装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2023-2-2024 学年第 2 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** 120 **分钟**

学号__________姓名__________年级专业__________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评阅人						

得分	

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。

1．在下列命题中，一定正确的是（　　）

A. $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ $(a,b,c$**都是非零复数**$)$；　**B.** $\mathbf{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathbf{Arg}z_1 + \mathbf{Arg}z_2$；

C. 因为$3>2$, 所以$3+i>2+i$；　D.$|\sin z| \le 1$.

2. 下列不等式中，表示**有界单连通区域**的是（　　）

A. $\mathbf{2}<|z|<\mathbf{3}$；　B. $\left|\frac{1}{z}\right| \le 2$；

C. $\operatorname{Im} z>1$且$|z|<2.$；　D. $\operatorname{Re}(z^2)<1$

3. 积分 $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(1-2z)^{2024}} dz$ 等于（　　）

A．$\dfrac{-2\pi i \cos\frac{1}{2}}{\mathbf{2^{2024} \cdot 2023\,!}}$ ；　B．$\dfrac{2\pi i \sin\frac{1}{2}}{\mathbf{2^{2024} \cdot 2024!}}$；　C．$-2\pi i \cos\frac{1}{2}$；　D．$2\pi i \sin\mathbf{\frac{1}{2}}$

4. 下列级数中，条件收敛的级数为(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} i^n$；　B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^{\frac{4}{3}}}$；　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + i\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$；　D. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{e}^{-i\sqrt{n}}$.

5.若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+i)^n$在$z=1$处收敛，则该级数在$z=\mathbf{1-i}$处的敛散性为(　　)

A.绝对收敛；　B.条件收敛；

装

订

线

1.5CM

C. 发散；　　　　　　　　　　D. 不能确定.

得分	

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每题 2 分，共 10 分）. 对的打 √，错的打×.

6. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $-u(x,y)$ 是 $v(x,y)$ 的共轭调和函数.　　（　　）

7. 设 $f(z)=\mathbf{e}^{x}\cos y+x+i(\mathbf{e}^{x}\sin y+y)$，则 $f(z)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上解析.　　（　　）

8. $\mathbf{Ln}z^{n}=n\mathbf{Ln}z,\ \ n\in\mathbb{N}$.　　（　　）

9. 积分 $\oint\limits_{|z-1|=1}(z-1)^{n}\,\mathbf{d}z,\ \forall n\in\mathbf{Z}$ 的值与半径的大小无关.　　（　　）

10. 幂级数在收敛圆内可能有发散点。　　（　　）

得分	

三、**填空题**（本大题共5小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11. 已知 $z=\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$，则 $\arg z=$_______________.

12. $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}}$ 的根为__________________ .

13. 设 C 为曲线 $z=t+\ i\ t^{3}$ 上从 0 到 $1+i$ 的弧段，则 $\int_{0}^{1+i}(3\mathrm{e}^{z}-2z)\,\mathrm{d}z=$______________.

14. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^{2}}z^{n}$ 的收敛半径等于________________________.

15. **求值：**$(1-i)^{4i}$ =______________________.

得分	

四、计算题（本大题共5小题，每题8分，共40分）

16. 设 $f(z)=e^{iz}+(1+i)z$，解方程 $f'(z)=0$.

装

订

线

17. 讨论函数 $f(z)=z^2\operatorname{Re}z$ 的可导性与解析性，如果可导，求出 $f'(z)$.

18. 设曲线 C 为从原点沿 $y^2=x$ 到 $1+i$ 的弧段，求曲线积分 $\int_C(x+iy^2)\mathbf{d}z$.

19. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ 在圆环域 $0<|z+i|<2$ 内展开成洛朗级数.

装

订

线

20. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R(R>1)$ 内解析， 且 $f(0)=1$， $f'(0)=2$，求积分

$\oint_C \dfrac{(z+1)^2 f(z)}{z^2}\mathbf{d}z$，其中 $C:|z|=1$ 的正向.

1.5CM

装

订

线

得分	

五、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $v(x,y)=-e^{-x}\sin y+2xy$ 为调和函数，并求一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且 $f(0)=1$.

装

订

线

22. 对复数a进行分情况讨论，将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z-a)}$ 展开为z的泰勒级数.

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2023 学年第 2 学期　考试科目： 复变函数与积分变换

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、B；2、C；3、A；4、C；5、A。

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）.

6、 √；7、 √；8、×；9、√；10、 ×。

三、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、 $\frac{2}{3}\pi$.；12、 $2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi)}$ ，$k=0,1,2.$ ；13、$3e\cos1-3+i(3e\sin1-2)$ ；14、**e**；

15、$e^{\pi+8k\pi}[\cos(2\ln2)+i\sin(2\ln2)]$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

四、计算题（本大题共5小题，每题8分，共40分）

16、解：$\because\ 0=f'(z)=ie^{iz}+(1+i),$ ……………**2 分**

$\therefore e^{iz}=-\frac{1+i}{i}=i(1+i)=-1+i,$ ……………**3 分**

$iz=Ln(-1+i)=\ln\sqrt{2}+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)$ ……………**5 分**

$z=-i\ln\sqrt{2}+(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)=(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)-i\frac{\ln2}{2}.$ ……………**8 分**

