装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2020 学年第 2 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号________________姓名________________年级专业________________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评阅人						

得分	

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。

1．在下列命题中，一定正确的是（　　）

A. $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$；　　B. $\overline{e^{iz}}=e^{-iz}$；

C. $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=Lnz_1+Lnz_2$；　　D. $|\sin z|\le 1$.

2. 下列方程所表示的曲线中，是简单闭曲线的是（　　）

A．$Im(i+\bar{z})=4$；　　B. $|z-2i|=|z+2|$；

C. $|z-1|=Re(z-i)$；　　D. $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}-4=0$.

3. 设 C 为单位圆周$|z|=1$的上半部分从$z_1=1$到$z_2=-1$的弧，则$\int_C(z^2+z\bar{z})dz=$（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. -2；　　C. $-\frac{8}{3}$；　　D. $\frac{8}{3}$.

4. 下列级数中，发散的级数为(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$；　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2n}$；　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n 1}{n!}$；　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{5-3i}{7})^n$.

5. 设函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)(z+4)}$ 在以原点为中心的圆环内的洛朗展开式有 k 个，那么

$k=$(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

装

订

线

1.5CM

得分	

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在点 z_0 不可导. （ ）F

7. 设$z = x + iy$，则 $Argz = \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi, k \in Z.$ （ ）F

8. 幂级数的和函数在收敛圆周上一定发散。 （ ）F

9. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-i)^n$在$z = 2i$收敛，则在$z = 1$一定收敛. （ ）F

10. 设$f(z)$是闭区域上的非常数解析函数，则$|f(z)|$可能在区域内部取得，可能边界上取得。 （ ）T

得分	

三、**填空题**（本大题共 5小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11. 极限 $\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1} =$ ______________

12. 复数$1-\cos\theta + i\sin\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ 的三角形式为__________________

13. 设 C 为圆周$|z|=1$上从 0 到 i 的弧段，则 $\int_C ze^z \mathrm{d}z =$ ____________________

14. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n(n+1)}\cdot(z-2)^n$ 的收敛半径等于______________________

15. $Ln(1-\mathrm{i}) =$ ____________________.

$\dfrac{3}{2}$； $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$； $(1-\sin1-\cos1)+i(\cos1-\sin1)$； $\dfrac{1}{2}$； $\dfrac{1}{2}\ln2+i(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi)$

得分	

四、**计算题**（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16. 设 $f(z)=\dfrac{1}{3}z^3-2iz^2-(4-9i)z$，解方程 $f'(z)=0$.

装

订

线

17. 判断函数 $f(z)=e^{x}(x\cos y-y\sin y)+ie^{x}(y\cos y+x\sin y)$ 的可导性和解析性.

18. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$ 的收敛域，并求出收敛域内的和函数.

19. 将函数 $\sin^2 z$ 在 $z=0$ 处展开成泰勒级数，并指出其收敛域.

20. 求积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(2z+1)^3}dz$，其中 $C:|z|=1$ 的正向.

装

订

得分	

线

1.5CM

五、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 为调和函数，并求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且 $f(2)=-i.$

22. 求函数 $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}$ 以奇点中心的洛朗级数.

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2020 学年第 2 学期　考试科目：<u>复变函数与积分变换</u>

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、C；2、D；3、C；4、A；5、C.

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6、 ×；7、 ×；8、×；9、×；10、 ×.

三、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、$\frac{3}{2}$；12、 $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$；13、$(1-\sin 1-\cos 1)+i(\cos 1-\sin 1)$；14、$\frac{1}{2}$；

15、$\frac{1}{2}\ln 2+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)$。

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16．设 $f(z)=\frac{1}{3}z^3-2iz^2-(4-9i)z$，解方程 $f'(z)=0$.

解：因为 $f'(z)=z^2-4iz-(4-9i)=(z-2i)^2+9i,$ ……………………………2 分

所以，$f'(z)=0,$ 即 $(z-2i)^2=-9i=9e^{-\frac{\pi}{2}i}$， ………………………………………4 分

故　$z=2i+3e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}i},k=0,1,$ …………………………………………………6 分

其中，$z_1=2i+3e^{\frac{-\pi}{4}i},z_2=2i+3e^{\frac{3}{4}i}.$ ………………………………………………7 分

17. 判断函数 $f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$ 的可导性和解析性.

解：设 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y),v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y),$

易得 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(\cos y+x\cos y-y\sin y),\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y),$ 2 分

$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y),\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y),$ …………4 分

显然，u,v 具有一阶连续偏导，

且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$ 满足柯西-黎曼方程， ……………………………………6 分

故 *f(z)*在复平面上处处可导，因此处处解析，　$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

装

订

线

且 $=e^{x}(\cos y+x\cos y-y\sin y)+ie^{x}(y\cos y+x\sin y+\sin y)$. ……………7 分

18. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$ 的收敛域，并求出收敛域内的和函数.

解　由于 $c_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$，故 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right|=1$, ………………………2 分

所以, 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$, 故收敛域为 $\{z\,|\,|z|<1\}$. ………………………………3 分

设 $s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z z^n dz$ ……………………………………………5 分

$=\int_0^z(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n)dz=\int_0^z\frac{1}{1+z}dz=\ln(1+z)$. ……………………………………7 分

19. 将函数 $\sin^2 z$ 在 $z=0$ 处展开成泰勒级数，并指出其收敛域.

