先绘制 $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 。

然后找到满足 $g(x_1, x_2) = 1$ 的等高线坐标，再将它们映射到 $f(x_1, x_2)$ 曲面上。

这种方式的好处是，我们可以避免上一种方法用极坐标生成数据点坐标。

提取特定等高线数值的方法很适合处理较为复杂的等式。如图 15 所示，利用提取等高线数值的方法，我们可以很容易获得满足 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ 的坐标点。然后，再将其映射到特定曲面。

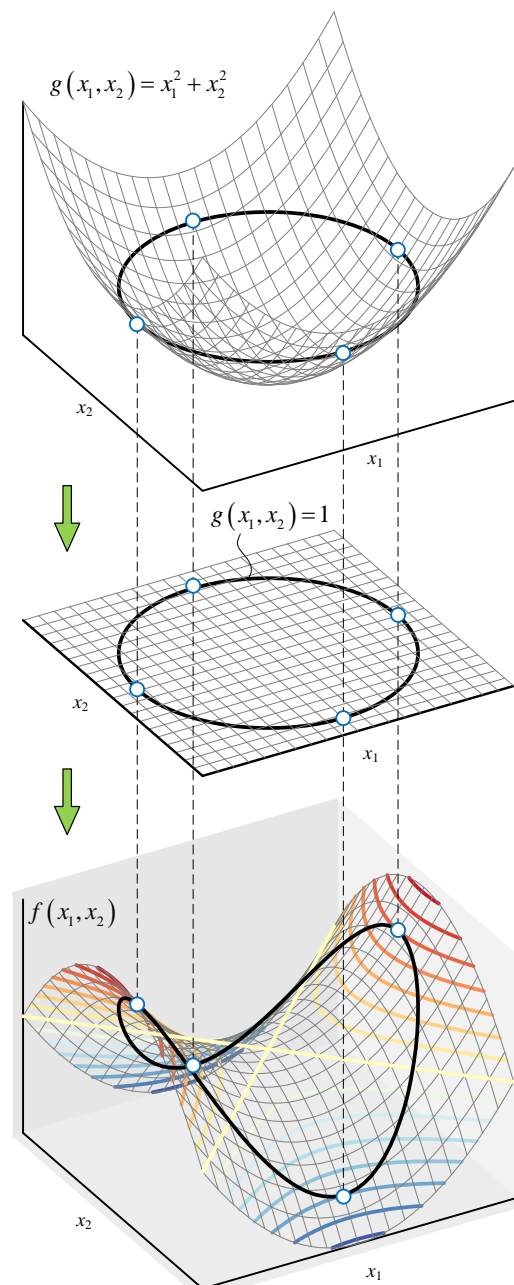


图 6. 提取特定等高线坐标点

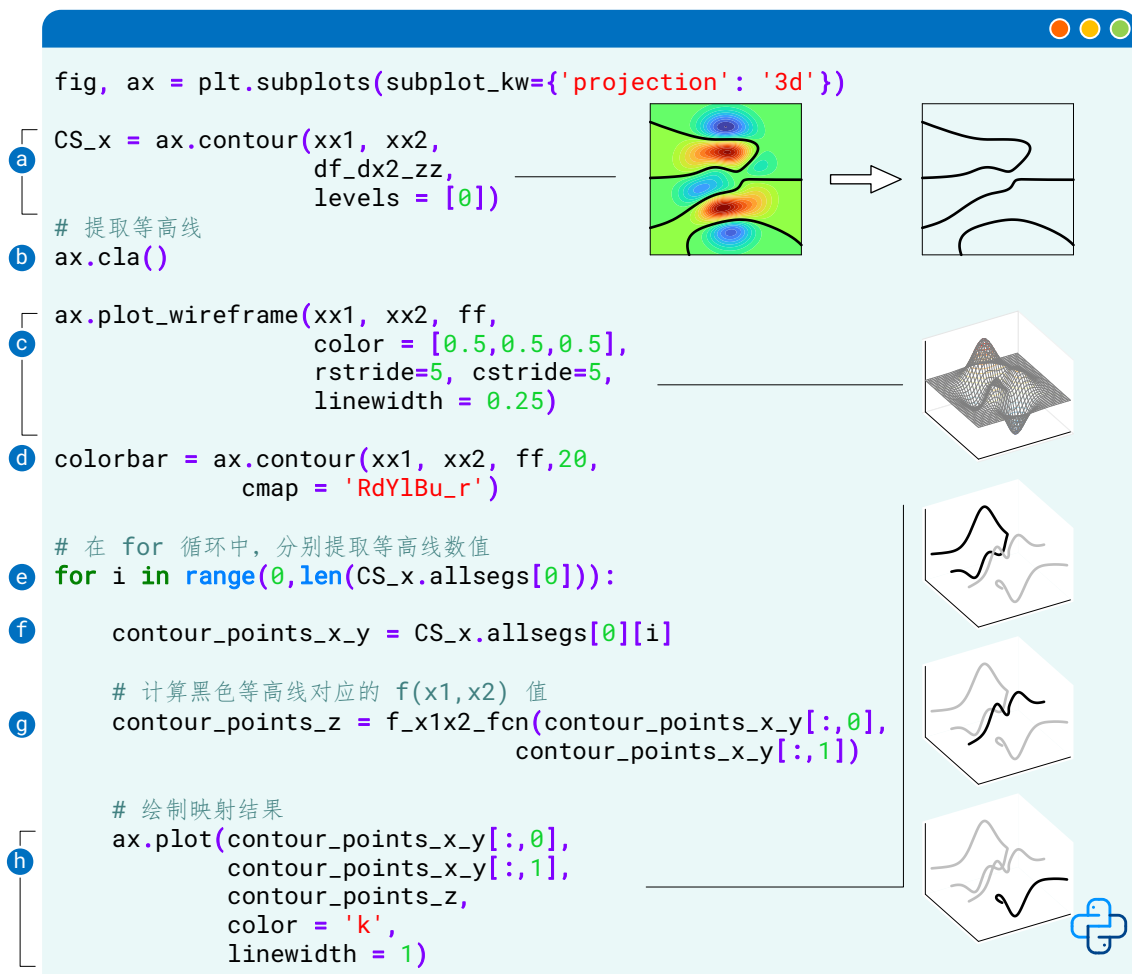
Bk_2_Ch16_05.ipynb 绘制图 15 所有子图，下面聊聊代码 5 这几句。

