

# 23

## Parametric Equations

# 参数方程

又一种绘制平面、立体几何形状思路



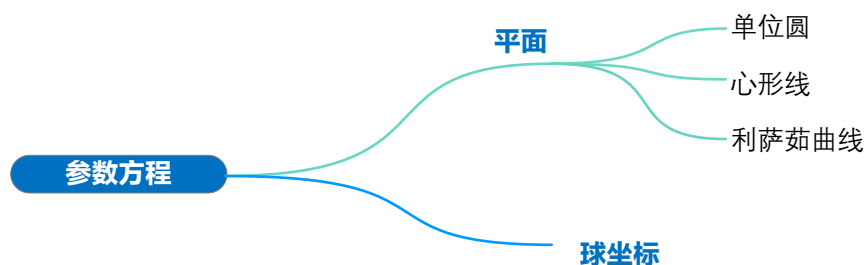
生如夏花，逝如秋叶。

*Let life be beautiful like summer flowers, and death like autumn leaves.*

—— 泰戈尔 (Rabindranath Tagore) | 印度诗人 | 1861 ~ 1941



- ▶ `matplotlib.pyplot.plot_wireframe()` 绘制线框图
- ▶ `numpy.linspace()` 在指定的间隔内, 返回固定步长的数据
- ▶ `numpy.outer()` 计算外积, 张量积
- ▶ `plotly.graph_objects.Surface()` 创建三维曲面



## 23.1 参数方程

上一章，我们介绍如何用等高线可视化二元、三元隐函数。本章介绍如何用参数方程可视化二元、三元几何形状。简单来说，**参数方程** (parametric equation) 是描述曲线或曲面的一种数学表示方法。其实，大家对参数方程应该不陌生。如图 1 所示，在绘制单位圆时，我们就用过参数方程。

➔ 第 9 章介绍极坐标时，我们也聊到了如何用参数方程绘制各种曲线。第 10 章还介绍了极坐标网格。第 18 章我们用参数方程和网格面可视化球体和游泳圈等三维几何形状。请大家回顾这些内容。

