装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2021 学年第 1 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号__________________姓名__________________年级专业____________________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评阅人						

得分	

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。

错选、多选或未选均无分。

1．下列函数中，在整个复平面上解析的函数是 （ ）

A. x^2+iy^2； B. $z+\mathrm{Re}\,z$；

C. $x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$； D. $\tan z+e^z$.

2. 下列级数中，绝对收敛的级数为（ ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(1-i)^n$； B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{-1+3i}{3})^n$； C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}$； D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{i}{2^n}]$.

3.下列不等式所表示的区域（闭区域）中，是单连通有界区域的是（ ）

A. $\bar{a}z+a\bar{z}+b<0$,其中 a 为复常数，b 为实常数； B. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$；

C. $\frac{\pi}{6}<arg\,z<\frac{\pi}{3}$，且$1<|z|<2$； D. $\mathrm{Re}\,z^2>1$.

4.若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n$ 在 $z=1$处收敛，那么该级数在 $z=-i$ 处的敛散性为（ ）

A．绝对收敛 B.条件收敛

C．发散 D.不能确定

5. 设非常数函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $\overline{D}$ 内解析，则下列说法中不正确的是（　　）

A. 虚部 $v(x,y)$ 是实部 $u(x,y)$ 的共轭调和函数

B. 最大模可能在区域 D 内取得；

C. $\oint_C f(z)dz=0$，其中 C 为区域 D 内的任意闭曲线；

D. 函数 $f'(z)$ 在区域 D 内解析.

得分	

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6. 因为 $-1<1$，所以 $-i<i$.　　（　　）

7. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $\mathrm{Re}(f(z))$ 在 D 内是一常数，则 $f(z)$ 在 D 内是常函数.　　（　　）

8. 复变函数在奇点处不能展开成级数。　　（　　）

9. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}$ 是发散的.　　（　　）

10. 复变函数 $\sin z$ 在复平面上解析且有界。　　（　　）

得分	

三、**填空题**（本大题共 5小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11. 设复数 $z=-\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$，则 $\mathrm{Arg}z=$________________.

12. 设 $\mathrm{e}^{z-1}=-3+4i$，则 $z=$___________________.

13. 设 c 为正向圆周 $|z|=2$，则 $\oint_c \frac{\sin\pi z}{(2z-1)^{2021}}dz=$____________________ .

14. 已知 $z^4+a^4=0$，其中 $a>0$，则 $z=$____________________ .

15. 函数 $f(z)=\frac{1}{z+i}e^{\frac{1}{z-2}}$ 在 $z=-1$ 处泰勒展开式的收敛半径 R=________________.

得分	

四、**计算题**（本大题共5小题，每题7分，共35分）

装

订

线

1.5CM

16．已知 $z_1=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$， $z_2=3-i$，计算 z_1z_2 和 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 。

17．求积分 $\int_1^{1+i} z^2 e^z dz$

18. 将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{z-2}$ 在 $z=0$ 处展开成洛朗级数。

19. 将函数 $\sin^2 z$ 展开为 z 的幂级数，并指出其收敛域.

20.证明函数 $f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$ 解析，并求出其导数 $f'(z)$.

得分	

五、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21．试证 $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ 为调和函数，并求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，使得 $f(1)=3-\dfrac{i}{2}$.

22．计算积分 $\oint_C \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz$，其中 $C:|z|=2$.

装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2021 学年第 1 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号__________________姓名__________________年级专业____________________

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、C；2、A；3、C；4、D；5、B。

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6、 ×；7、 √；8、×；9、×；10、 ×。

三、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、$Arg=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

12、 $z=1+\ln 5+i\left[(2k+1)\pi-\arg\dfrac{4}{3}\right],k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

13、$\dfrac{\pi^{2021}i}{2^{2020}(2020!)}$；

14、$z=a(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}),\ k=0,1,2,3$；

15、$R=\sqrt{2}$ 。

1.5CM

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16、

解：$z_1z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(3-i)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3+1-i+3i)=\sqrt{2}(2+i)$ . . . . **3 分**

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{(1+i)}{(3-i)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{1}{10\sqrt{2}}(3-1+i+3i)=\dfrac{\sqrt{2}(1+2i)}{10}$ . . . . **4 分**

装

订

线

17、 .