解　因为 $\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}$ …………………………4 分

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$$,…………………………………………………6 分

其中, $|2z|<+\infty$,即 $|z|<+\infty$.…………………………………………………7 分

20. 求积分 $\oint_C\frac{e^z}{z(2z+1)^3}dz$，其中 $C:|z|=1$ 的正向.

解　易知 $z_1=0, z_2=-\frac{1}{2}$ 是被积函数的奇点,且在 C 内，………………………1 分

分别以 z_1, z_2 作 $C_1:|z|=\frac{1}{3}, C_2:\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$，取正向，…………………………2 分

由柯西积分定理，$\oint_C\frac{e^z}{z(2z+1)^3}dz=\int_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(2z+1)^3}}{z}dz+\frac{1}{4}\int_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z}}{(z+\frac{1}{2})^3}dz$，……3 分

由柯西积分公式及柯西高阶导数公式，可得，

$$\oint_C \frac{e^z}{z(2z+1)^3}dz = 2\pi i\cdot\frac{e^z}{(2z+1)^3}\bigg|_{z=0} + \frac{1}{4}\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z}\right)''\bigg|_{z=-\frac{1}{2}}$$ ……………………………5 分

$$= 2\pi i - \frac{13\pi i}{4}e^{-\frac{1}{2}}.$$ …………………………………………………………7 分

六、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 为调和函数，并求一解析函 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且 $f(2)=-i.$

解　易求得，$\frac{\partial u}{\partial x}=2y, \frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，…………………………2分

显然，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故 $u(x,y)$ 是一个调和函数.……………………………………3分

设 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，则由柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2(x-1), \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2y,$$ ……………………………………………………5分

故 $v(x,y)=\int_{(0.0)}^{(x,y)} -2(x-1)dx+2ydy+C$ ……………………………………………7分

$$= y^2-x^2+2x+C.$$ ……………………………………………………………8分

由 $f(2)=-i.$ 知，$v(2,0)=-1$，故 C=-1,………………………………………………9 分

故 $f(z)=2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)=z^2-2z.$ ………………………………10 分

22. 求函数 $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}$ 以奇点中心的洛朗级数.

解 令 $(z^4+4)^4=0$，得奇点为 $z_1=-2i, z_2=2i.$ ……………………………………………1 分

故 $f(z)$ 可分别在以下邻域内展开成洛朗级数：（1）$0<|z+2i|<4$；（2）$4<|z+2i|<+\infty$（3）$0<|z-2i|<4$；（4）$4<|z-2i|<+\infty$.………………2 分

（1） 当$0<\left|z+2i\right|<4$时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z+2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z-2i)^2}$，

其中，$\dfrac{1}{(z-2i)^2}=-(\dfrac{1}{z-2i})'=-(\dfrac{1}{(z+2i)-4i})'=-(-\dfrac{1}{4i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z+2i}{4i}})'$

$=\dfrac{1}{4i}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4i)^n}(z+2i)^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{(4i)^{n+1}}(z+2i)^{n-1}$，

所以， $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{(4i)^{n+1}}(z+2i)^{n-3}$. 此时$0<\left|z+2i\right|<4$.……………………4 分

（2） 当$4<\left|z+2i\right|<+\infty$时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z+2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z-2i)^2}$，

其中，$\dfrac{1}{(z-2i)^2}=-(\dfrac{1}{z-2i})'=-(\dfrac{1}{(z+2i)-4i})'=-(\dfrac{1}{z+2i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{4i}{z+2i}})'$

$=-(\dfrac{1}{z+2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(4i)^n}{(z+2i)^n})'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(4i)^n}{(z+2i)^{n+2}}$，

所以， $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(4i)^n}{(z+2i)^{n+4}}$. 此时$0<\left|z+2i\right|<4$.…………………………6 分

（3） 当$0<\left|z-2i\right|<4$时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z-2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z+2i)^2}$，

其中，$\dfrac{1}{(z+2i)^2}=-(\dfrac{1}{z+2i})'=-(\dfrac{1}{(z-2i)+4i})'=-(\dfrac{1}{4i}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2i}{4i}})'$

$$=-\frac{1}{4i}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^n}(z-2i)^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4i)^{n+1}}(z-2i)^{n-1},$$

所以， $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{(4i)^{n+1}}(z+2i)^{n-3}$. 此时$0<\left|z-2i\right|<4$.…………………8 分

（4） 当$4<\left|z-2i\right|<+\infty$时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z-2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z+2i)^2}$，

装

订

线

其中，$\frac{1}{(z+2i)^2}=-(\frac{1}{z+2i})'=-(\frac{1}{(z-2i)+4i})' \quad =-(\frac{1}{z-2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{4i}{z-2i}})'$

$=-(\frac{1}{z+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4i)^n}{(z-2i)^n})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(4i)^n}{(z-2i)^{n+2}}$，

所以，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(4i)^n}{(z-2i)^{n+4}}$. 此时 $0<|z-2i|<4$.……………………10 分