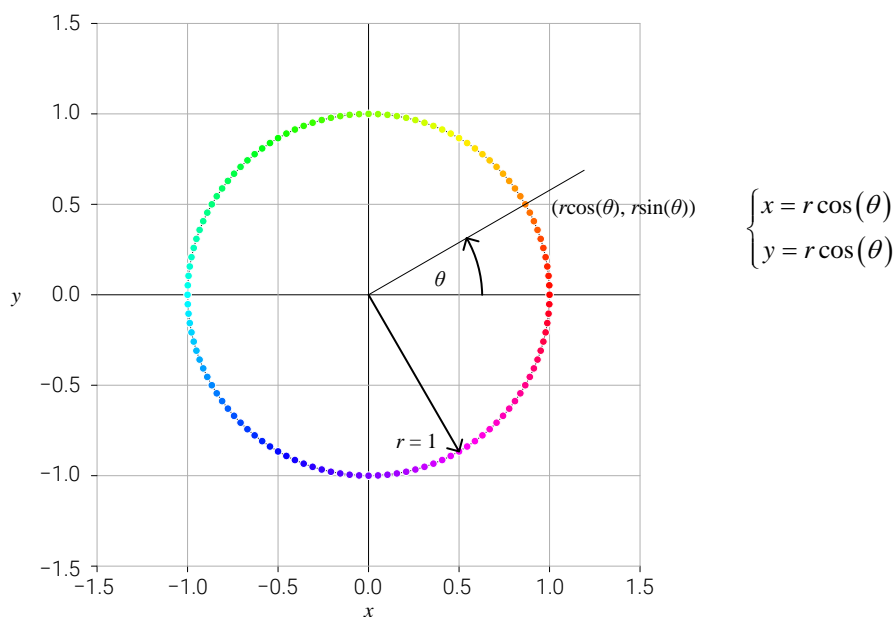


图 1. 用参数方程描述单位圆

我们可以用参数方程可视化更复杂的图形，下面再介绍几个例子。

### 心形线

图 2 所示为利用参数方程绘制的心形线 (cardioid)。心形线得名于其形状类似于心脏。

BK\_2\_Ch23\_01.ipynb 绘制图 2，请大家查看代码将图 2 每幅子图对应的参数方程自己写到书上。

➔ 本书第 30 章将专门介绍心形线；此外，在本书第 34 章介绍繁花曲线时，大家还会看到心形线。

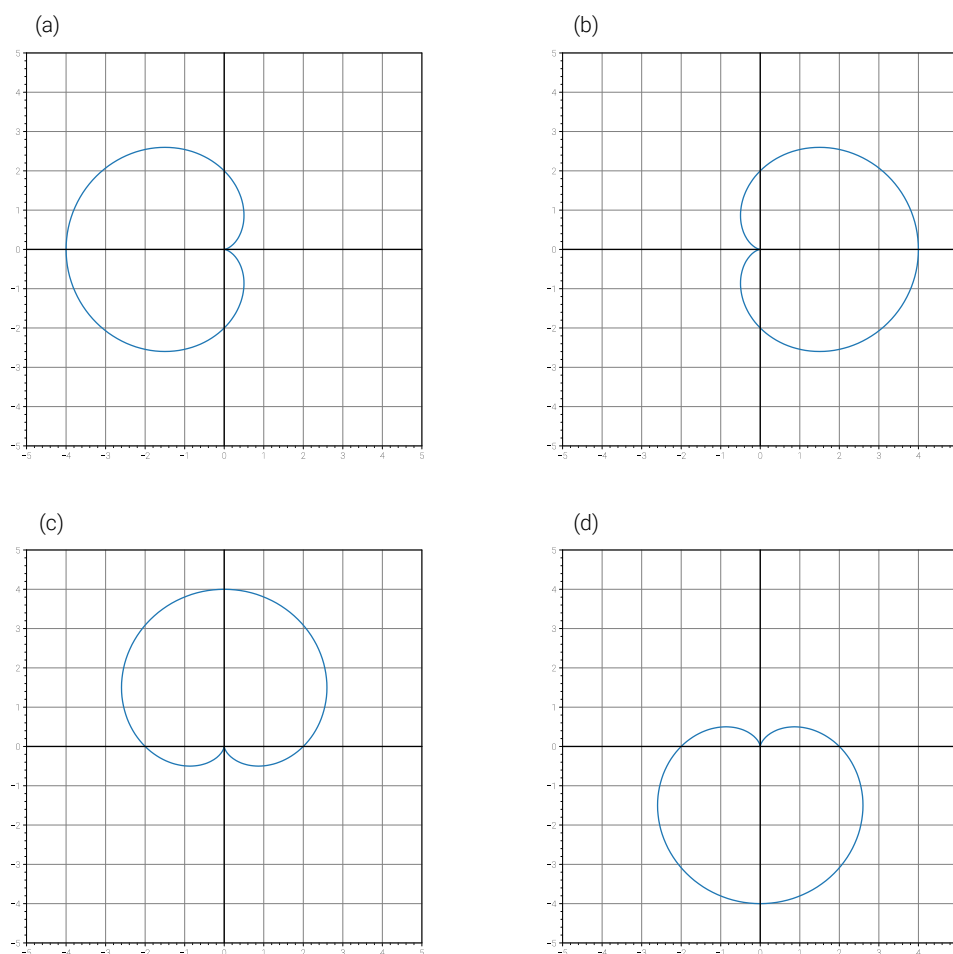


图 2. 用参数方程描述心形线

### 利萨茹曲线

图 9、图 10、图 11 所示为利萨茹曲线随  $n_x$ 、 $n_y$ 、 $k$  变化。BK\_2\_Ch23\_02.ipynb 绘制这三组图像，请大家查看代码将参数方程自己写到书上。

**利萨茹曲线** (Lissajous curve) 是一种在平面上生成的特殊曲线，它由两个正弦函数的振幅和频率组合而成。利萨茹曲线通常以参数方程的形式表示。当两个振幅和频率的比例不同或相位差不同时，曲线的形状会发生变化。图 3 所示为利用 Streamlit 创建的展示利萨茹曲线的 App。

利萨茹曲线的形状取决于两个振幅和频率的关系，它可以展示出丰富的几何图案，包括直线、椭圆、环形等。利萨茹曲线具有美观和艺术性。因此，利萨茹曲线常被用作数学教学、科学可视化和艺术创作的工具。

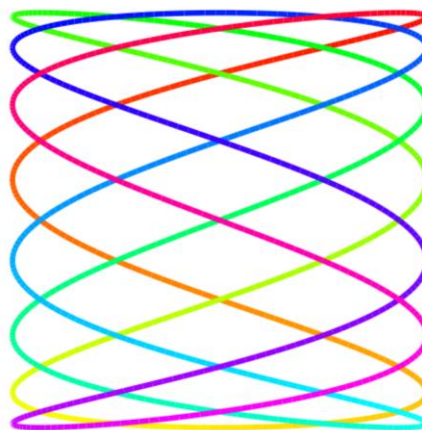
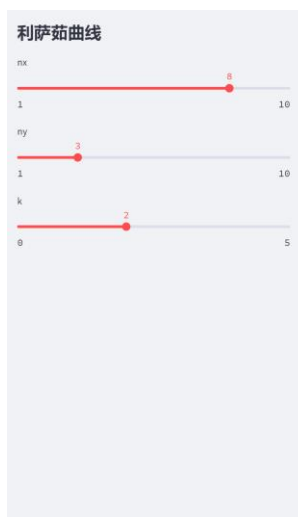


图 3. 展示利萨茹曲线的 App, Streamlit 搭建 | `Streamlit_Lissajous_curve.py`

## 23.2 球坐标

本节特别展开介绍如何用**球坐标** (spherical coordinate system) 绘制单位球体。

### 球坐标

如图 4 所示, 球坐标相当于由两个平面极坐标系构造。

球坐标系中定位点  $P$  用的是球坐标  $(r, \theta, \varphi)$ 。其中,  $r$  是  $P$  与原点  $O$  之间距离, 也叫**径向距离** (radial distance);  $\theta$  是  $OP$  连线和  $z$  轴正方向夹角, 叫做**极角** (polar angle);  $OP$  连线在  $xy$  平面投影线为  $OH$ ,  $\varphi$  是  $OH$  和  $x$  轴正方向夹角, 叫做**方位角** (azimuth angle)。球坐标系中和  $\theta$ 、 $\varphi$  取值范围如图 5 所示。

