

## 11

## Algebraic Functions

## 代数函数

自变量有限次加、减、乘、除、有理指数幂和开方



数学不分种族、不分地域；对于数学来说，其文化世界自成一国。

*Mathematics knows no races or geographical boundaries; for mathematics, the cultural world is one country.*

—— 大卫·希尔伯特 (David Hilbert) | 德国数学家 | 1862 ~ 1943



- ◀ matplotlib.pyplot.axhline() 绘制水平线
- ◀ matplotlib.pyplot.axvline() 绘制竖直线
- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制平面等高线
- ◀ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制平面填充等高线
- ◀ matplotlib.pyplot.grid() 绘制网格
- ◀ matplotlib.pyplot.plot() 绘制线图
- ◀ matplotlib.pyplot.show() 显示图片
- ◀ matplotlib.pyplot.xlabel() 设定 x 轴标题
- ◀ matplotlib.pyplot.ylabel() 设定 y 轴标题
- ◀ numpy.absolute() 计算绝对值
- ◀ numpy.array() 创建 array 数据类型
- ◀ numpy.cbrt(x) 计算立方根
- ◀ numpy.ceil() 计算向上取整
- ◀ numpy.floor() 计算向下取整
- ◀ numpy.linspace() 产生连续均匀向量数值
- ◀ numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- ◀ numpy.sqrt() 计算平方根

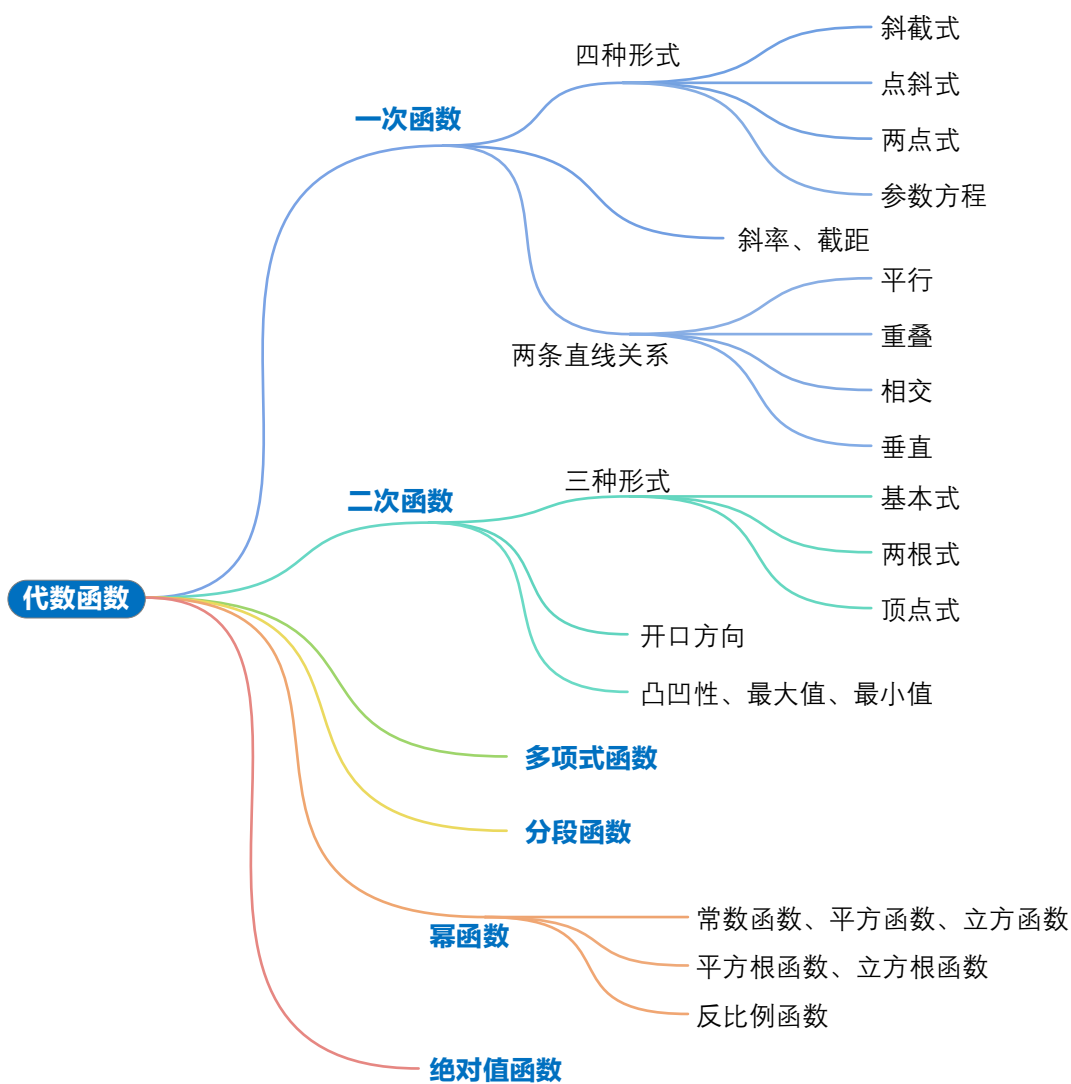
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 11.1 初等函数：数学模型的基础

大家在中学时代都接触过的初等函数是最朴实无华的数学模型，它们是复杂数学模型的基础。本节以二次函数为例介绍如何利用初等函数进行数学建模。

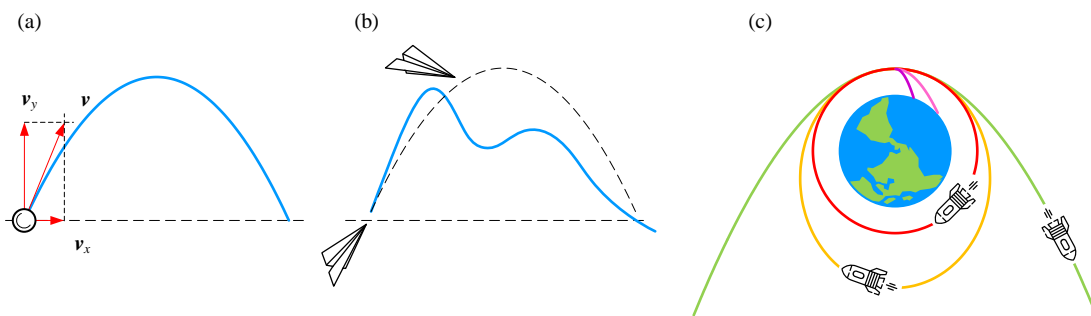


图 1. 抛物线

如图 1 (a) 所示，斜向上方抛起一个小球，忽略空气阻力影响，小球在空中划出一道曲线就可以用抛物线描述。这条抛物线就是二次函数。小球在空中不同时刻的位置，以及最终的落点，都可以通过二次函数这个模型计算得到。

同样的仰角，斜向上抛出一个纸飞机，纸飞机在空中的飞行轨迹就不得不考虑纸飞机外形、空气气流这些因素。如图 1 (b) 所示，抛物线已经不足以描述纸飞机的轨迹。

类似的，很多应用场景都需要对抛物线模型进行修正。比如，击打网球时，施加旋转可以改变网球飞行轨迹。射击时，枪管膛线让子弹旋转飞行，这必然会让其行进轨迹发生变化。发射炮弹时，空气阻力与炮弹外形和飞行速度有密切关系，这显然会影响炮弹飞行轨迹和落点。