- a** 这句提取偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ 对应的等高线，之前提过， $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ 本质上也是个二元函数。
 - b** 用 `cla()` 清除当前轴对象上的艺术家，即等高线。因为我们并不想绘制等高线，而是提取藏在 `CS_x` 中的坐标值，即 `CS_x.allsegs[0]`。请大家查看 `CS_x.allsegs[0]` 具体数据。
 - c** 用 `plot_wireframe()` 绘制网格曲面，可视化二元函数。
 - d** 用 `contour()` 绘制三维等高线。
- 对于本例，`CS_x.allsegs[0]` 藏有三条分段等高线数据，我们用 **e** 的 `for` 循环，遍历每一条分段等高线。
- f** 提取 `CS_x.allsegs[0][i]` 第 `i` 段等高线横纵轴坐标值。

g 计算当前分段等高线坐标点对应的二元函数值。

h 用 `plot()` 绘制三维曲线可视化映射结果。

请大家自行分析 `Bk_2_Ch16_05.ipynb` 中剩余代码。



代码 5. 将特定等高线横纵轴坐标映射到另外一个曲面上 | `Bk_2_Ch16_05.ipynb`

绘制交线

类似地，我们可以用提取等高线的方法绘制如图 16 所示曲面和平面的交线。

`Bk_2_Ch16_06.ipynb` 绘制图 16 所有子图，请大家自行分析这段代码。

16.3 可视化四维数据

等高线还可以完成很多有趣的可视化方案，这个话题介绍如何用分层等高线可视化四维数据，我们管这个可视化方案叫做“切豆腐”。本节用到的四维数据是三元高斯分布概率密度函数 $f_{x_1, x_2, x_3}(x_1, x_2, x_3)$ 。它本质上是三元函数。



《统计至简》第 10 章将介绍二元高斯分布，第 11 章介绍多元高斯分布。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

x_1, x_2, x_3 的取值范围都是 $(-\infty, +\infty)$ 。为了方便可视化，我们给 x_1, x_2, x_3 设定的取值范围是 $[-2, 2]$ 。

这样，我们便得到如图 7 左图所示的“豆腐块”。豆腐块表面的“纹理”就是概率密度 $f_{x_1, x_2, x_3}(x_1, x_2, x_3)$ ，第四维数据。

显然，这块豆腐内部每一点都对应一个概率密度。为了可视化这些概率密度值，我们采用“切豆腐”的方法来观察剖面上的概率密度等高线。大家对这种方法应该不陌生，我们在本书前文已经看到好几次。

图 7 右侧三幅子图展示的是三种切豆腐的“手法”。

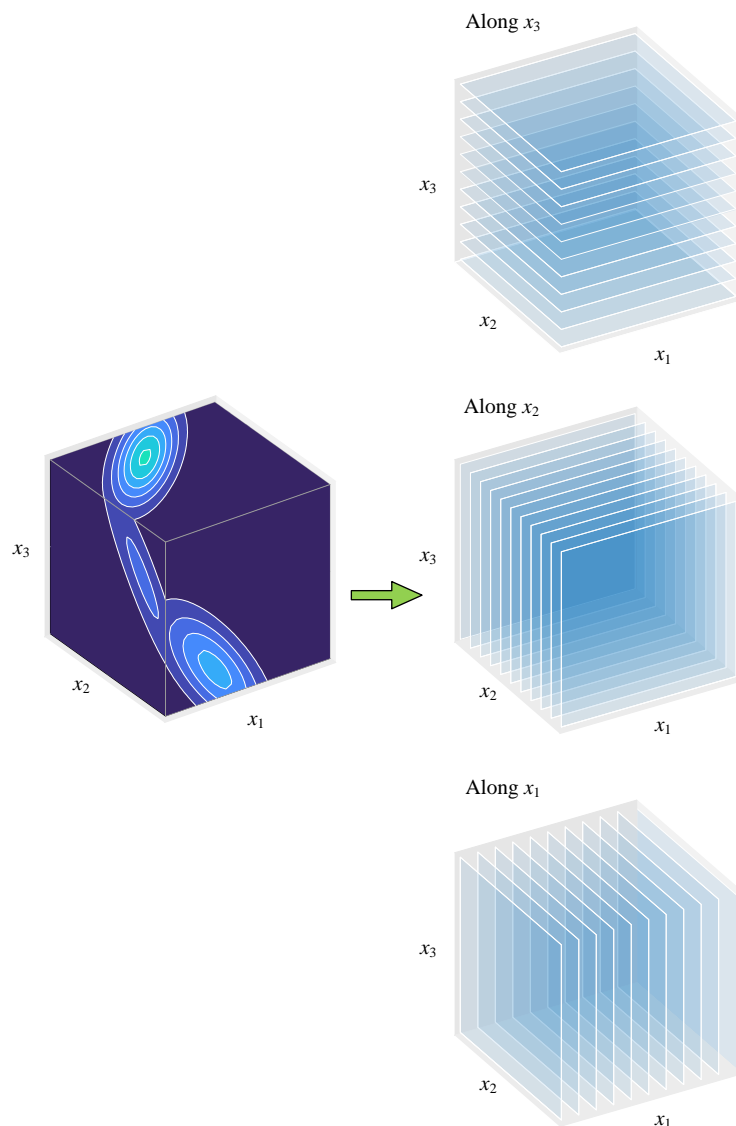


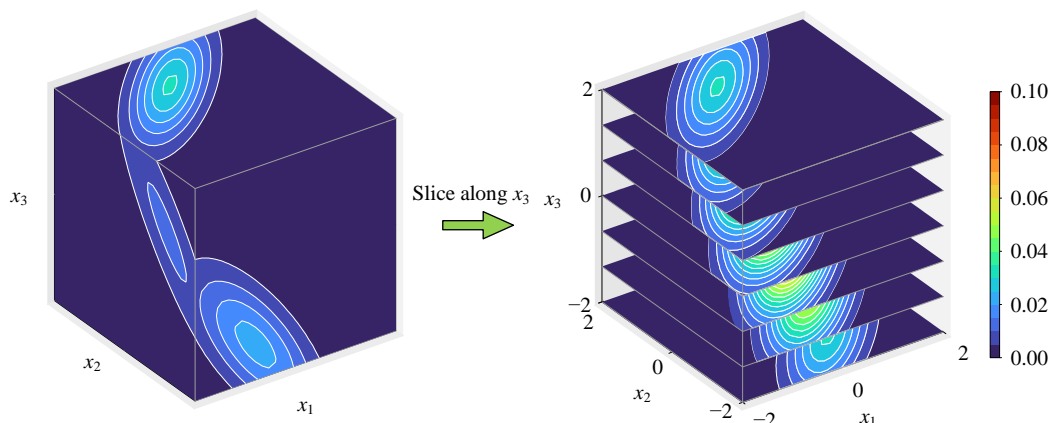
图 7. 三种不同切“豆腐”

举个例子，如图 8 所以，垂直 x_3 轴切豆腐，意味着绘制等高线时， x_3 固定在某个特定值 c ， $x_3 = c$ 。我们这次用等高线可视化 $f_{x_1, x_2, x_3}(x_1, x_2, x_3 = c)$ 。