大家可能已经发现球坐标系和本书前文介绍的三维图形视角设置密切相关。

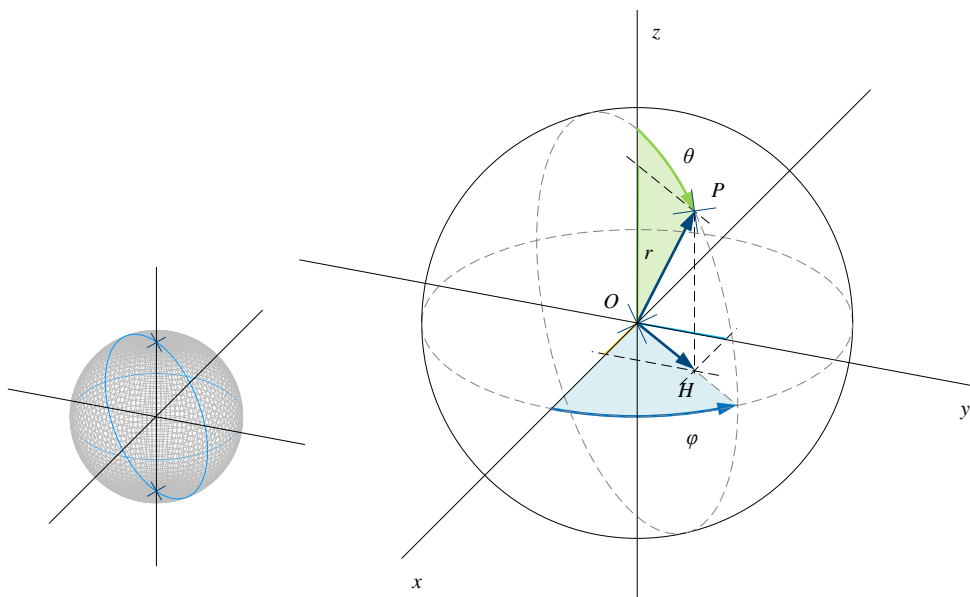


图 4. 球坐标系

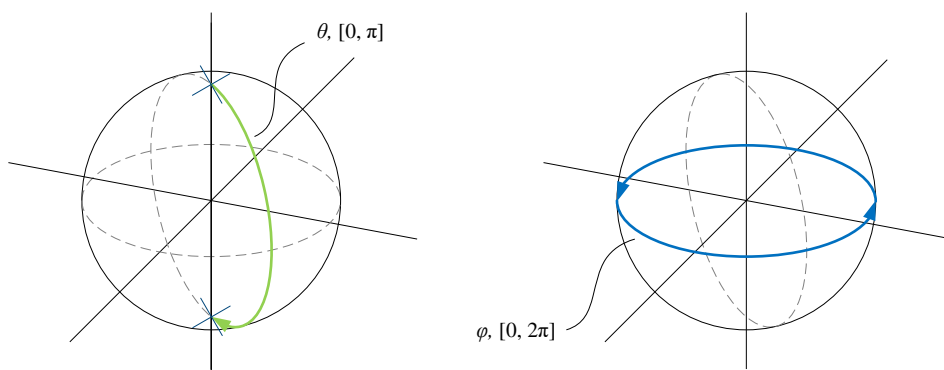
本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 5. 球坐标系中和  $\theta$  和  $\varphi$  取值范围

代码 1 将球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  转换为三维直角坐标  $(x, y, z)$ ，并生成单位球网格数据。

- a** 设置步数，为了保证网格经纬方向疏密合适。
- b** 球坐标  $\theta$  数据间隔数，数据点数在此基础上加 1。
- c** 球坐标  $\varphi$  数据间隔数，数据点数在此基础上加 1。
- d** 用 `numpy.linspace()` 创建球坐标  $\theta$  数据数组，取值范围为  $[0, \pi]$ 。
- e** 用 `numpy.linspace()` 创建球坐标  $\varphi$  数据数组，取值范围为  $[0, 2\pi]$ 。
- f** 设定正球体半径，当  $r=1$  时，我们便得到**单位球** (unit sphere)。

很容易发现，单位球球面任意一点  $(x_1, x_2, x_3)$  距离中心的距离相同，即  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$ 。换个角度来看，三维空间中，距离特定点为定值的所有点构成正球面。

再换个角度，等式  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  这个约束条件也是一种降维，将满足条件的点固定在中心位于原点的单位球面上。

比较来看  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  这个约束条件将散点固定在一个平面上，相当于线性降维。和  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  不同， $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  这种降维非线性。