此外，认为抛射物体轨迹为抛物线至少基于几个假设前提。比如，忽略空气阻力的影响；再比如，假设大地平坦；同时假设物体受到的地球引力垂直大地，如图 2 (a)。

准确地说，抛射体受到的重力实际上是指向地心，如图 2 (b)。也就是说物体在空中飞行时，加速度朝着地球中心，它的轨迹实际上是椭圆的一部分。

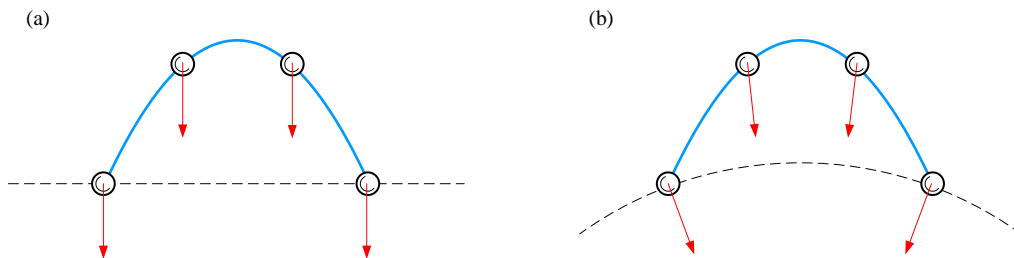


图 2. 引力方向

再进一步，远程炮弹飞行就需要考虑地心引力变化、地球自转；深空探测时，飞行器轨迹还需要考虑不同星体之间的引力作用，甚至来自太阳的光压等等因素。

假设前提是每个数学模型应用基础。数学模型毕竟是对现实世界各种现象的高度抽象概括，必须忽略一些次要因素，设定必要的假设前提，才能把握主要矛盾。

算力有限时，对抛射一个实心小球建模时，显然不会考虑小球的气动因素，更不会考虑引力场因素。但是，模拟不同击打技巧对网球飞行轨迹的影响，就不得不考虑网球旋转和空气流动这些因素。

模拟洲际导弹弹道时，气动布局、空气流体、地球自转、引力场等因素就不再是次要因素，必须考虑这些因素才能准确判断炮弹飞行轨迹以及落点。

人类在抛物线、空气动力学方面的进步，很大程度上来自于对弹道的研究。不得不承认，科学技术的确是把双刃剑，备战和战争有些时候是人类自然科学知识进步的加速器。

## 11.2 一次函数：一条斜线

### 四种形式

一次函数 (linear function) 有几种不同的形式构造：

- ◀ **斜截式** (slope-intercept form)，如图 3 (a) 所示；
- ◀ **点斜式** (point-slope form)，如图 3 (b) 所示；
- ◀ **两点式** (two-point form)，如图 3 (c) 所示；
- ◀ **参数方程** (parametric equation)，如图 3 (d) 所示。

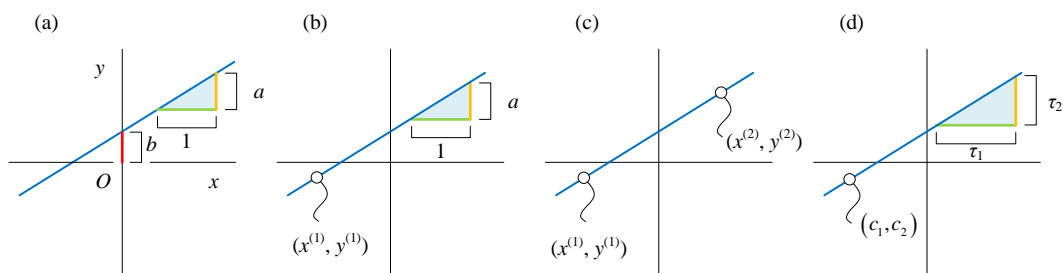


图 3. 一次函数的几种构造方法

### 斜截式

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

斜截式一次函数形式如下：

$$y = f(x) = ax + b \quad (1)$$

斜截式需要两个参数——斜率 ( $a$ ) 和  $y$  轴截距 ( $b$ )。

▲ 注意，对于一次函数，斜率 ( $a$ ) 不能为 0。

当  $a = 0$  时，(1) 为**常数函数** (constant function)。也就是说，**零斜率** (zero slope) 对应常数函数，即**水平线** (horizontal line)。

**无定义斜率** (undefined slope) 代表一条**竖直线** (vertical line)，此时图像虽然是一条直线，垂直于横轴，但它并不是函数。

对于 (1)，当  $b = 0$  时，函数为**比例函数** (proportional function)，而  $a$  则叫做**比例常数** (constant ratio 或 proportionality constant)。比例函数是特殊的一次函数。

➔ 本书第 24 章将比较一次函数(含  $y$  轴截距)、比例函数(不含  $y$  轴截距)两种形式的线性回归模型。

一次函数有两种斜率：**正斜率** (positive slope) 和**负斜率** (negative slope)。图 4 (a) 所示一次函数斜率大于 0，单调递增。图 4 (b) 所示斜率小于 0，一次函数单调递减。

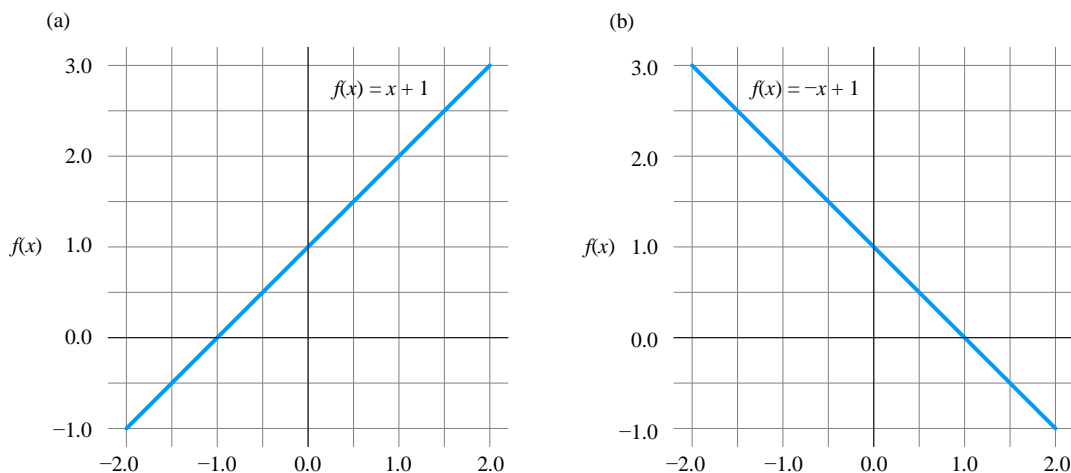


图 4. 一次函数

简单函数通过叠加和复合可以得到更复杂的函数，这是分析理解函数的重要视角。如图 5 所示， $f(x) = x + 1$  可以看成是比例函数  $f_1(x) = x$  和常数函数  $f_2(x) = 1$  叠加得到。 $f(x) = -x + 1$  可以看成是比例函数  $f_1(x) = -x$  和常数函数  $f_2(x) = 1$  叠加得到。