为了看到等高线的全貌，我们采用单独子图的可视化方案。图 17 所示为沿着三个不同方向切豆腐的结果。



本书后文还会用这个“切豆腐”的可视化方案可视更多三元函数。

图 8. 垂直 x_3 切豆腐

Bk_2_Ch16_07.ipynb 绘制图 17 所有子图，下面聊聊代码 6 这几句。

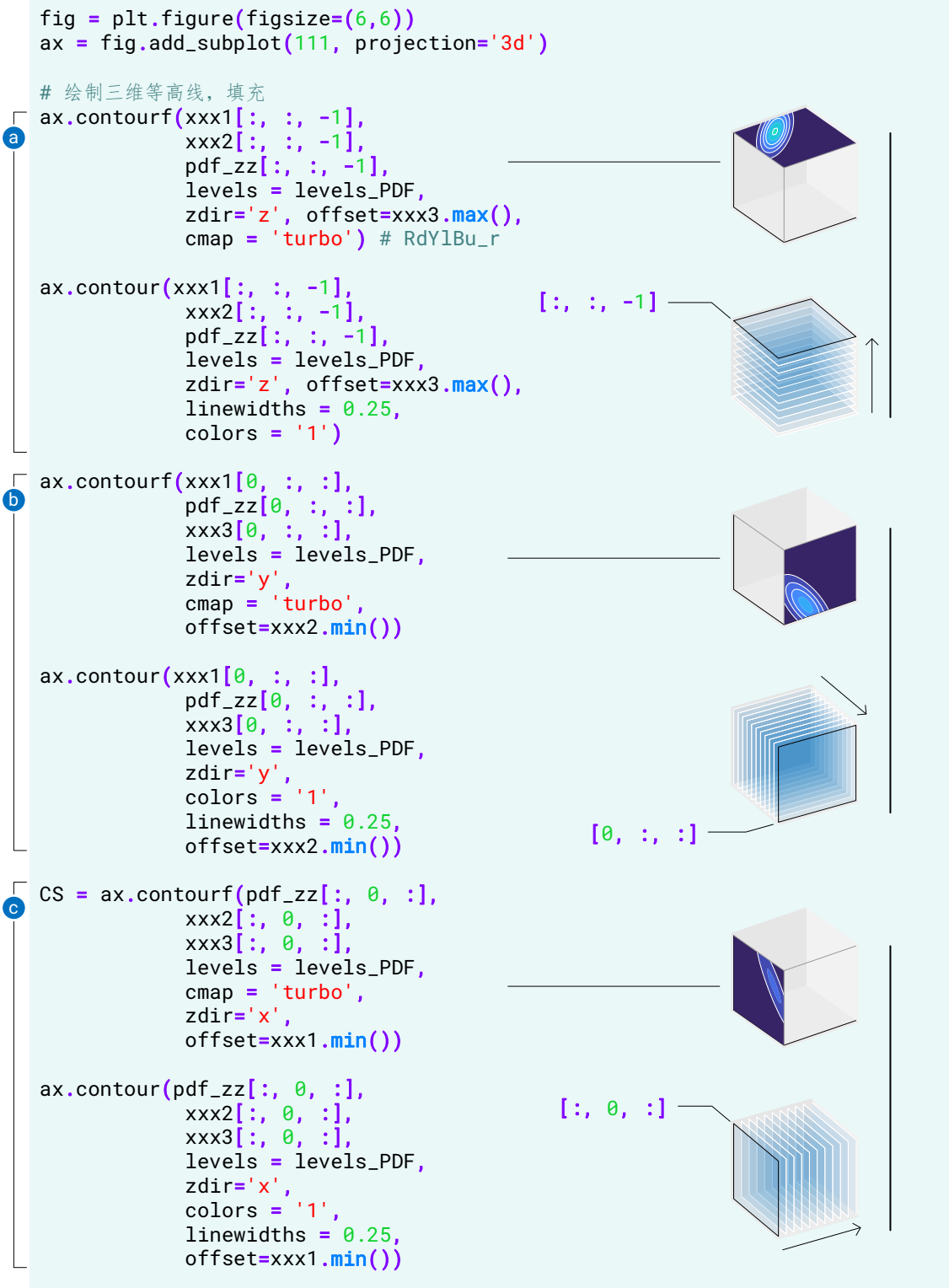
a 用 `contourf()` 填充等高线绘制了豆腐的上立面，数据的切片方式为 `[:, :, -1]`。代码中，大家可以看到我们用 `zdir` 指定投影方向，用 `offset` 指定绘制填充等高线的位置。

然后，还用 `contour()` 给等高线描了白色的边。

b 用 `contourf()` 填充等高线绘制了豆腐的右立面，数据的切片方式为 `[0, :, :]`。

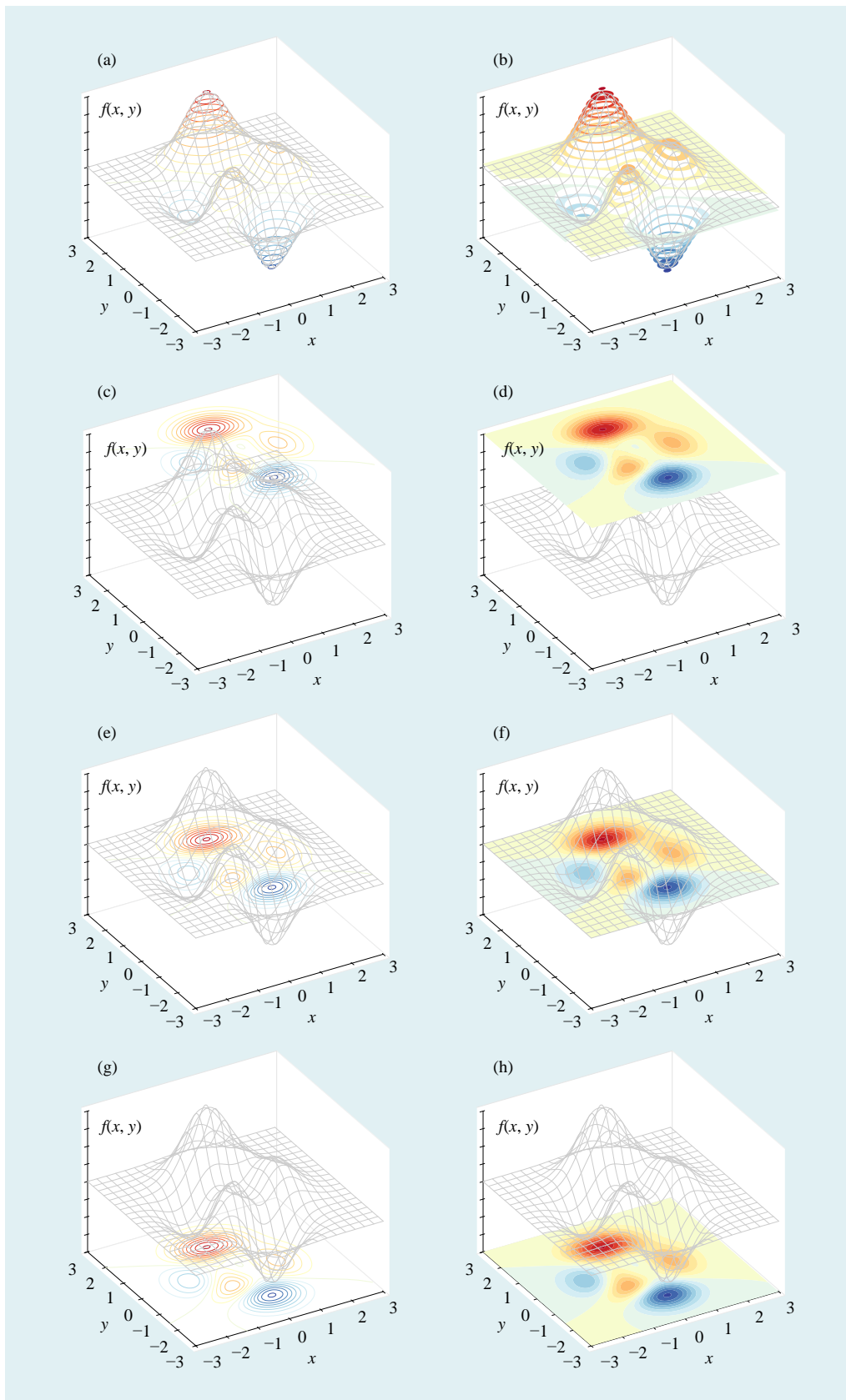
c 用 `contourf()` 填充等高线绘制了豆腐的左立面，数据的切片方式为 `[:, 0, :]`。