解：令 $u=e^{x}(x\cos y-y\sin y), v=e^{x}(y\cos y+x\sin y)$，**求偏导得**

$$u_x=e^{x}(x\cos y+\cos y-y\sin y)=v_y,$$
$$u_y=-e^{x}(y\cos y+x\sin y+\sin y)=-v_x \text{ ....} \quad \textbf{3 分}$$

所以 u,v 满足柯西-黎曼方程，且 u,v 的一阶偏导连续，所以 u,v 可微，由解析的充要条件知函数在复平面上解析。......... **2 分**

$$f'(z)=u_x+iv_x=e^{x}(x\cos y+\cos y-y\sin y)+ie^{x}(y\cos y+x\sin y+\sin y) \text{ ...} \quad \textbf{2 分}$$

18、
解：由柯西积分公式得

$$\int z^2e^zdz=\int z^2de^z=z^2e^z-2\int ze^zdz=z^2e^z-2\int zde^z$$
$$=z^2e^z-2[ze^z-\int e^zdz]=(z^2-2z+2)e^z \text{ ,.........} \quad \textbf{4 分}$$

由牛顿-莱布尼兹公式得

$$\int_1^{1+i} z^2e^zdz=(z^2-2z+2)e^z\Big|_1^{1+i}=-e \text{ ....} \quad \textbf{3 分}$$

19、
解：

$$\sin^2 z=\frac{1-\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2z}{2} \text{ ....} \quad \textbf{3 分}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}, |z|<+\infty \text{ ....} \quad \textbf{4 分}$$

20、解：$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{z-2}$ 的奇点为 $z=2$，所以收敛圆为：$|z|<2$；圆环为：

$0<|z|<2$，$2<|z|<+\infty$。........ **2 分**

由于 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{z-2}=z+\dfrac{5}{z-2}$

（1）当 $|z|<2$ 时，有

装

订

线

1.5CM

$$f(z)=z-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2}(\frac{z}{3})^n=-\frac{5}{2}+\frac{1}{6}z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{2\cdot 3^n}\cdot z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{5}(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})(z-1)^n \text{ ....} \quad \textbf{2 分}$$

（2）当 $0<|z|<2$ 时，故

$$f(z)=z-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2}(\frac{z}{3})^n=-\frac{5}{2}+\frac{1}{6}z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{2\cdot 3^n}\cdot z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{5}(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})(z-1)^n \text{ ....} \quad \textbf{1 分}$$

（3）当 $2<|z|<+\infty$ 时，$\left|\frac{2}{z}\right|<1,$ 所以，

$$f(z)=z+\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{z}(\frac{2}{z})^n=z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot 2^n}{z^{n+1}}=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 2^{n-1}}{z^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3^n}{5}-\frac{(-2)^n}{5})\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \text{ ....} \quad \textbf{2分}$$

五、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21、

证明：$u_{xx}+u_{yy}=2-2=0$，所以 $u(x,y)$ 为调和函数。 ...... **2 分**

解：由柯西一黎曼方程得

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2,$ 所以 $v(x,y)=\int(2x+2)dy=2xy+2y+C(x)$ ...... **3 分**

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y,$$

另一方面

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+C'(x),$$

所以 $C(x)=\int C'(x)dx=C$ …… **3 分**

所以 $v(x,y)=2y+2xy+C.$

从而 $f(z)=x^2-y^2+2x+(2y+2xy+C)i.$

又 $f(1)=3+Ci=3-\frac{i}{2}.$　所以 $C=-\frac{1}{2}$，

从而 $f(z)=x^2-y^2+2x+(2y+2xy-\frac{1}{2})i$ … **2 分**

22、解：由复合闭路定理得

$$\text{原式}=\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{z^2}{(z+1)}}{(z-1)^2}dz+\int_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{z^2}{(z-1)^2}}{(z+1)}dz$$ …… **3 分**

$$=2\pi i\left(\frac{z^2}{(z+1)}\right)'\Bigg|_{z=1}+\frac{2\pi i\cdot z^2}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=-1}$$ …… **4 分**

$$=\frac{6\pi i}{4}+\frac{2\pi i}{4}=2\pi i$$ …… **3 分**