从几何视角来看，比例函数  $f_1(x) = x$  图像沿  $y$  轴向上移动 1 个单位就得到  $f(x) = x + 1$ 。

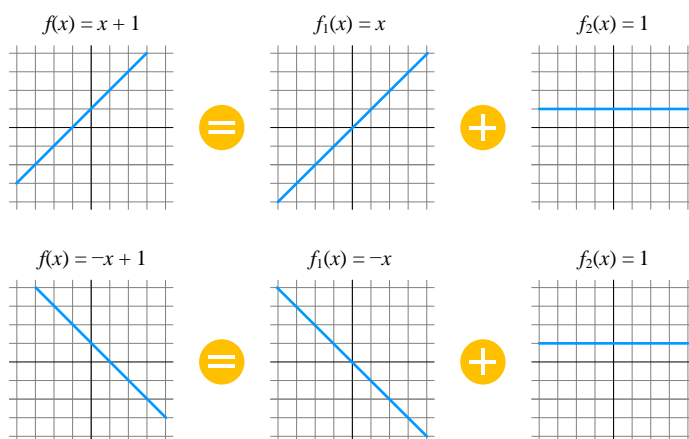
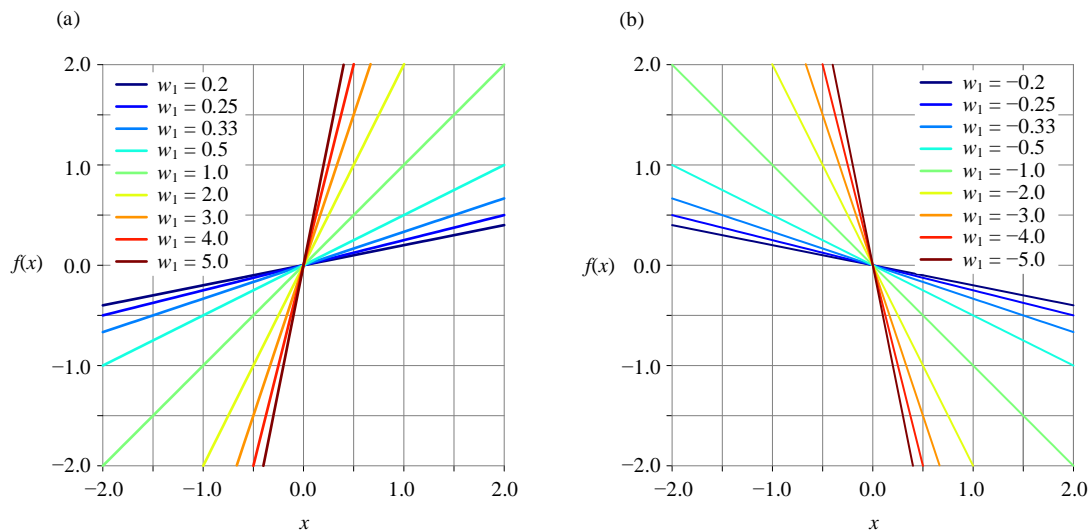


图 5. 函数叠加

## 斜率

图 6 所示为一次函数  $y = w_1x$  随斜率变化，有些场合我们用  $w_1$  代表斜率。 $w_1$  的绝对值越大，一次函数图像越陡峭。

图 6. 一次函数  $y = w_1x$  随斜率变化

## 截距

图 7 所示为一次函数随  $y$  轴截距变化情况。调整一次函数  $y$  轴截距大小，相当于图像上下平移。

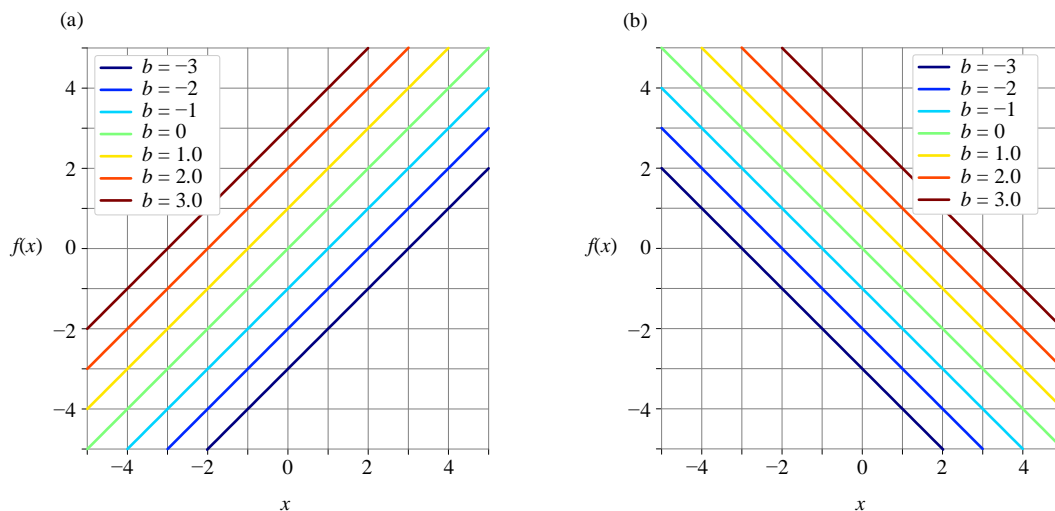


图 7. 一次函数随截距变化

## 两条直线关系

如果两条直线斜率相同，它们相互**平行** (parallelize)，如图 8 (a)，或**重合** (coincide)，如图 8 (b)。图 8 (c) 所示为两条直线**相交** (intersect)，有唯一交点。

如果两个一次函数的斜率乘积为 $-1$ ，则两者**垂直** (perpendicular)，如图 8 (d)。

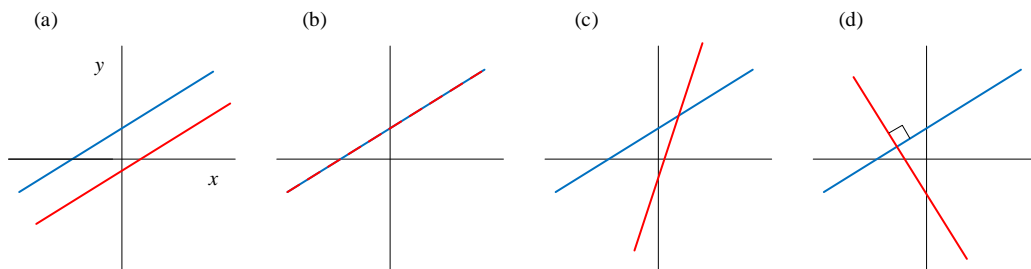


图 8. 两条之间的关系

## 点斜式

一次函数的第二种是点斜式：

$$y - y^{(1)} = f(x) - y^{(1)} = a(x - x^{(1)}) \quad (2)$$

也就是说，给定斜率  $a$  和直线上的一个点  $(x^{(1)}, y^{(1)})$ ，便可以确定平面上一条直线。

## 两点式

第三种形式是两点式，即两点确定一条直线。如下一次函数通过  $(x^{(1)}, y^{(1)})$  和  $(x^{(2)}, y^{(2)})$  两点：

$$y - y^{(1)} = \underbrace{\frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}}_{\text{Slope}} (x - x^{(1)}) \quad (3)$$

其中， $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ 。

两点式可以展开写成：

$$(y - y^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}) = (y^{(2)} - y^{(1)})(x - x^{(1)}) \quad (4)$$



一次函数虽然看着简单，大家千万不要小瞧。数据科学和机器学习中很多算法都离不开一次函数，比如**简单线性回归** (Simple Linear Regression)。简单线性回归也叫一元线性回归模型，是指模型中只含有一个自变量和一个因变量，模型假设自变量和因变量之间存在线性关系。

人们常用有限的样本数据去探寻变量之间的规律，并以此作为分析或预测的工具。如图9所示，从给定的样本数据来看  $x$  和  $y$  似乎存在某种线性关系。通过一些算法，我们可以找到图9中那条红色斜线，它就是简单线性回归模型。而简单线性回归采用的解析式便是一元函数的斜截式。

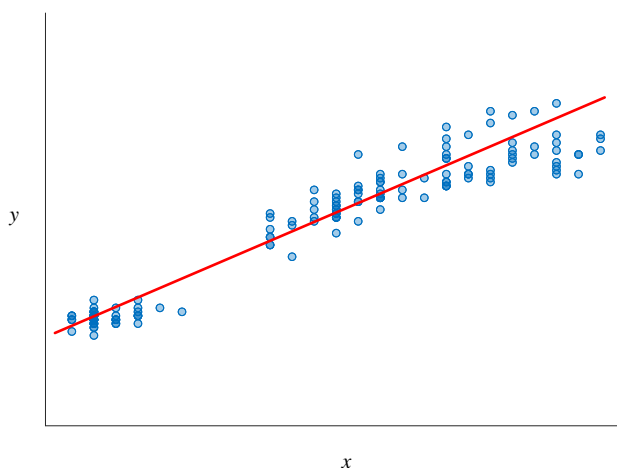


图 9. 简单线性回归





Bk3\_Ch11\_01.py 绘制图 6、图 7。代码中一元函数自变量  $x$  取值一般是等差数列。

`numpy.linspace(start, end, num)` 可以用来生成等差数列，数列 `start` 和 `end` 之间（包括 `start` 和 `end` 两个端点数值），数列的元素个数为 `num` 个，得到的结果数据类型为 `array`。