**g** 相当于获取球面上点的  $z$  轴坐标，即完成图 6 第 1 步。`numpy.outer()` 用于计算两个向量的外积，结果是一个二维数组即矩阵。这种数学运算和笛卡儿积背后的数学思想几乎一致。



鸢尾花书《编程不难》第 7 章介绍过笛卡儿积，请大家回顾。

**h** 和 **i** 则分别获取球面上点的  $x$  和  $y$  轴坐标，即完成图 6 第 2 步。观察图 6，我们可以发现球面坐标到三维直角坐标转换中利用了四次投影。

```

# 设置步数
a intervals = 50
b ntheta = intervals
c nphi = 2*intervals

# 单位球，球坐标
# theta取值范围为 [0, pi]
d theta = np.linspace(0, np.pi*1, ntheta+1)

# phi取值范围为 [0, 2*pi]
e phi = np.linspace(0, np.pi*2, nphi+1)

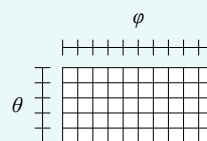
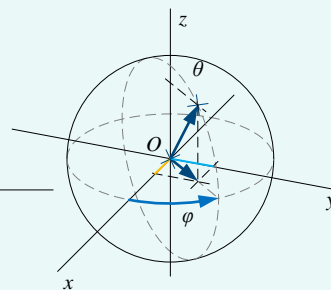
# 单位球半径
f r = 1

# 球坐标转化为三维直角坐标
# z轴坐标网格数据
g Z = np.outer(r*np.cos(theta), np.ones(nphi+1))

# x轴坐标网格数据
h X = np.outer(r*np.sin(theta), np.cos(phi))

# y轴坐标网格数据
i Y = np.outer(r*np.sin(theta), np.sin(phi))

```



代码 1. 用参数方程生成单位球坐标

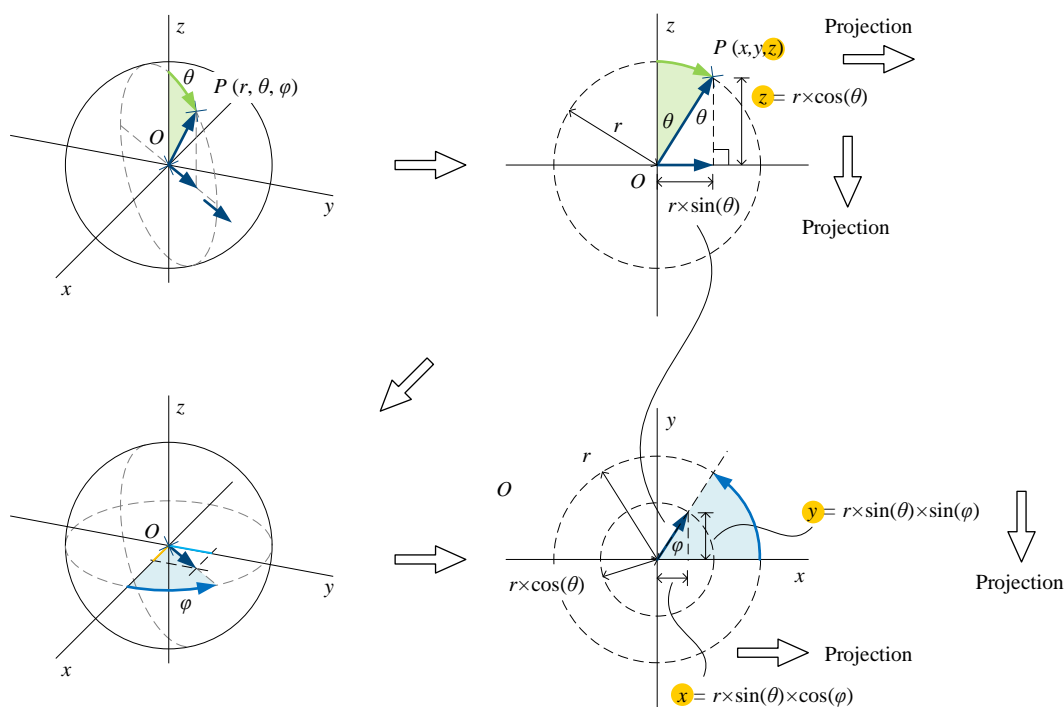


图 6. 从球坐标到三维直角坐标

总结来说，代码 1 的目的就是创建图 7 所示的单位球面上的一组坐标点。

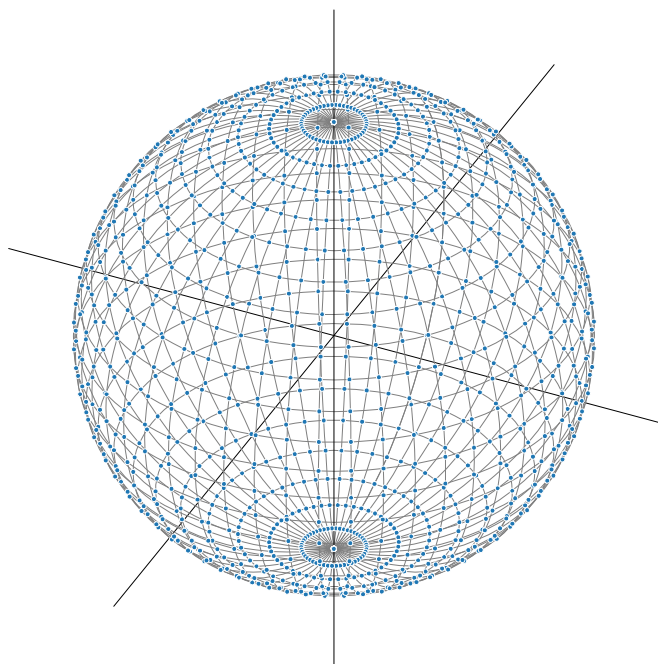



图 7. 单位球面上创建的一组坐标点 |  BK\_2\_Ch20\_4.ipynb

图 8 告诉我们曲面网格相当于由经线、纬线交织而成。此外，这幅图还告诉我们坐标数据  $(x, y, z)$  和  $\theta$ 、 $\varphi$  存在直接的映射关系。通过这种关系，我们还可以使用代码 2 进行坐标转换。