请大家自行分析 Bk_2_Ch16_07.ipynb 剩余代码。



代码 6. 绘制“豆腐”的三个立面 | Bk_2_Ch16_07.ipynb

本章利用 Matplotlib 中等高线的投影设置完成了很多有趣的可视化方案。请大家务必掌握如下几个作图技巧：1) 提取特定等高线坐标；2) 用切豆腐可视化三元函数。



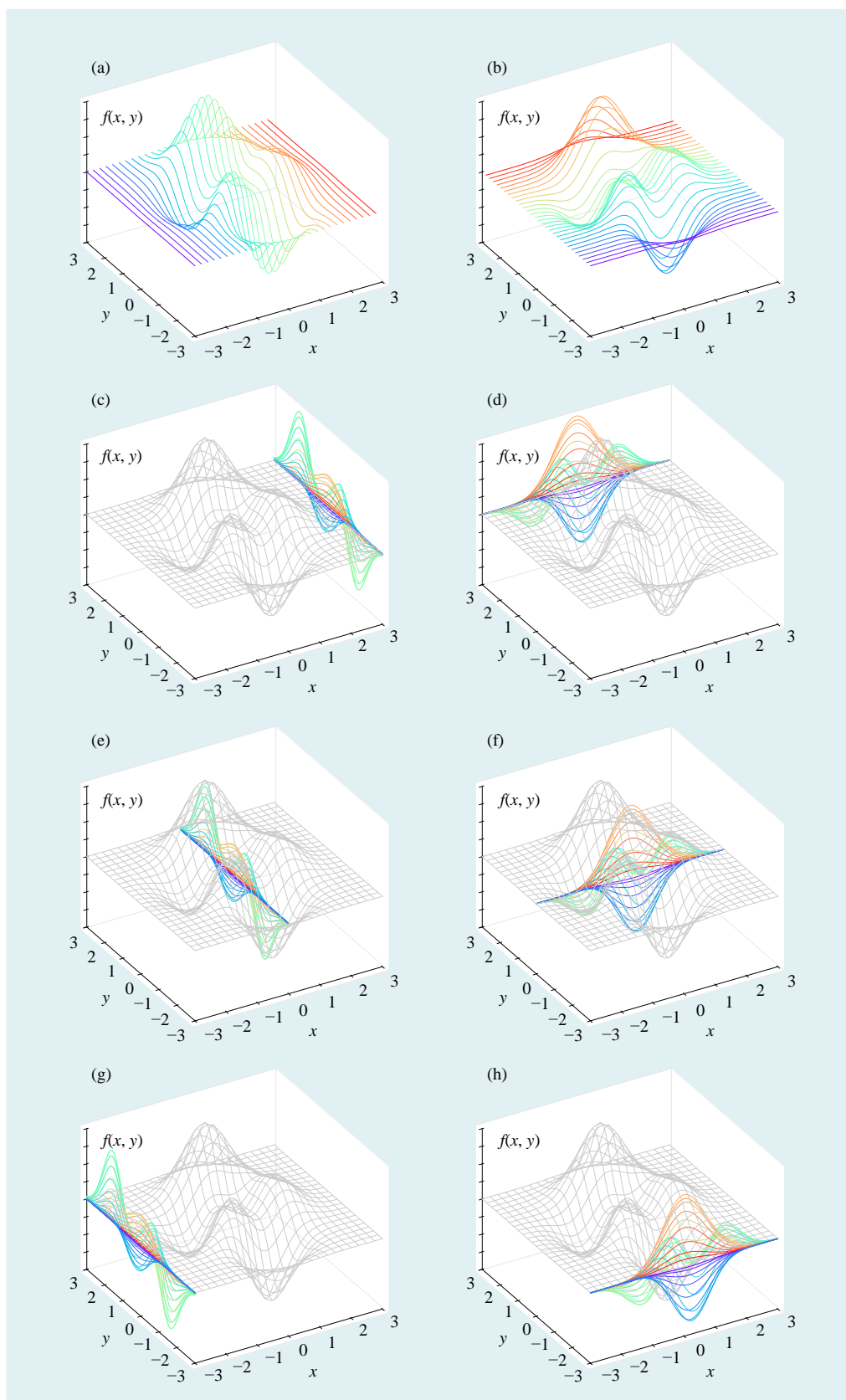
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 9. 沿 z 方向获取等高线 | Bk_2_Ch16_01.ipynb图 10. 沿 x 、 y 方向获取等高线 | Bk_2_Ch16_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