## 11.3 二次函数：一条抛物线

**二次函数** (quadratic function) 是**二次多项式函数** (second order polynomial function 或 second degree polynomial function)。二次函数图象是**抛物线** (parabola)，可以**开口向上** (open upward) 或**开口向下** (open downward)，**对称轴平行于纵轴** (the axis of symmetry is parallel to the y-axis)。

### 三种形式

二次函数解析式有三种形式：

- ◀ **基本式** (standard form)，如图 10 (a)；
- ◀ **两根式** (factored form)，如图 10 (b)；
- ◀ **顶点式** (vertex form)，如图 10 (c)。

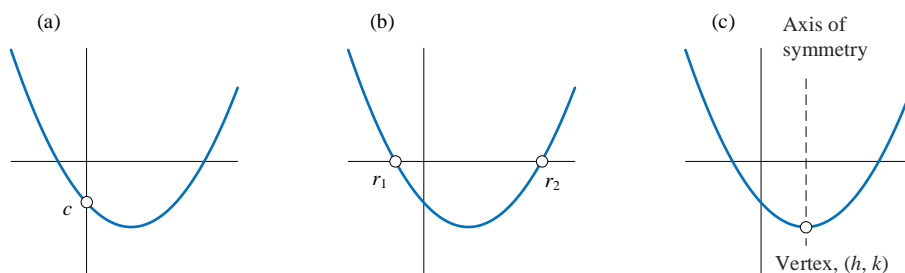


图 10. 二次函数的几种构造方法

### 基本式

二次函数的基本式如下：

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \quad (5)$$

其中,  $a$  被称作**二次项系数** (quadratic coefficient), 注意  $a$  不为零。 $b$  是**一次项系数** (linear coefficient);  $c$  叫**常数项** (constant term), 也叫  $y$  轴截距 ( $y$ -intercept)。

图 11 (a) 所示二次函数开口向上, **顶点** (vertex) 位于  $y$  轴, 对称轴为  $y$  轴。图 11 (b) 所示二次函数开口向下。

图 11 (a) 二次函数为凸, 顶点位置对应函数**最小值** (minimum)。图 11 (b) 二次函数为凹, 顶点位置对应函数**最大值** (maximum)。

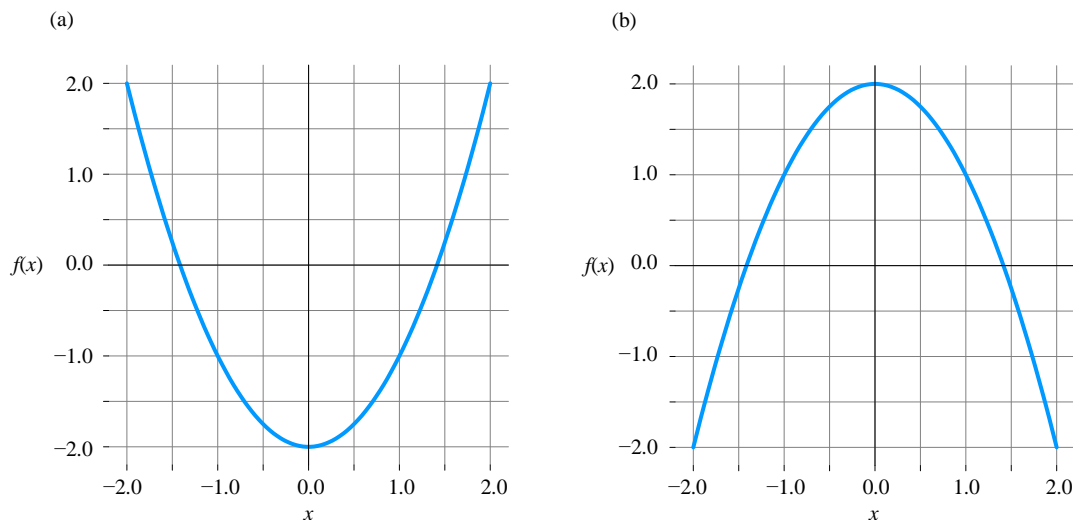


图 11. 不同开口方向二次函数



大家应该听过**极大值** (maxima 或 local maxima 或 relative maxima)、**极小值** (minima 或 local minima 或 relative minima)、**最大值** (maximum 或 global maximum 或 absolute maximum)、**最小值** (minimum 或 global minimum 或 absolute minimum) 等数学概念。

这里, 我们用白话比较一下这几个概念, 让大家有一个直观印象。

极大值和极小值统称**极值** (extrema 或 local extrema), 最大值和最小值统称**最值** (global extrema)。极值是就局部而言, 而最值是整体来看。极值是局部的最大或最小值, 而最值是整体的最大或最小值。

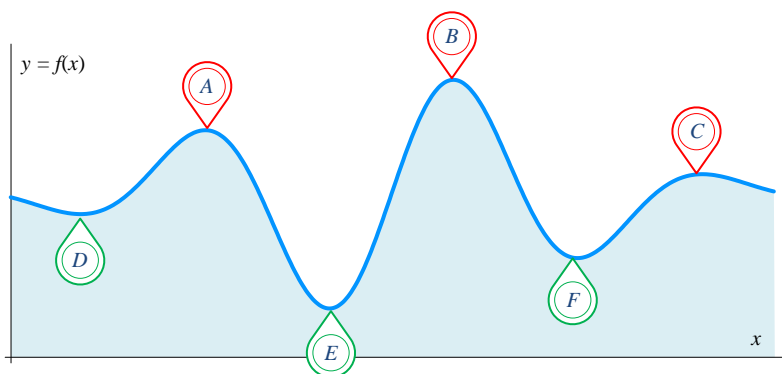


图 12. 极值和最值

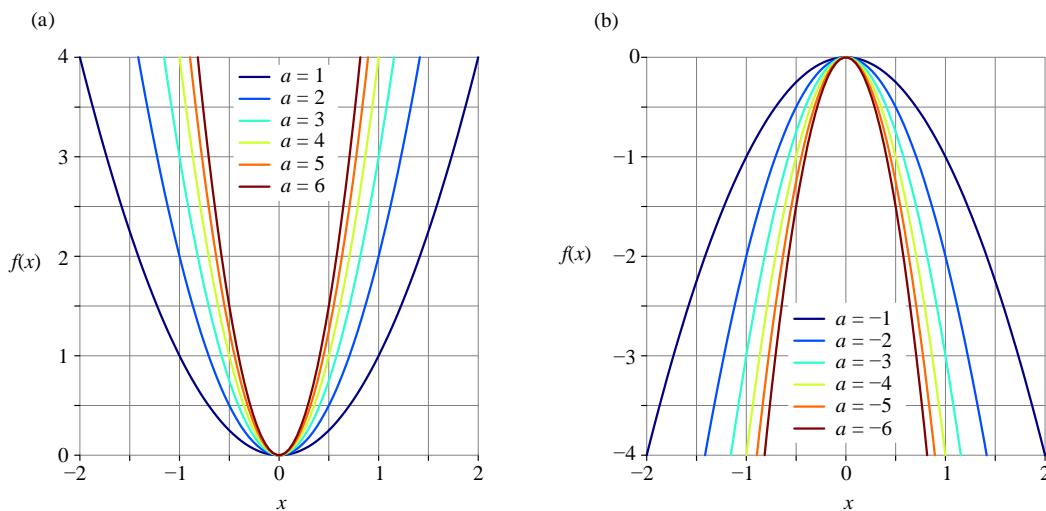
把图 12 函数图像看成一座山峰， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  都是极值，即山峰和山谷的总和。其中， $A$ 、 $B$ 、 $C$  为极大值，即山峰； $D$ 、 $E$ 、 $F$  为极小值，即山谷。

