装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2020 学年第 1 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号__________________姓名__________________年级专业____________________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评阅人						

得分	

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1．在下列命题中，一定正确的是（　　　）

A. 因为$3>2$,所以$3-i>2-i$；　　B. $\overline{p(z)}=p(\bar{z})$($p(z)$为多项式)；

C. $\mathrm{Im}(z_1+z_2)=\mathrm{Im}\,z_1+\mathrm{Im}\,z_2$；　　D. $(a^b)^c=a^{bc}$(a,b,c都是非零复数).

2. 下列级数中，条件收敛的级数为(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1+3i}{2i})^n$；　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n}$；　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+4i)^n}{n!}$；　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-i}{\sqrt{n+1}}$.

3.下列不等式所确定的区域中不是单连通有界区域的是（　　）

A. $|z+1|+|z-1|<4$；　B. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|>2$；　C. $|arg\,z|<\frac{\pi}{3}$；　D. $Im\,z>1,$ 且$|z|<2.$

4.若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在$z=1+2i$处收敛，那么该级数在$z=-2i$处的敛散性为(　　)

A．绝对收敛　　　　（B）条件收敛

C．发散　　　　　　（D）不能确定

5.设$f(z)=\oint_{|\xi|=4}\frac{e^{\xi}}{\xi-z}d\xi$，其中$|z|\neq4$，则$f'(\pi i)=$(　　)

A. 1　　B. -1;　　（C）$2\pi i$；　　（D）$-2\pi i$.

装

订

线

1.5CM

得分	

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6. 设α是复数，则z^{α}在复平面上处处解析. （　　）

7. 积分$\oint_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}dz$的值与半径$r$ $(r>0)$的大小无关. （　　）

8. 幂级数的和函数在收敛圆周上可能发散，也可能收敛。 （　　）

9. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{\sqrt{n}}$是发散的. （　　）

10. 复变函数在区域D内解析的充要条件是在区域D内实部是虚部的共轭调和函数。
（　　）

得分	

三、**填空题**（本大题共 5小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11. 设$f(z)=x^3+y^3+ix^2y^2$，则$f'(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i)=$________________

12. 设$z=(2-3i)(-2+i)$，则$\arg z=$___________________

13. 设c为正向圆周$|z|=2$，则$\oint_c\frac{e^z}{(z-\pi i)^{2020}}dz=$_____________________

14. 复数i^i的主值为_______________________

15. 已知$e^z=1+i$，那么$z=$____________________.

得分	

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16. 设$f(z)=\frac{1}{5}z^5-(1+i)z$，解方程$f'(z)=0$.

装

订

线

1.5CM

17. 计算$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.

18. 求积分$\oint_{|z=1}\dfrac{e^z}{z}dz$，从而证明$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.$

19. 将函数$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$展开为 z 的幂级数，并指出其收敛域.

20.计算积分 $\oint_C\dfrac{\sin\pi z}{(4z-1)(z-1)^2}dz$，其中 C 为以下曲线：$|z|=2.$

得分	

五、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证$v(x,y)=e^x\cos y+x$为调和函数，并求一解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且$f(0)=i.$

22. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z-4}$ 在以 $z=1$为中心的洛朗级数.

装

订

线

1.5CM

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2020 学年第 1 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号________________姓名________________年级专业________________

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、C；2、B；3、C；4、A；5、D。

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6、 ×；7、 √；8、√；9、×；10、 ×。

三、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、$\frac{27}{4}(1-i)$；12、 $\pi-\arg\tan 8$；13、0； 14、$e^{-\frac{\pi}{2}}$；

15、$z=\frac{1}{2}\ln 2+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16、设 $f(z)=\frac{1}{5}z^5-(1+i)z$，解方程 $f'(z)=0.$

解：$0=f'(z)=z^4-(1+i)$ . . . . **3 分**

$$z=\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}),k=0,1,2,3 \text{ . . . . } \textbf{4 分}$$

17. 计算 $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.