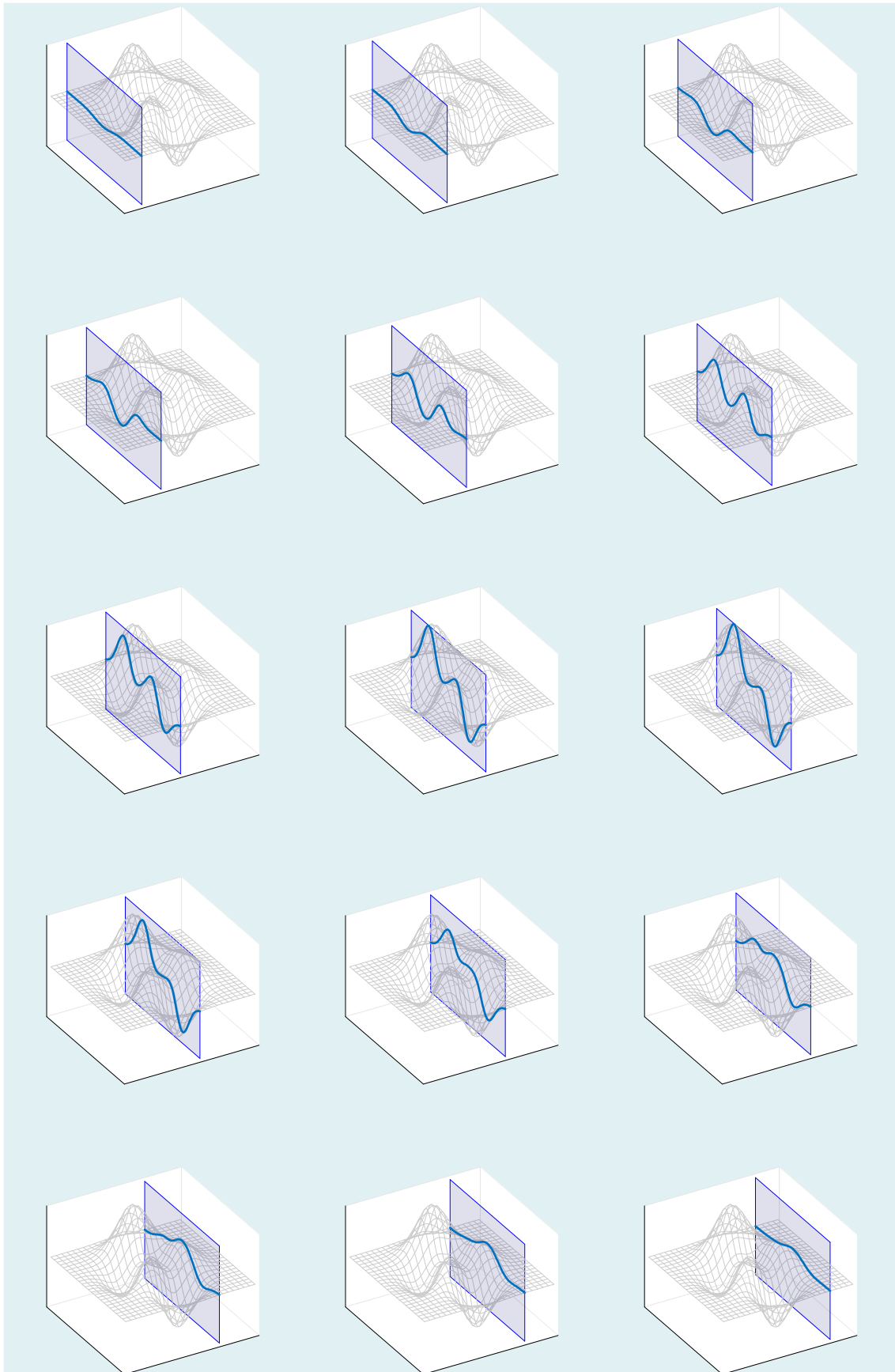



图 11. 可视化二元函数切片，指定 x 值 |  Bk_2_Ch16_02.ipynb

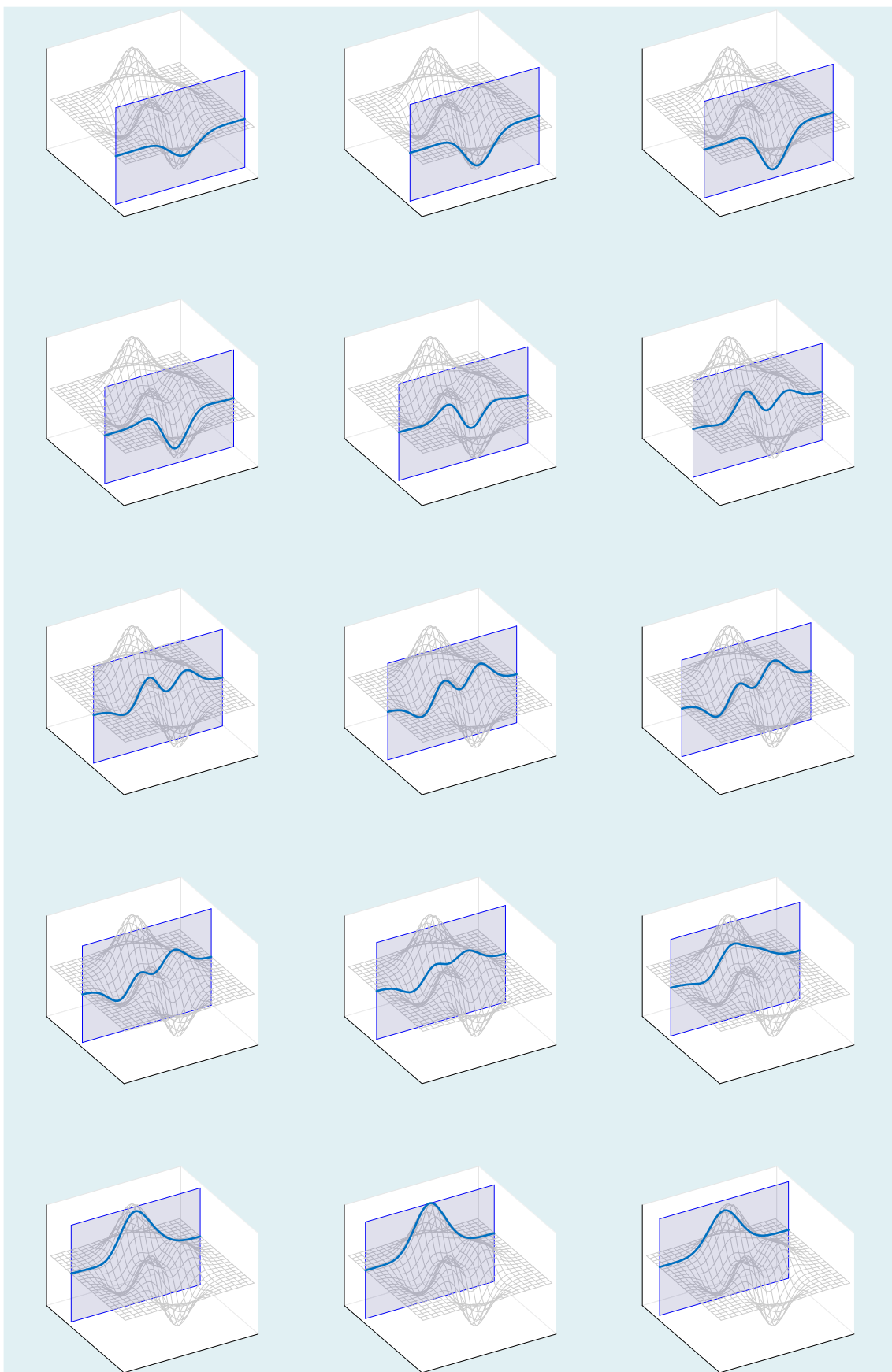

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 12. 可视化二元函数切片，指定 y 值 |  Bk_2_Ch16_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