显然， $B$  是最高的山峰，也就是最大值，也叫全局最大值。而  $E$  是最低的山谷，也就是最小值，也叫全局最小值。

回过头来再看图 11，图 11 (a) 中开口朝上抛物线的顶点对应最低的山谷，即全局最小值；图 11 (b) 中开口朝下抛物线的顶点为最高的山峰，即全局最大值。

## 开口大小

图 13 所示为二次函数图像开口大小随系数  $a$  变化。 $a$  的绝对值越大，开口越小，对应二次函数图像变化越剧烈。

图 13. 二次函数随  $a$  变化

## 两根式

如果  $f(x) = 0$  存在两个实数根的话，二次函数可以写成两根式：

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2), \quad a \neq 0 \quad (6)$$

其中,  $r_1$  和  $r_2$  为二次方程的根。

### 顶点式

二次函数另外一个常见的形式是顶点式, 具体形式如下:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k, \quad a \neq 0 \quad (7)$$

其中,  $h$  和  $k$  分别为顶点的横纵坐标值。

图 14 (a) 所示为函数图像和  $h$  的关系, 显然  $h$  影响函数在水平方向位置。图 14 (b) 所示为函数图像和  $k$  的关系,  $k$  影响函数在竖直方向位置。

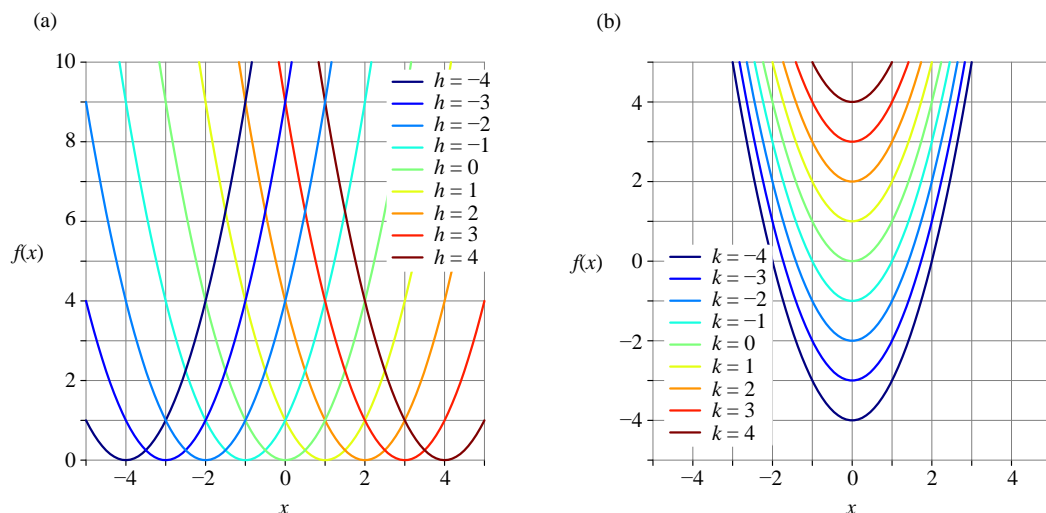


图 14. 二次函数随  $h$  和  $k$  变化

前文提到, 二次函数顶点可以是函数的最大值或最小值。该顶点也是函数**单调性** (monotonicity) 的分水岭, 即**拐点** (turning point)。以  $h$  为界, 二次函数**单调区间** (intervals of monotonicity) 分别为  $(-\infty, h)$  和  $(h, +\infty)$ 。



Bk3\_Ch11\_02.py 绘制图 13 和图 14。

## 11.4 多项式函数：从叠加角度来看

**多项式函数** (polynomial function) 相当于一次和二次函数的推广，具体形式如下：

$$y = f(x) = a_K x^K + a_{K-1} x^{K-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^K a_i x^i \quad (8)$$

其中，最高次项系数  $a_K$  不为 0， $K$  为最高次项次数。

图 15 几幅分图分别展示常数函数、一次到五次函数图像。可以这样理解，任何五次多项式函数都是图 15 所示的图像分别乘以相应系数叠加而成。

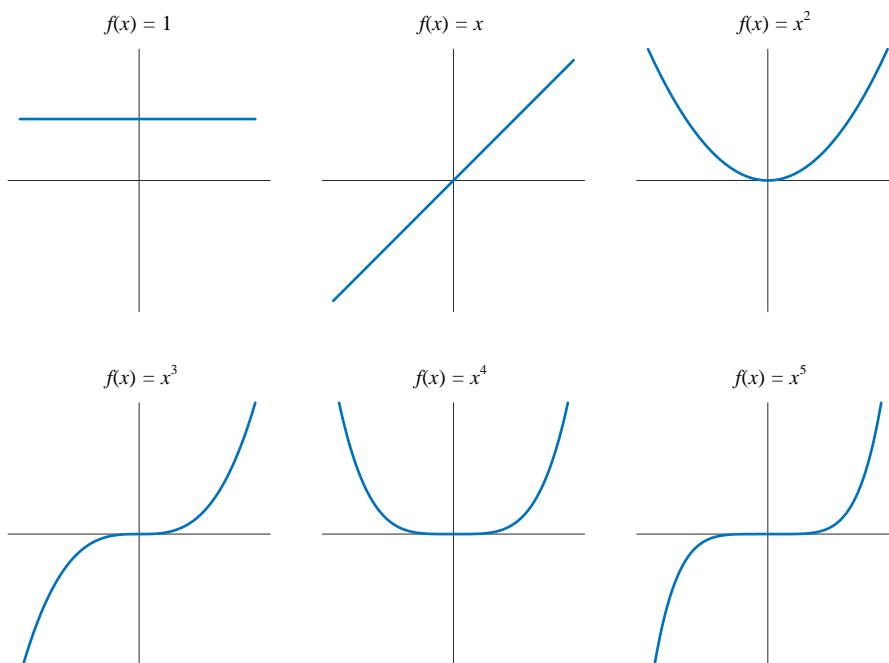


图 15. 常数函数到五次函数

### 三次函数

**三次函数** (cubic function, polynomial function of degree 3) 的形式为：

$$y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (9)$$

举两个三次函数的例子：

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^3 - x \\ y &= f(x) = -x^3 + x \end{aligned} \quad (10)$$