解：$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-i)^2}$ . . . . **3 分**

$=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{-2i}=-\sqrt{3}-i$ . . . . **4 分**

18. 求积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$，从而证明 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.$

解：由柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi ie^0=2\pi i\ ,\dots\dots\dots$$ **2 分**

在$|z|=1$上，$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ -\pi<\theta<\pi$

$$2\pi i=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos\theta}(\cos(\sin\ \theta)+i\sin(\sin\ \theta))}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta\dots\dots\dots$$ **2 分**

$$=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}(\cos(\sin\ \theta)+i\sin(\sin\ \theta))d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\ \theta)d\theta$$

$$=2i\int_{0}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\ \theta)d\theta\dots\dots\dots$$ **2 分**

所以$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.\dots\dots\dots$ **1 分**

19. 将函数$\frac{1}{(1+z^2)^2}$展开为z的幂级数，并指出其收敛域.

解：函数的奇点为$z=\pm i$，所以收敛域为$|z|<1$。……… **2 分**

$$\frac{1}{(1+t)^2}=\left(\frac{-1}{1+t}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{n-1},|t|<1\dots\dots\dots$$ **3 分**

令$t=z^2$, 可得$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{2n-2},|z|<1\dots\dots\dots$ **2 分**

20、计算积分 $\oint_C\frac{\sin(\pi z)}{(4z-1)(z-1)^2}dz$，其中 C 为以下曲线：$|z|=2$.

解：由柯西积分定理得

原式$=2\pi i\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{\sin(\pi z)}{(4z-1)}}{(z-1)^2}dz+2\pi i\int_{|z-\frac{1}{4}|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}}{(z-\frac{1}{4})}dz\quad\dots\dots\dots$ **2 分**

$$=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin(\pi z)}{(4z-1)}\right)'\Bigg|_{z=1}+\frac{2\pi i\sin(\pi z)}{4(z-1)^2}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}\quad\dots\dots\dots$$ **2 分**

$$=2\pi i\left(\frac{\pi\cos(\pi z)(4z-1)-4\sin(\pi z)}{(4z-1)^2}\right)_{z=1}+\frac{4\sqrt{2}\pi i}{9}\quad\dots\dots\dots$$ **2 分**

装

订

线

1.5CM

装

订

线

$$=\frac{4\sqrt{2}\pi i}{9}-\frac{2\pi^2 i}{3}.$$ . . . . **1 分**

六、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $v(x,y)=e^x\cos y+x$ 为调和函数，并求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且 $f(0)=i.$

解：由柯西－黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \text{所以}\, u(x,y)=\int -e^x\sin y dx=-e^x\sin y+C(y)$$ . . . . **3 分**

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cos y-1,$$

另一方面

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y+C'(y),$$ . . . . **3 分**

所以 $C(y)=\int C'(y)dx=-y+C$

所以 $u(x,y)=-e^x\sin y-y+C.$ . . . . **2 分**

从而 $f(z)=-e^x\cos y-y+C+(e^x\cos y+x)i.$

又 $f(0)=C+i=i.$ 所以 $C=0$，从而 $f(z)=-e^x\cos y-y+(e^x\cos y+x)i.$ . . . . **2 分**

22、求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z-4}$ 在以 $z=1$ 为中心的洛朗级数.

解：$f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z-4}$ 的奇点为 $z=-1,z=4$，所以圆环为：$0<|z-1|<2$，$2<|z-1|<3$，$3<|z-1|<+\infty$。. . . . . **2 分**

由于 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-4)}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{z-4}+\dfrac{1}{z+1}).$

（1）当 $0<|z-1|<2$ 时，因为 $\dfrac{1}{1-(z-1)}=\sum_{z=0}^{+\infty}(z-1)^n$, 故

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{z-1}{2}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{15}(\frac{z-1}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{10}(\frac{z-1}{2})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{5}(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})(z-1)^n \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{3 分}$$

（2）当 $2<|z-1|<3$ 时，$\left|\frac{2}{z-1}\right|<1,\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$，所以，

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z-1}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{15}(\frac{z-1}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{5(z-1)}(\frac{2}{z-1})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{(-2)^n}{5}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{3分}$$

（3）当 $3<|z-1|<+\infty$ 时，$\left|\frac{3}{z-1}\right|<1,$ 所以，

$$f(z)=\frac{1}{5(z-1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z-1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z-1}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5(z-1)}(\frac{3}{z-1})^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{5(z-1)}(\frac{2}{z-1})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3^n}{5}-\frac{(-2)^n}{5})\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{2分}$$