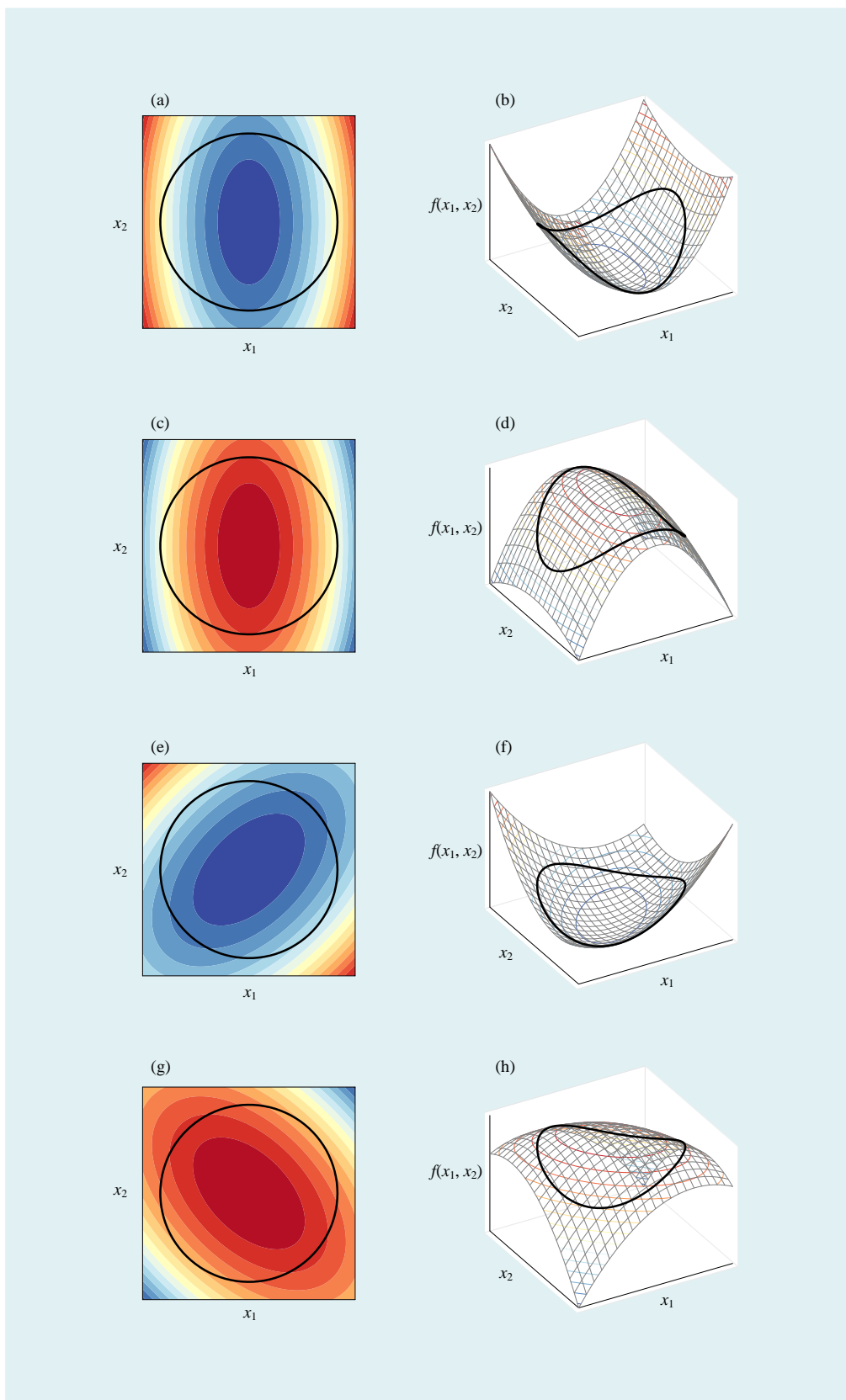


图 13. 将单位圆对应坐标映射到特定曲面，前四个例子 |  Bk_2_Ch16_04.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