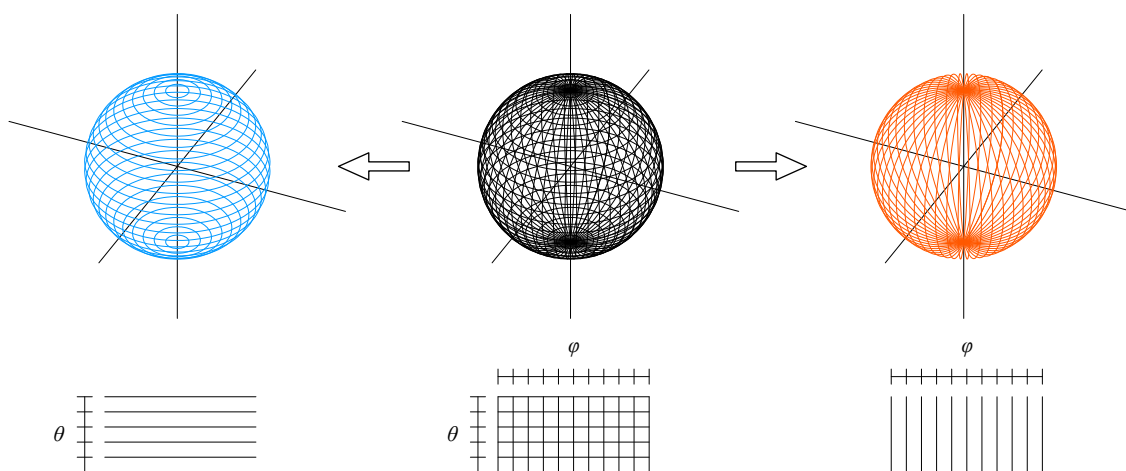
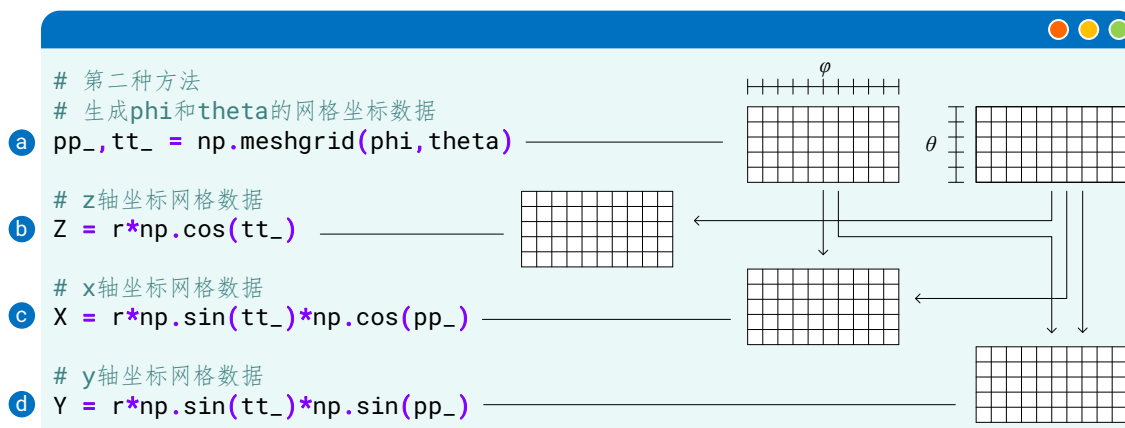
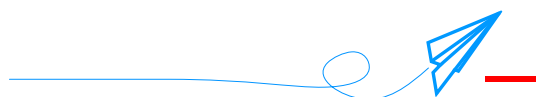


