装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2021 学年第 1 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号__________________姓名__________________年级专业____________________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评阅人						

得分	

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1．下列函数中，在整个复平面上解析的函数是 （ ）

A. x^2+iy^2； B. $z+\operatorname{Re} z$；

C. $x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$； D. $\tan z+e^z$.

2. 下列级数中，绝对收敛的级数为( )

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1-i)^n$； B. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1+3i}{3})^n$； C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}$； D. $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{i}{2^n}]$.

3. 下列不等式所表示的区域（闭区域）中，是单连通有界区域的是（ ）

A. $\bar{a}z+a\bar{z}+b<0$,其中 a 为复常数，b 为实常数； B. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$；

C. $\frac{\pi}{6}<arg\, z<\frac{\pi}{3}$，且$1<|z|<2$； D. $\operatorname{Re} z^2>1$.

4. 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n$在$z=1$处收敛，那么该级数在$z=-i$处的敛散性为( )

A．绝对收敛 B. 条件收敛

C．发散 D.不能确定

装

订

线

5. 设非常数函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $\overline{D}$ 内解析，则下列说法中不正确的是（　　）

A. 虚部 $v(x,y)$ 是实部 $u(x,y)$ 的共轭调和函数

B. 最大模能在区域 D 内取得;

C. $\oint_C f(z)dz=0$，其中 C 为区域 D 内的任意闭曲线;

D. 函数 $f'(z)$ 在区域 D 内解析.

得分	

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6. 因为 $-1<1$，所以 $-i<i$.　　　　（　　）

7. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\mathrm{Re}(f(z))$ 在 D 内是一常数，则 $f(z)$ 在 D 内是常函数.　　　　（　　）

8. 复变函数在奇点处不能展开成级数。　　　　（　　）

9. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}$ 是发散的.　　　　（　　）

10. 复变函数 $\sin z$ 在复平面上解析且有界。　　　　（　　）

得分	

三、**填空题**（本大题共 5小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11. 设复数 $z=-\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$，则 $\mathrm{Arg}z=$________________.

12. 设 $e^{z-1}=-3+4i$，则 $z=$___________________.

13. 设 c 为正向圆周 $|z|=2$，则 $\oint_c \frac{\sin\pi z}{(2z-1)^{2021}}dz=$____________________.

14. 已知 $z^4+a^4=0$，其中 $a>0$，则 $z=$____________________.

15. 函数 $f(z)=\frac{1}{z+i}e^{\frac{1}{z-2}}$ 在 $z=-1$ 处泰勒展开式的收敛半径 $R=$________________.

1.5CM

装

订

线

得分	

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16．已知 $z_1=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$， $z_2=3-i$，计算 z_1z_2 和 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 。

17． 证明函数 $f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$ 解析，并求出其导数 $f'(z)$.

18． 求积分 $\int_1^{1+i} z^2 e^z dz$.

19. 将函数$\sin^2 z$展开为z的幂级数，并指出其收敛域.

装

订

线

20. 将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{z-2}$ 在$z=0$处展开成级数。(包括泰勒级数和洛朗级数)

1.5CM

装

订

线

得分	

五、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ 为调和函数，并求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，使得 $f(1)=3-\frac{i}{2}$.

装

订

线

22. 计算积分$\oint_C \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz$，其中$C:|z|=2$.

装

订

线

1.5CM

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2021 学年第 1 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号________ 姓名________ 年级专业________

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、C；2、B；3、C；4、A；5、D。

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6、 ×；7、 √；8、√；9、×；10、 ×。

三、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、$\frac{27}{4}(1-i)$；12、 $\pi-\arg\tan 8$；13、0； 14、$e^{-\frac{\pi}{2}}$；

15、$z=\frac{1}{2}\ln 2+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16、设 $f(z)=\frac{1}{5}z^5-(1+i)z$，解方程 $f'(z)=0.$

解：$0=f'(z)=z^4-(1+i)$ . . . . **3 分**

$z=\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}),k=0,1,2,3$ . . . . **4 分**

17. 计算 $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.