这两个三次函数可以看做是  $x^3$  和  $x$  经过加减运算组合而成，如图 17 所示。

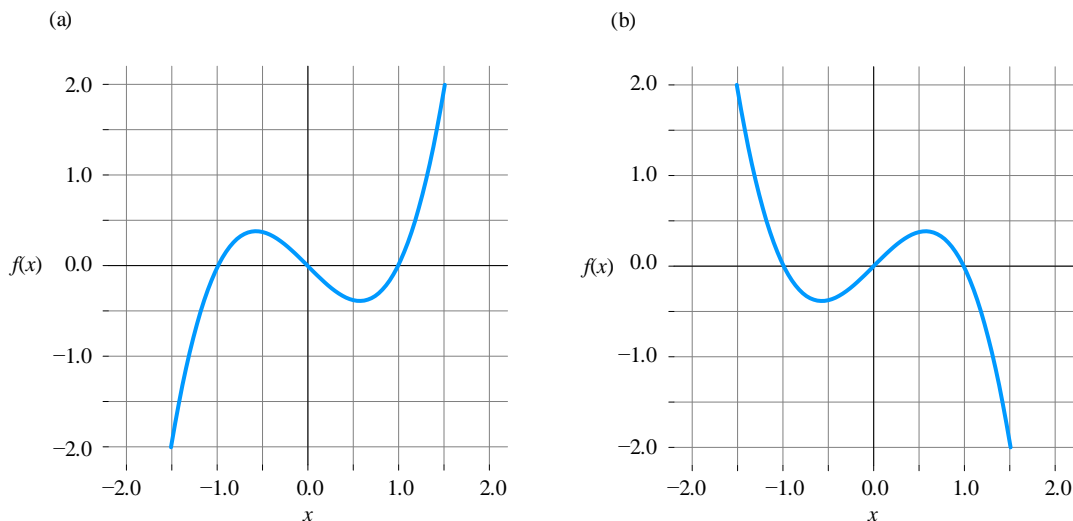


图 16. 两个三次函数

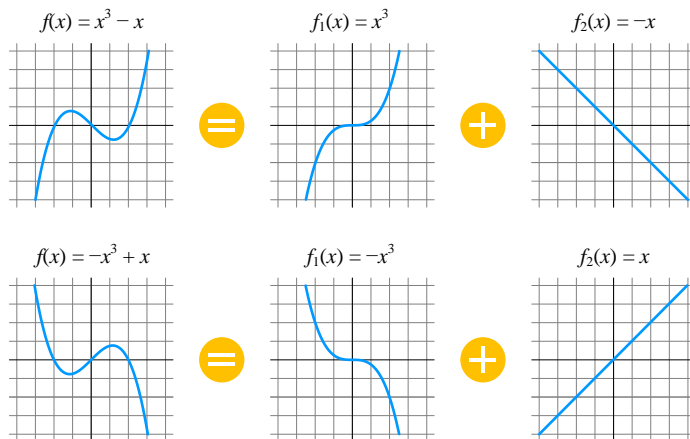


图 17. 函数叠加得到三次函数



前面讲过一次函数可以用在一元线性回归。线性回归虽然简单好用，但是并非万能。图 18 给出的数据具有明显的“非线性”特征，显然不适合用线性回归来描述。

多项式回归可以胜任很多非线性回归应用场合，多项式回归采用的数学模型就是多项式函数。

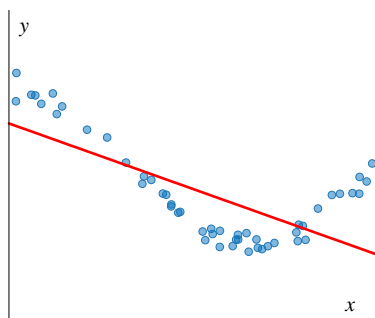


图 18. 线性回归失效的例子

图 19 (a)、(b)、(c) 比较三条拟合曲线，它们分别采用二次到四次一元多项式回归模型拟合样本数据。多项式回归的最大优点就是可以通过增加自变量次数，达到对数据更好的拟合；但是，对于多项式回归，自变量次数越高，越容易产生**过度拟合** (overfitting) 问题，如图 19 (d)。

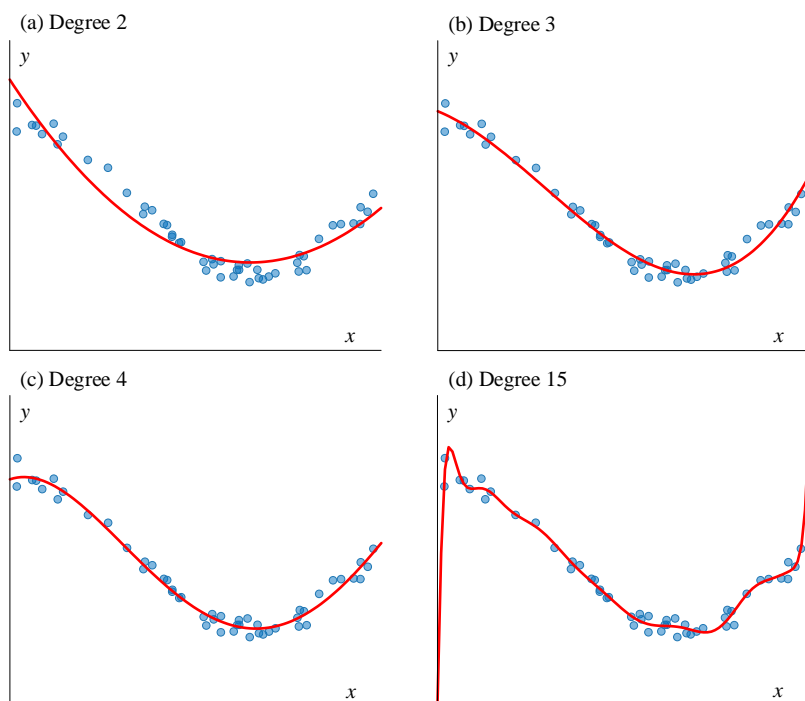


图 19. 逐渐增加多项式回归次数

使用过于复杂的模型是导致过拟合的重要原因之一。过拟合模型过度捕捉训练数据中的细节信息，甚至是噪音。但是，使用过拟合模型分析预测新样本数据时，往往结果较差。本系列丛书会在《数学科学》一册专门讲解多项式回归。



Bk3\_Ch11\_03.py 绘制图 4、图 11 和图 16。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 11.5 幂函数：底数为自变量

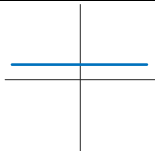
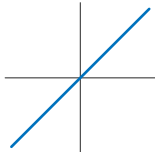
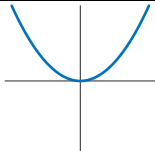
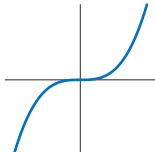
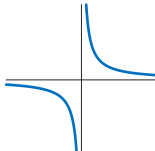
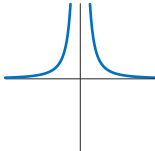
**幂函数** (power function) 是形如下式的函数：

$$f(x) = k \cdot x^p \quad (11)$$

其中，自变量  $x$  为**底数** (base)， $p$  为**指数** (exponent 或 power)。白话说，幂就是一个数和它自己相乘的积，比如， $xx = x^2$  是二次幂， $xxx = x^3$  是三次幂， $xxxx = x^4$  是四次幂。

表 2 总结常用的幂函数，请大家关注不同函数的自变量取值范围。

表 1. 几个常用幂函数

幂函数	例子	图像
常数函数 (constant function)	$f(x) = 1 = x^0$	
恒等函数 (identity function)	$f(x) = x = x^1$	
平方函数 (square function)	$f(x) = x^2$	
立方函数 (cubic function)	$f(x) = x^3$	
反比例函数 (reciprocal function)	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $x \neq 0$	
反比例平方函数 (reciprocal squared function)	$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $x \neq 0$	

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

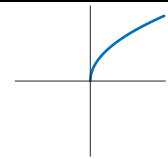
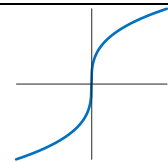
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



平方根函数 (square root function)	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $x \geq 0$	
立方根函数 (cubic root function)	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	