图 8. 分离单位球经纬线



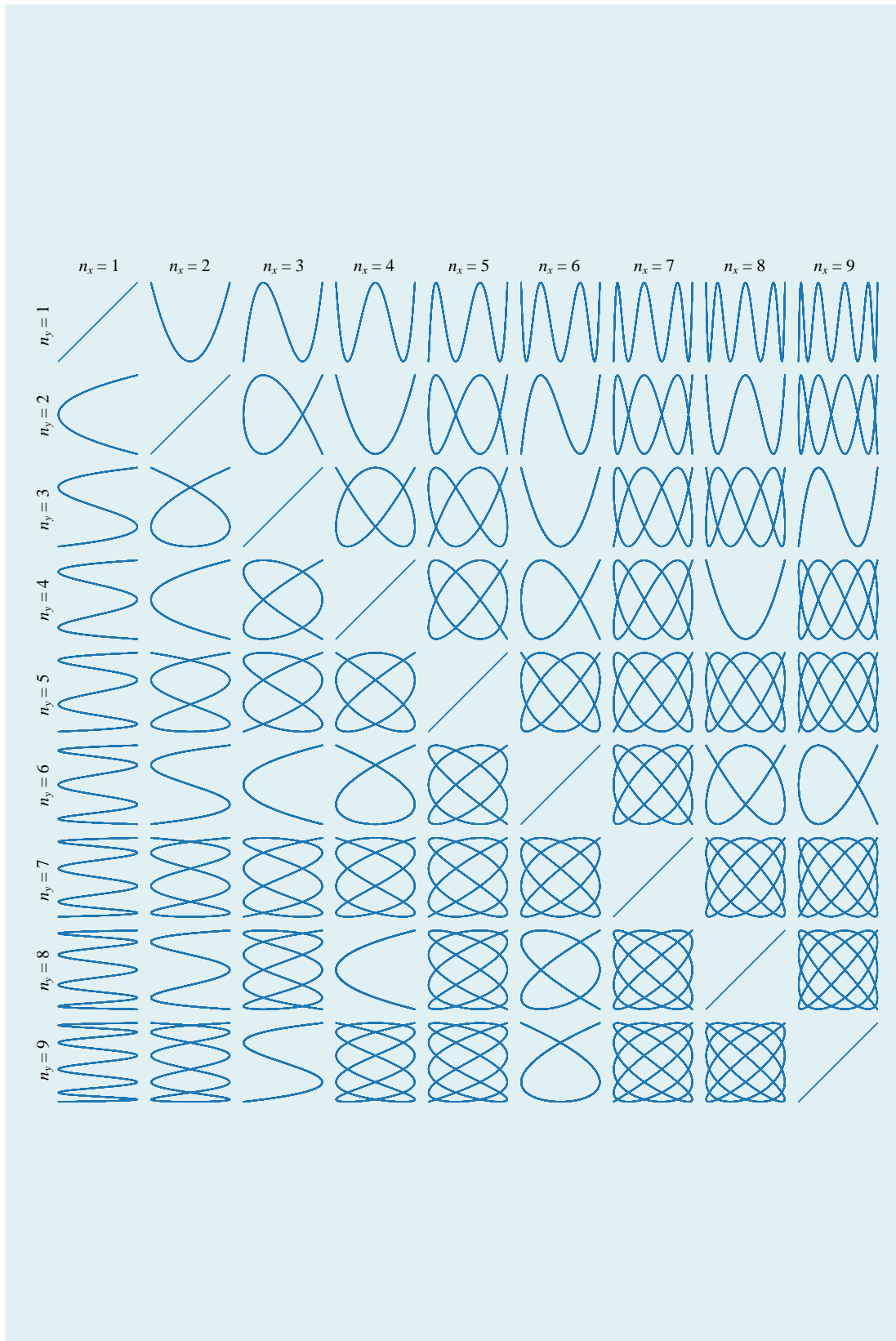
代码 2. 第二种坐标转换的运算

请大家自行在 JupyterLab 中实践代码 1 和代码 2。BK\_2\_Ch23\_03.ipynb 还绘制了图 12 中几个曲面，请大家自行学习。



本章介绍的参数方程是可视化二维、三维几何形状的另一途径。本书在第 29 章讲解瑞利商可视化方案时会用到本节介绍的球坐标。



图 9. 利萨茹曲线,  $k = 0$  |  BK\_2\_Ch23\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