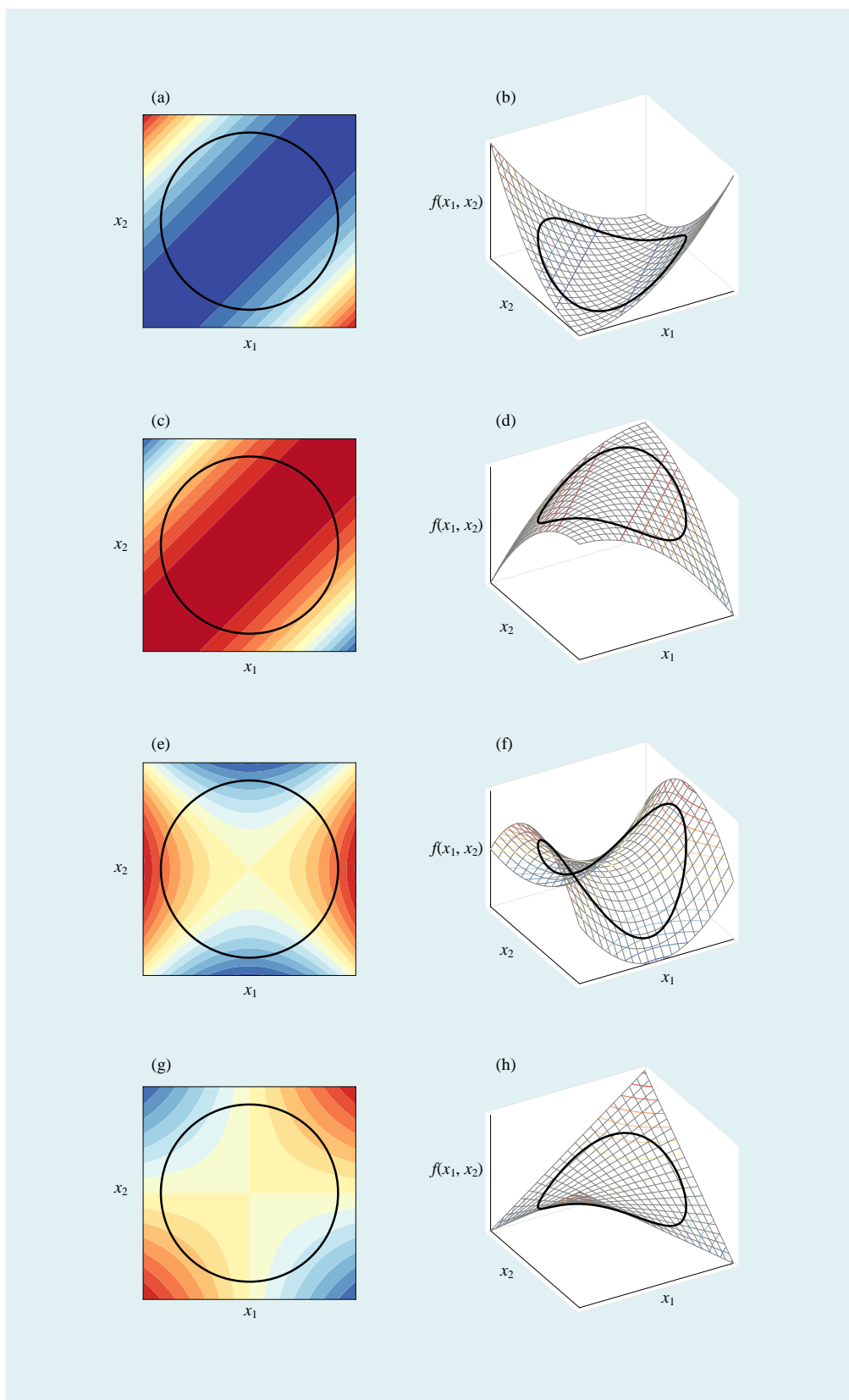



图 14. 将单位圆对应坐标映射到特定曲面，后四个例子 |  Bk_2_Ch16_04.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

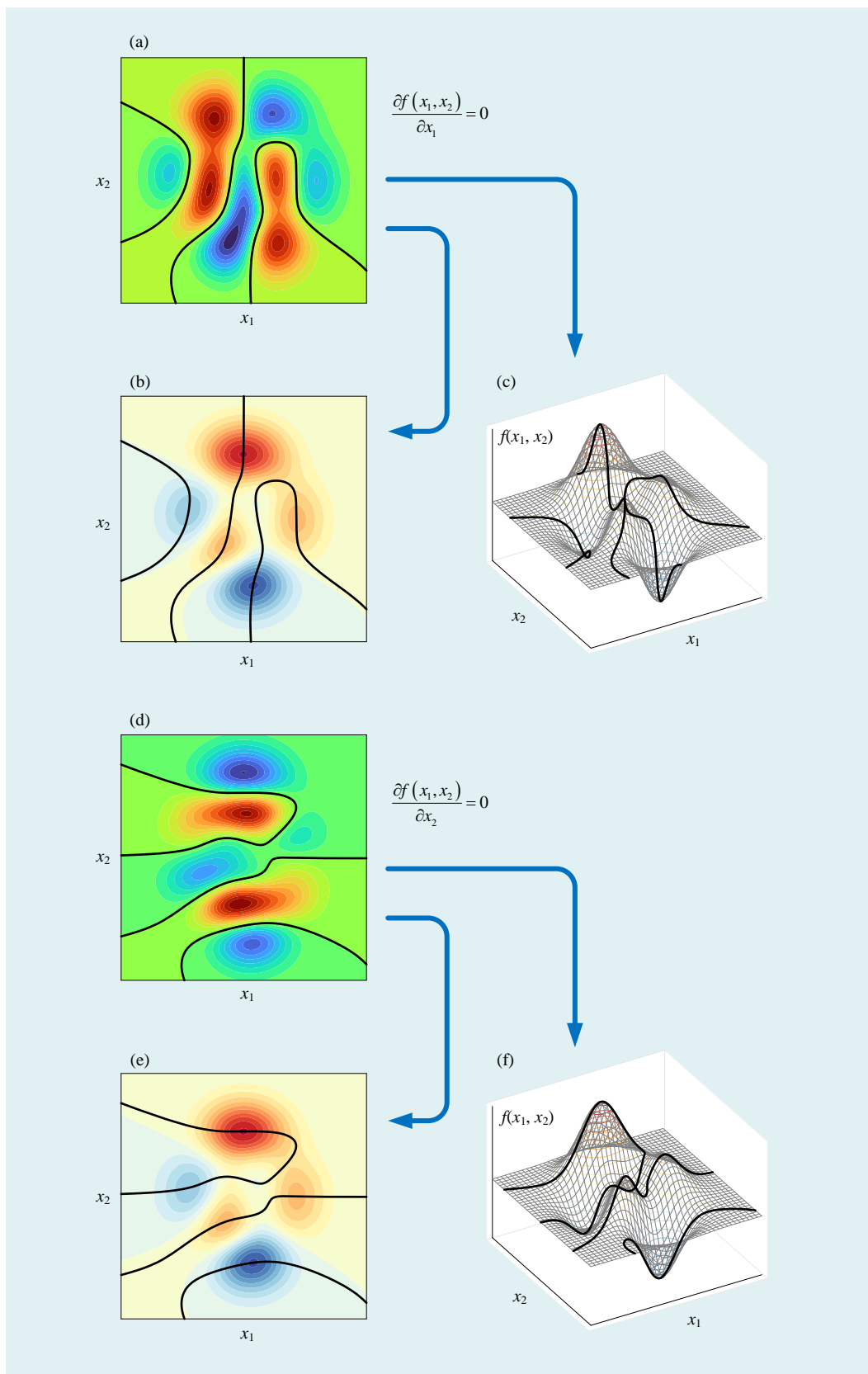


图 15. 提取等高线坐标 | Bk_2_Ch16_05.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