## 平方根函数

图 20 (a) 所示红色曲线为**平方根函数** (square root function)，对应函数式为：

$$y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

⚠ 注意上式函数定义域  $x \geq 0$ ，即非负实数；函数值域也是非负实数。

`numpy.sqrt(x)` 可以用来计算平方根，也可以用 `x**(1/2)` 来计算。

图 20 (a) 还比较了平方根函数和二次函数，两个函数的定义域显然不同。

## 立方根函数

图 20 (b) 所示红色曲线为**立方根函数** (cubic root function)，对应函数式为：

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

`numpy.cbrt(x)` 可以用来计算立方根。Python 中 `x**(1/3)` 不可以计算负数立方根。

图 20 (b) 还比较了立方根函数和三次函数  $f(x) = x^3$ ，两者互为反函数。

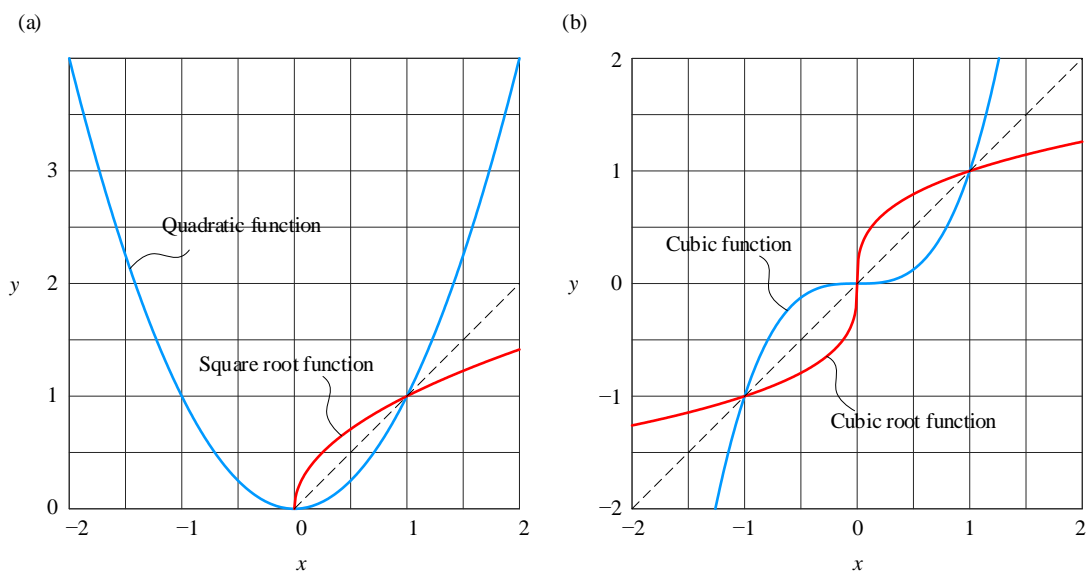


图 20. 平方根和立方根函数

### 奇偶性

如图 21 (a) 所示, 当  $p$  为偶数时, 幂函数为偶函数, 图像关于  $y$  轴对称。 $p$  值越大,  $x$  绝对值增大时, 函数值越快速接近正无穷。

如图 21 (b) 所示, 当  $p$  为奇数时, 幂函数为奇函数, 图像关于原点对称。 $p$  值越大,  $x$  绝对值增大时, 函数值越快速接近正无穷或负无穷。

此外, 图 21 两幅图中所有函数可以写作  $f(x) = x^p$ , 所有曲线都经过  $(1, 1)$ 。

请大家修改前文代码自行绘制图 21。

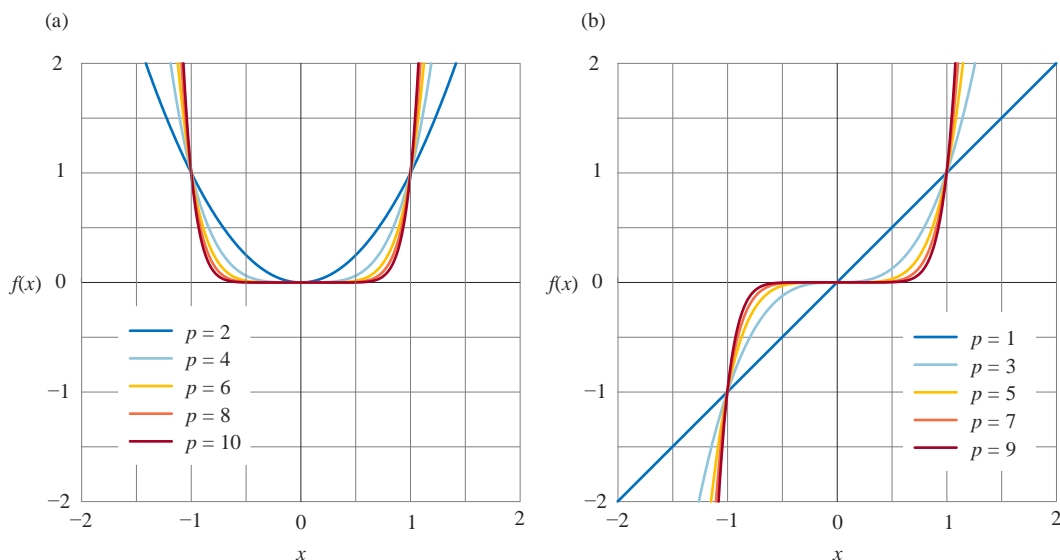
图 21. 幂函数  $p$  分别为偶数和奇数时, 图像特征

表 2. 用英文读乘幂

数学表达	英文表达
$x^n$	$x$ to the $n$ $x$ to the $n$ -th $x$ to the $n$ -th power the $n$ -th power of $b$ $x$ raised to the $n$ -th power $x$ raised to the power of $n$ $x$ raised by the exponent of $n$
$a^2$	$a$ squared the square of $a$ $a$ raised to the second power $a$ to the second
$a^3$	$a$ cubed the cube of $a$ $a$ to the third
$2^5$	the fifth power of 2 2 raised to the fifth power 2 to the power of 5 2 to the fifth power 2 to the fifth 2 to the five
$y = 2^x$	$y$ equals 2 to the power of $x$
$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	square root of two
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$	cube root of two cubic root of two
$\sqrt[2]{64} = 8$	The square root of sixty four is eight.
$\sqrt[3]{64} = 4$	The cube root of sixty four is four.
$\sqrt[6]{64} = 2$	The sixth root of sixty four is two.
$\sqrt[c]{a^b}$	$c$ -th root of $a$ raised to the $b$ power

## 反比例函数

**反比例函数** (inversely proportional function) 的一般式：

$$y = f(x) = \frac{k}{x} \quad (14)$$

如图 22 所示，和  $y = f(x) = 1/x$  相比， $|k| > 1$  时，双曲线朝远离原点方向拉伸； $|k| < 1$  将双曲线向靠近原点方向压缩。

**⚠ 注意**，反比例函数实际上是旋转双曲线。

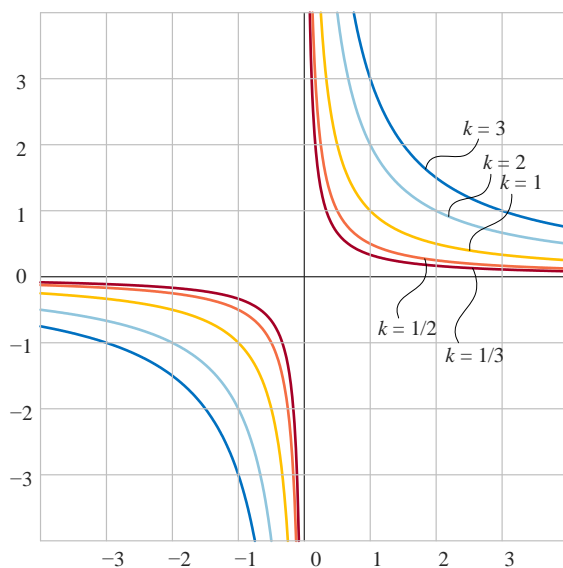
图 22.  $k$  取不同值时反比例函数图像  $f(x) = k/x$ 

表 3. 用英文读比例函数

数学表达	英文表达
$y = \frac{k}{x}$	$x$ is inversely proportional to $y$
$h = \frac{k}{t^2}$	$h$ is inversely proportional to the square of $t$ $h$ varies inversely with the square of $t$

## 渐近线

如图 22 所示反比例函数有两条**渐近线** (asymptote), **水平渐近线** (horizontal asymptote)  $y = 0$  和**竖直渐近线** (vertical asymptote)  $x = 0$ .

