一、选择题（每题 3 分，15 题，共 45 分）

1. 使得$z^2=|z|^2$成立的复数z是（　　）

（A）实数　　（B）纯虚数　　（C）唯一的　　（D）不存在的

2. 满足不等式$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\le 1$的所有点$z$构成的集合是（　　）

（A）有界区域　　（B）无界区域　　（C）有界闭区域　　（D）无界闭区域

3. 当$z=\frac{1+i}{1-i}$时，$z^{2022}+z^{1011}+z^{101}$的值等于（　　）

（A）1　　（B）-1　　（C）i　　（D）$-i$

4. $e^{\bar{z}}$在复平面上（　　）

（A）无可导点　　（B）有可导点，但不解析

（C）有可导点，且在可导点集上解析　　（D）处处解析

5. 下列数中，为实数的是（　　）

（A）$(1-i)^3$　　（B）$\cos i$　　（C）$\ln i$　　（D）$e^{3-\frac{\pi}{2}i}$

6. 设α为任意实数，则1^{α}（　　）

（A）无定义　　（B）等于 1

（C）是复数，其实部等于 1　　（D）是复数，其模等于 1

7. 设$v(x,y)$在区域D内为$u(x,y)$的共轭调和函数，则下列函数中为D内解析函数的是（　　）

（A）$v(x,y)+iu(x,y)$　　（B）$v(x,y)-iu(x,y)$

（C）$u(x,y)-iv(x,y)$　　（D）$\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}$

8. 设$c_1:|z|=1$为负向，$c_2:|z|=3$正向，则$\oint_{c=c_1+c_2}\frac{\sin z}{z^2}dz=$（　　）

（A）$-2\pi i$　　（B）0　　（C）$2\pi i$　　（D）$4\pi i$

9. 设c为正向圆周$|z|=2$，则$\oint_c\frac{\cos z}{(\pi-2z)^2}dz=$（　　）

（A）$-\frac{\pi i}{2}$　　（B）$\frac{\pi i}{2}$　　（C）$-2\pi i$　　（D）$2\pi i$

10. 设c是从0到$1+\frac{\pi}{2}i$的直线段，则积分$\int_c ze^z dz=$（　　）

（A）$1-\frac{\pi e}{2}$　　（B）$-1-\frac{\pi e}{2}$　　（C）$1+\frac{\pi e}{2}i$　　（D）$1-\frac{\pi e}{2}i$

11. 设$a_n=\frac{(-1)^n+ni}{n+4}\ (n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（　　）

（A）等于0　　（B）等于1　　（C）等于i　　（D）不存在

12. 下列级数中，条件收敛的级数为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1+3i}{2})^n$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{n!}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{\sqrt{n+1}}$

13. 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$在$z=1+2i$处收敛，那么该级数在$z=-2$处的敛散性为（　　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）不能确定

14. 设函数$\frac{e^z}{\cos z}$的泰勒展开式为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，那么幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径$R=$（　　）

（A）1　　（B）$\frac{\pi}{2}$　　（C）π　　（D）$+\infty$

15. 函数$\sin z$，在$z=\frac{\pi}{2}$处的泰勒展开式为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}\quad(\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n}\quad(\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}\quad(\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n}\quad(\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

二、填空题（每题 3 分，5 题，共 15 分）

1. 设 $f(0)=1, f'(0)=1+i$，则 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-1}{z}=$________________________.

2. 设 $z=\dfrac{(3-4i)(2-i)(3-i)}{(3+i)(2+i)}$，则 $|z|=$__________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=3$，则 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\mathrm{d}z=$ ____________________.

4. 设函数 $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$，则 $f'(-1+i)=$ ________________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{n-1}{n})^{n^2}z^n$ 的收敛半径 $R=$______________________.

三. 计算题（共 3 题，共计 20 分）

1. 解方程 $\sin z+i\cos z=4i$.（6 分）

2. 求函数 $\dfrac{1}{(z+1)^2}$ 在 $z=1$ 的邻域内的泰勒展开式，并指出其收敛域.（7 分）

3. 设 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，试计算积分

$$\oint_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz.$$（7 分）

四. 综合题（共 2 题，共计 20 分）

1. 设 $u(x,y)=\mathrm{e}^{px}\cos y+x$，求 p 的值使 $u(x,y)$ 为调和函数。并求出解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.（10 分）

2. 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $z=0$ 处的洛朗级数展开式.（10 分）