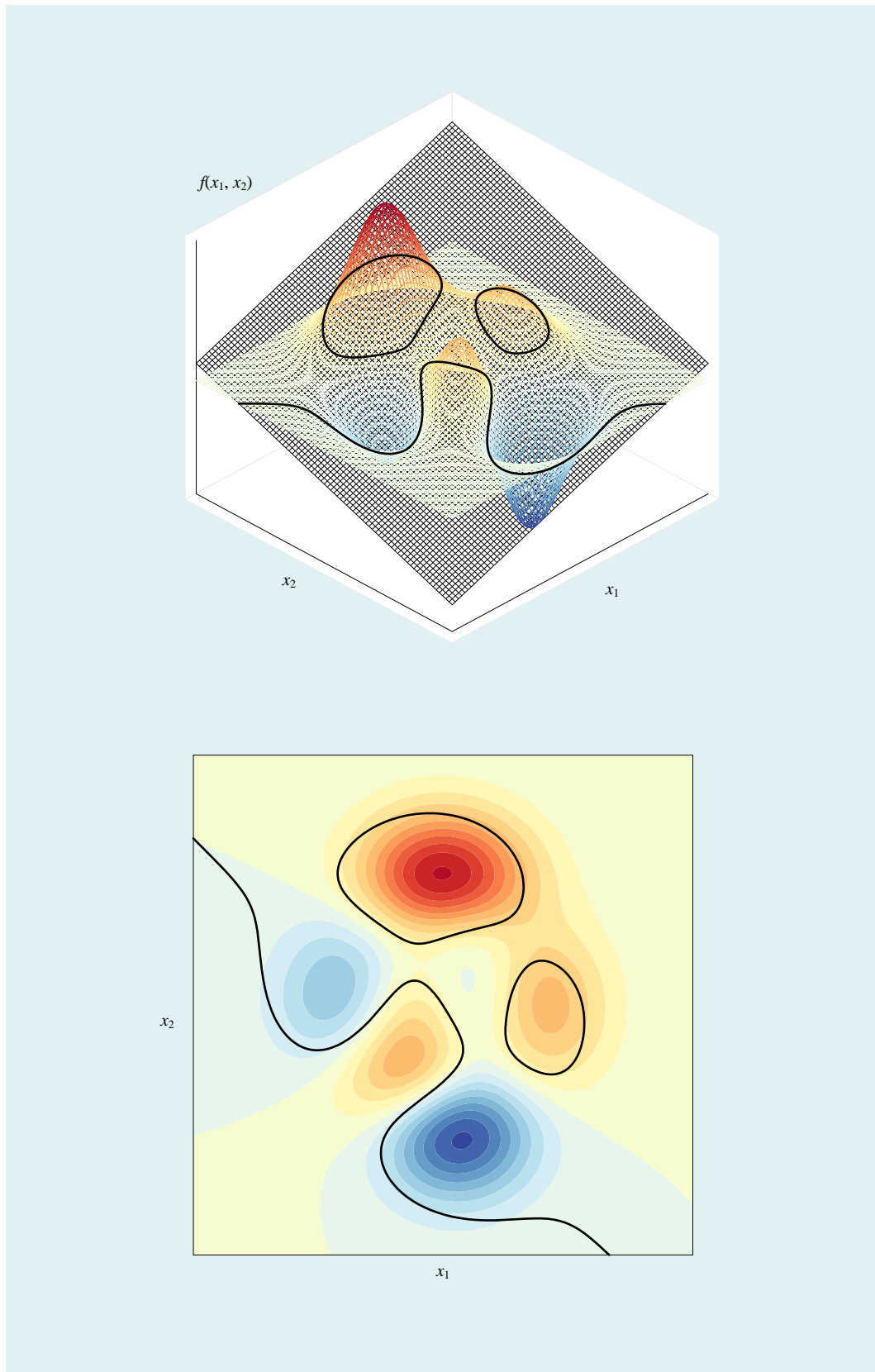
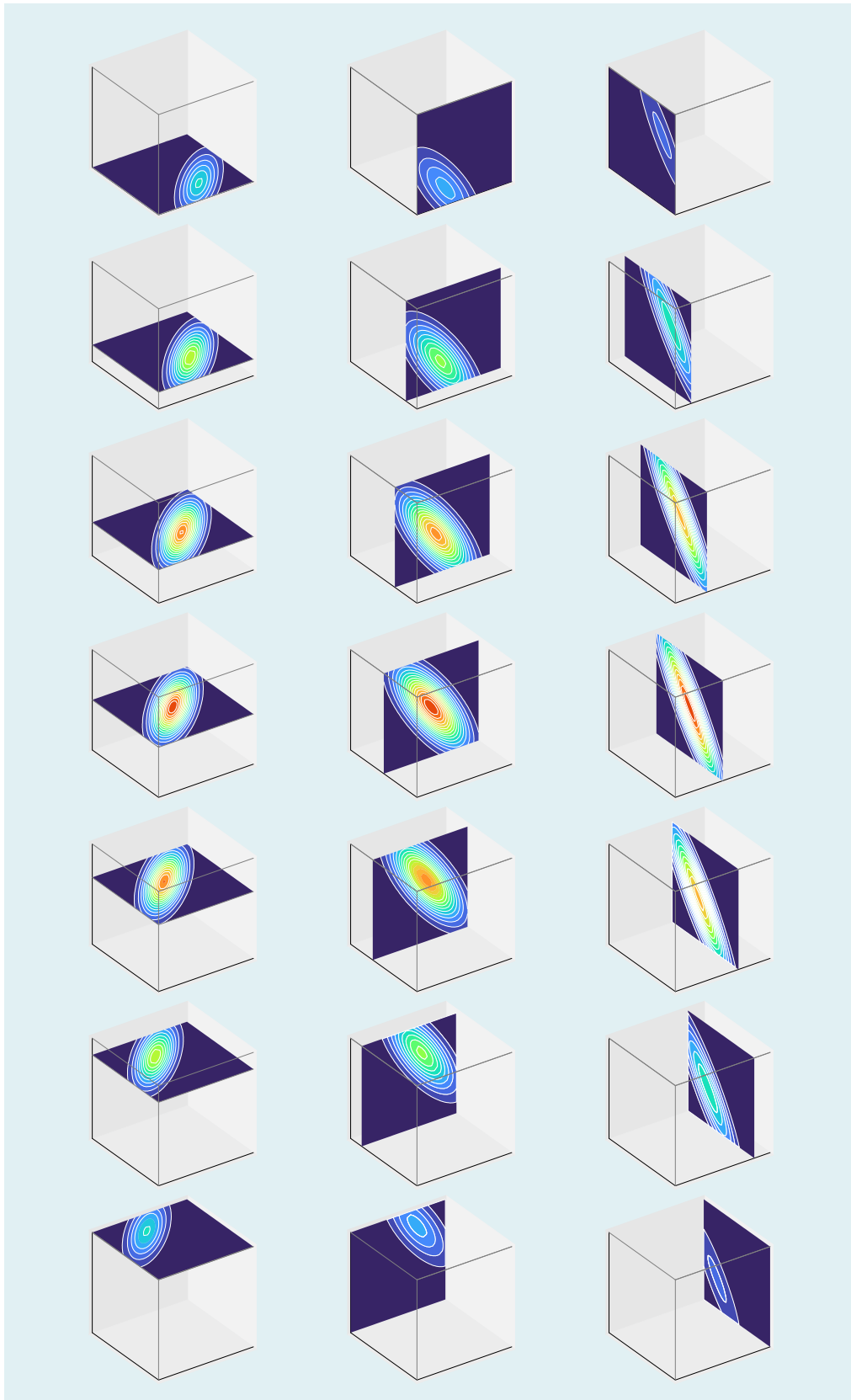


图 16. 用等高线绘制交线 |  Bk_2_Ch16_06.ipynb

图 17. 沿三个不同方向切豆腐 |  Bk_2_Ch16_07.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com