解：$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-i)^2}$ . . . . **3 分**

$=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{-2i}=-\sqrt{3}-i$ . . . . **4 分**

18. 求积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$，从而证明 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.$

解：由柯西积分公式得

装

订

线

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i e^0=2\pi i,\cdots\cdots\cdots \quad \textbf{2 分}$$

在$|z|=1$上，$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ -\pi<\theta<\pi$

$$2\pi i=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta))}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta\cdots\cdots\cdots \quad \textbf{2 分}$$

$$=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta))d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)d\theta$$

$$=2i\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)d\theta\cdots\cdots\cdots \quad \textbf{2 分}$$

所以$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.\cdots\cdots\cdots$ **1 分**

19. 将函数$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$展开为z的幂级数，并指出其收敛域.

解：函数的奇点为$z=\pm i$，所以收敛域为$|z|<1$。$\cdots\cdots\cdots$ **2 分**

$$\frac{1}{(1+t)^2}=\left(\frac{-1}{1+t}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{n-1},|t|<1\cdots\cdots\cdots \quad \textbf{3 分}$$

令$t=z^2$,可得$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{2n-2},|z|<1\cdots\cdots\cdots$ **2 分**

20、计算积分 $\oint_C\dfrac{\sin(\pi z)}{(4z-1)(z-1)^2}dz$，其中$C$为以下曲线：$|z|=2$.

解：由柯西积分定理得

$$原式=2\pi i\int_{|z-1|=\frac12}\frac{\frac{\sin(\pi z)}{(4z-1)}}{(z-1)^2}dz+2\pi i\int_{|z-\frac14|=\frac12}\frac{\frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}}{(z-\frac14)}dz \quad \cdots\cdots\cdots \quad \textbf{2 分}$$

$$=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin(\pi z)}{(4z-1)}\right)'\Bigg|_{z=1}+\frac{2\pi i\sin(\pi z)}{4(z-1)^2}\Bigg|_{z=\frac14} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \textbf{2 分}$$

$$=2\pi i\left(\frac{\pi\cos(\pi z)(4z-1)-4\sin(\pi z)}{(4z-1)^2}\right)_{z=1}+\frac{4\sqrt{2}\pi i}{9} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \textbf{2 分}$$

1.5CM

装

订

线

$$=\frac{4\sqrt{2}\pi i}{9}-\frac{2\pi^2 i}{3}.$$ .... **1 分**

六、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $v(x,y)=e^x\cos y+x$ 为调和函数，并求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且 $f(0)=i.$

解：由柯西－黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \text{所以}\, u(x,y)=\int -e^x\sin y dx=-e^x\sin y+C(y)$$ .... **3 分**

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cos y-1,$$

另一方面

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y+C'(y),$$ .... **3 分**

所以 $C(y)=\int C'(y)dx=-y+C$

所以 $u(x,y)=-e^x\sin y-y+C.$ .... **2 分**

从而 $f(z)=-e^x\cos y-y+C+(e^x\cos y+x)i.$

又 $f(0)=C+i=i.$ 所以 $C=0$，从而 $f(z)=-e^x\cos y-y+(e^x\cos y+x)i.$ .... **2 分**

22、求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z-4}$ 在以 $z=1$ 为中心的洛朗级数.

解：$f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z-4}$ 的奇点为 $z=-1, z=4$，所以圆环为：$0<|z-1|<2$，$2<|z-1|<3$，$3<|z-1|<+\infty$。........ **2 分**

由于 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-4)}=\dfrac{1}{5}(\dfrac{1}{z-4}+\dfrac{1}{z+1}).$

（1）当 $0<|z-1|<2$ 时，因为 $\dfrac{1}{1-(z-1)}=\sum_{z=0}^{+\infty}(z-1)^n$, 故

装

订

线

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{z-1}{2}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{15}(\frac{z-1}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{10}(\frac{z-1}{2})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{5}(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})(z-1)^n\ \cdots\cdots\cdots\quad \textbf{3 分}$$

（2）当 $2<|z-1|<3$ 时，$\left|\frac{2}{z-1}\right|<1,\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$，所以，

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z-1}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{15}(\frac{z-1}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{5(z-1)}(\frac{2}{z-1})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{(-2)^n}{5}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\ \cdots\cdots\cdots\quad \textbf{3分}$$

（3）当 $3<|z-1|<+\infty$ 时，$\left|\frac{3}{z-1}\right|<1,$ 所以，

$$f(z)=\frac{1}{5(z-1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z-1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z-1}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5(z-1)}(\frac{3}{z-1})^n+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{5(z-1)}(\frac{2}{z-1})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3^n}{5}-\frac{(-2)^n}{5})\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\ \cdots\cdots\cdots\quad \textbf{2分}$$