所谓渐近线是指与曲线极限相关的一条直线, 当曲线上某动点沿该曲线的一个分支移向无穷远时, 动点到该渐近线的垂直距离趋于零。图 22 中, 当  $x$  从右侧接近竖直渐近线, 函数值无约束地接近**正无穷** (positive infinity); 相反, 当  $x$  从左侧接近竖直渐近线, 函数值无约束地接近**负无穷** (negative infinity)。

## 有理函数

反比例函数移动之后可以得到最简单的**有理函数** (rational function), 解析式如下:

$$f(x) = \frac{k}{x-h} + a \quad (15)$$

其中,  $x \neq h$ 。

$h$  左右移动竖直渐近线,  $a$  上下移动水平渐近线, 比如下例:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 1 \quad (16)$$

其中,  $x \neq 1$ 。如图 23 所示,  $y = 1$  为 (16) 对应反比例函数的水平渐近线;  $x = 1$  为竖直渐近线。

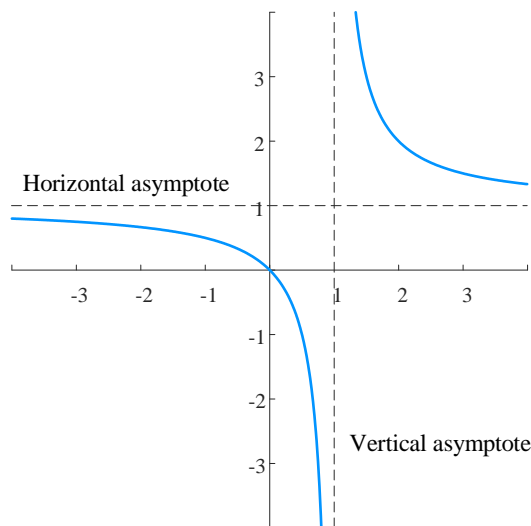


图 23. 反比例函数两条渐近线

## 11.6 分段函数：不连续函数

**分段函数** (piecewise function) 是一类不连续函数；分段函数是自变量  $x$  的不同的取值范围有不同的解析式的函数。

**▲ 注意**, 分段函数不能算做代数函数。

图 24 对应下例分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 3 \\ 3 & 3 \leq x \end{cases} \quad (17)$$

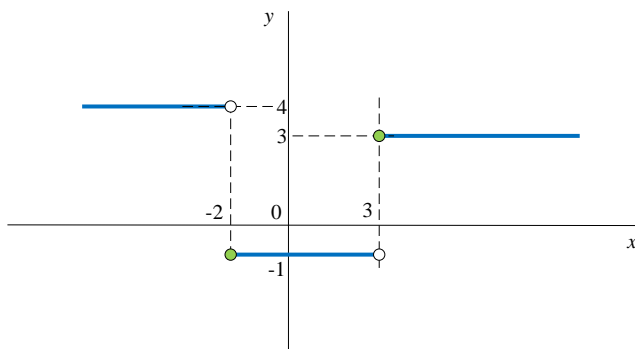


图 24. 分段函数



**插值** (interpolation) 指的是通过已知离散数据点，在一定范围内推导求得新数据点的方法。**线性插值** (linear interpolation) 是指插值函数为一次函数。

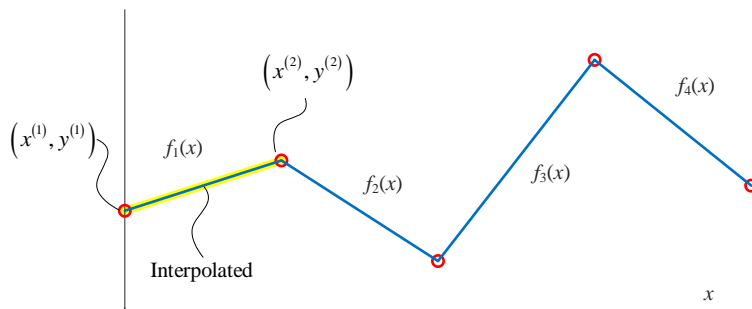


图 25. 一次函数两点式用于线性插值

插值函数是分段函数时，也称**分段插值** (piecewise interpolation)，每两个相邻的数据点之间便是一个分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x^{(1)} \leq x < x^{(2)} \\ f_2(x) & x^{(2)} \leq x < x^{(3)} \\ \dots & \dots \\ f_{n-1}(x) & x^{(n-1)} \leq x < x^{(n)} \end{cases} \quad (18)$$

如图 25 所示，所有红色的圆点为已知离散数据点。

相邻两点连接得到的线段解析式便是线性插值分段函数。两点式公式常用在线性插值。举个例子，利用一次函数两点式，给定的两点  $(x^{(1)}, y^{(1)})$  和  $(x^{(2)}, y^{(2)})$  可以确定分段函数  $f_1(x)$ 。

比较图 9 和图 25，我们很容易发现回归和插值的明显区别。如图 9 所示，回归绝不要求红色线（模型）穿越所有样本点。而如图 25 所示，插值则要求分段函数穿越所有已知数据点。

除了线性插值之外，本系列丛书还要介绍其他常见插值方法。

## 绝对值函数

**绝对值函数** (absolute value function) 可以看做是分段函数。绝对值函数的一般式为：

$$f(x) = k|x - h| + a \quad (19)$$

举个最简单的例子：

$$f(x) = k|x| \quad (20)$$

对于  $f(x) = k|x|$  函数， $x = 0$  为  $f(x)$  的尖点，它破坏了函数的光滑。图 26 所示为  $k$  影响绝对值函数  $f(x) = k|x|$  的开口大小； $k$  的绝对值越大，绝对值函数开口越小。

`numpy.absolute()` 计算绝对值。请大家自行编写代码绘制图 26，并讨论  $k$  为不同负整数时函数图像特点。

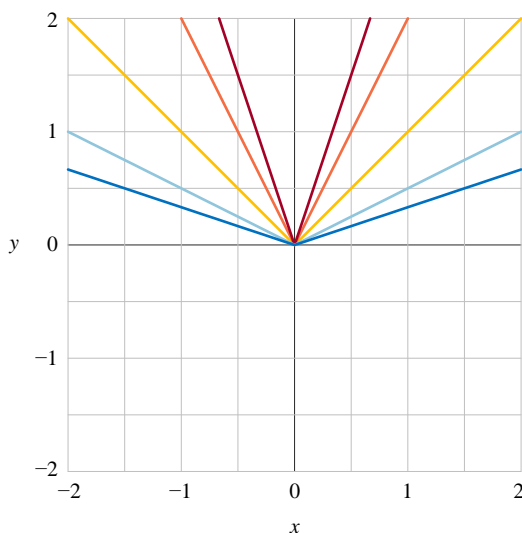
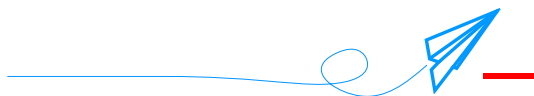


图 26.  $k$  影响绝对值函数  $f(x) = k|x|$

严格来讲，绝对值函数不属于代数函数；但是，绝对值函数可以写成自变量的指数幂和开方形式。比如 (20) 可以写成：

$$f(x) = k\sqrt{x^2} \quad (21)$$



本章除了介绍几种常见的代数函数以外，还有一个要点——参数对函数形状、性质的影响。请大家思考这几个问题。

一次函数的斜率和截距，如何影响函数图像？

哪个参数影响二次函数的开口方向和大小？二次函数什么时候存在最大值或最小值？二次函数的对称轴位置？

用“叠加”这个思路，请大家想一下多项式函数  $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5$  相当于由哪些函数构造而成？它们各自的函数图像分别怎样？