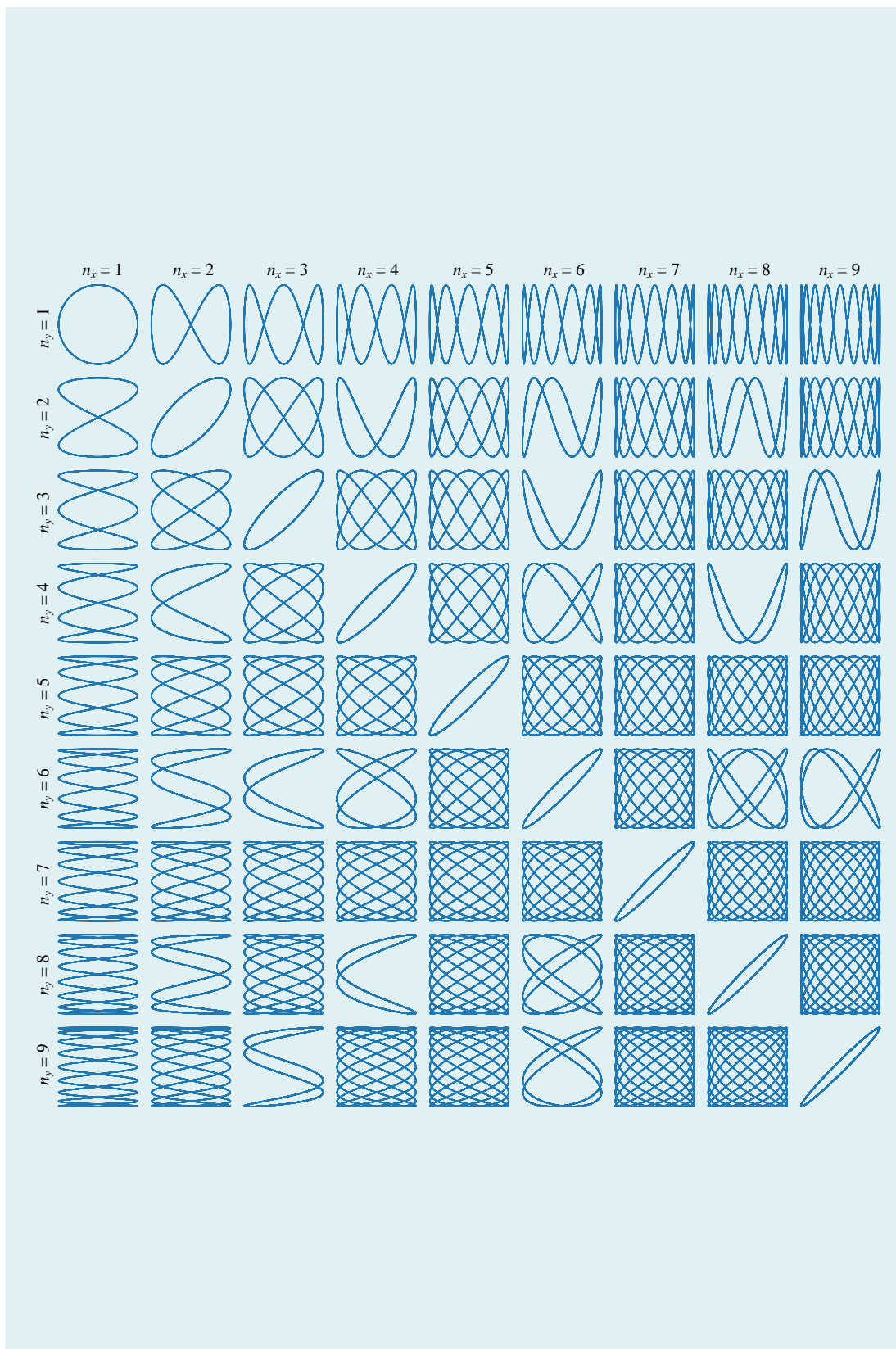


图 10. 利萨茹曲线,  $k = 2$  |  BK\_2\_Ch23\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

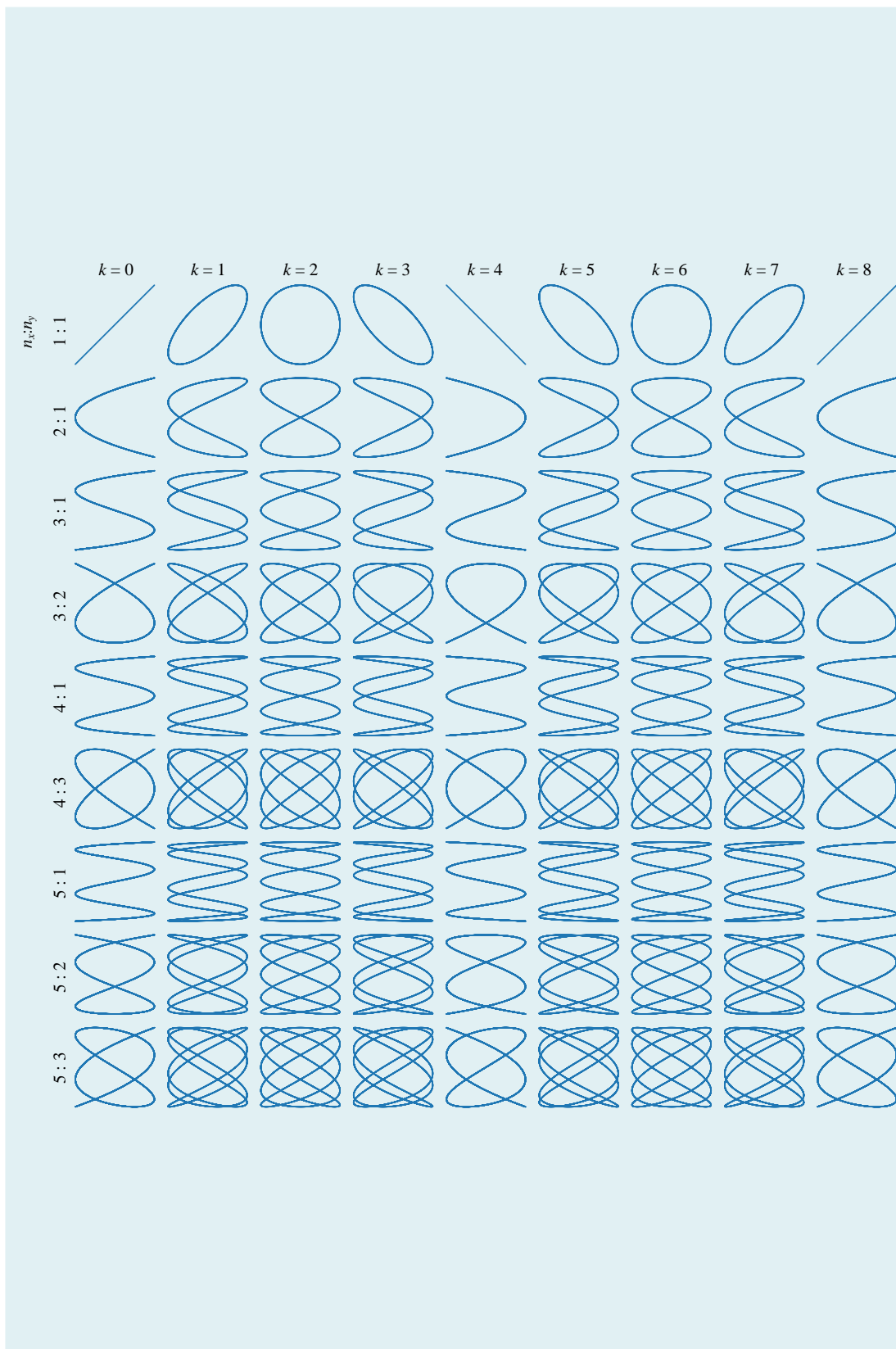


图 11. 利萨茹曲线,  $k$  变化 |  BK\_2\_Ch23\_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

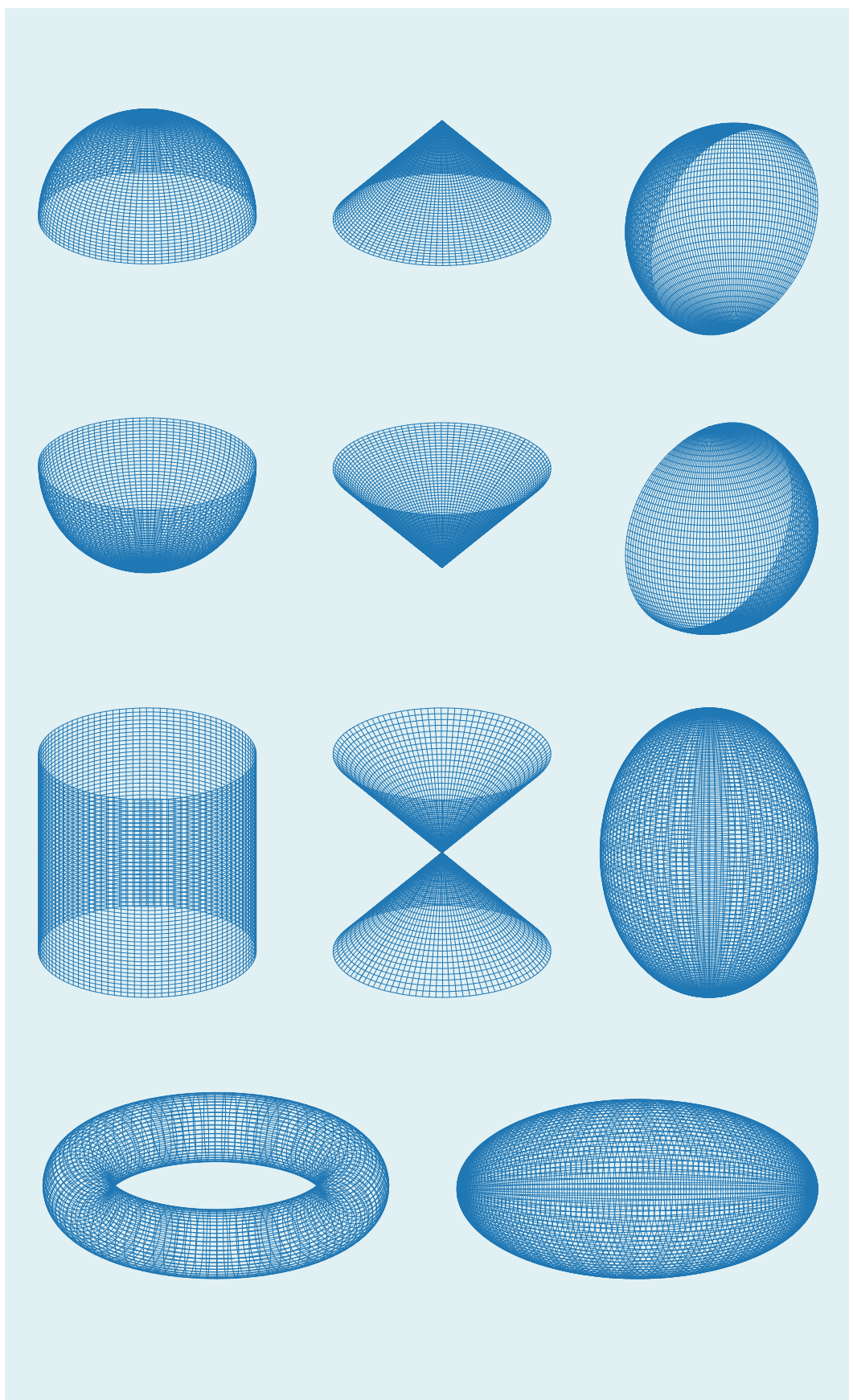


图 12. 更多参数方程曲面 |  BK\_2\_Ch23\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)