17. 设 $z=x+iy$，则 $f(z)=z^2\operatorname{Re}z=(x^3-xy^2)+i2x^2y$，……………1 分

令 $u(x,y)=(x^3-xy^2),v(x,y)=2x^2y,$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=-2xy,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=4xy,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=2x^2,$ ……………3 分

令 $3x^2-y^2=2x^2,-2xy=-4xy,$

解得 $x=y=0,$ ……………5 分

即 $f(z)$ 在 $z=0$ 可导，故在复平面上处处不解析， ……………6 分

且 $f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z=0}=0.$ ……………8 分

18. 解：设曲线 C 的参数方程为：$z(y)=y^2+iy,y:0\to1,$ ……………2分

故 $\mathbf{d}z=(2y+i)\mathbf{d}y$， ……………………………3 分

所以，$\int_C (x+iy^2)\mathbf{d}z=\int_0^1 (y^2+iy^2)(2y+i)\mathbf{d}y$ ……………………………5 分

$=(1+i)\int_0^1 (2y^3+iy^2)\mathbf{d}y$ ……………………………6 分

$==\frac{1}{6}+i\frac{5}{6}.$ ……………………………8 分

19. 因为 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\frac{1}{(z-i)^2}=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot(\frac{1}{i-z})'$ ， ………………………2分

又因为，当$0<|z+i|<2$时，$\frac{1}{i-z}=\frac{1}{2i-(z+i)}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}}$

$=\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z+i}{2i})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n,$ ……………………………5分

故 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n]'=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2i)^{n+1}}(z+i)^{n-1}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2i)^{n+1}}(z+i)^{n-3}$，其中$0<|z+i|<2$. ……………………………8分

20. 显然$F(z)=(z+1)^2 f(z)$在C内解析，……………………………1分

由柯西高阶导数公式有，

$\int_C \frac{(z+1)^2 f(z)}{z^2}\mathbf{d}z=\frac{2\pi i}{1!}\cdot[(z+1)^2 f(z)]'\big|_{z=0}$ ……………………………3分

$=\frac{2\pi i}{1!}\cdot[2(z+1)f(z)+(z+1)^2 f'(z)]\big|_{z=0}$ ……………………………5分

$=2\pi i(2f(0)+f'(0))=8\pi i.$ ……………………………8分

六、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 解: 易求得，$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}\sin y+2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-x}\cos y+2x,$,

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-e^{-x}\sin y,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^{-x}\sin y$ ，……………………………………………2分

显然，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，故$v(x,y)$是一个调和函数.……………………………3分

由于$v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数，则由柯西-黎曼方程

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-e^{-x}\cos y+2x, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^{-x}\sin y-2y,$ ……………………5分

故 $u(x,y)=\int_{(0.0)}^{(x,y)}(-e^{-x}\cos y+2x)dx+(-e^{-x}\sin y-2y)dy+C$ ……………7分

$=e^{-x}\cos y+x^2-y^2-1+C.$ ………………………………………8分

由 $f(0)=1.$知，$u(0,0)=1$，故 C=1,……………………………………………9 分

故 $f(z)=(e^{-x}\cos y+x^2-y^2)+i(-e^{-x}\sin y+2xy)=e^{-z}+z^2.$…………10 分

22. 解： 当$a=0$时，$f(z)$不能展开为泰勒级数。故$a\neq 0$.

当$a\neq i$时，因为$f(z)=\dfrac{1}{i-a}(\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z-a}),$ ……………………2 分

且 $\dfrac{1}{z-i}=-\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{i}}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{i^{n+1}}z^n,\quad |z|<1;$ ………………………………3 分

$\dfrac{1}{z-a}=-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{a}}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{a^{n+1}}z^n,\quad |z|<|a|;$ ………………………………4 分

所以，当$|a|<1$时，$f(z)=\dfrac{1}{i-a}(\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z-a})$

$=\dfrac{1}{i-a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\dfrac{1}{a^{n+1}}-\dfrac{1}{i^{n+1}})z^n,\quad |z|<|a|;$ ………………………………………5 分

当$|a|>1$时，$f(z)=\dfrac{1}{i-a}(\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z-a})$

$=\dfrac{1}{i-a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\dfrac{1}{a^{n+1}}-\dfrac{1}{i^{n+1}})z^n,\quad |z|<1;$ ………………………………………6 分

当$a=i$时，因为$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2}=(\dfrac{1}{i-z})'$ ……………………………………8 分

$=(\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{i}})'=(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{i^{n+1}}z^n)'$……………………………………………………9 分

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{i^{n+1}}z^{n-1}.$……………………………………………………………10 分

装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2023 学年第 2 学期　考试科目： 复变函数与积分变换

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、B；2、C；3、A；4、C；5、A。

二、**判断题**（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）.

6、 √；7、 √；8、×；9、√；10、 ×。

三、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、 $\frac{2}{3}\pi$.；12、 $2e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$，$k=0,1,2.$ ；13、$3e\cos 1-3+i(3e\sin 1-2)$ ；14、**e**；

15、$e^{\pi+8k\pi}[\cos(2\ln 2)+i\sin(2\ln 2)\}$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

1.5CM

四、计算题（本大题共5小题，每题8分，共40分）

16、解：$\because\ 0=f'(z)=ie^{iz}+(1+i),$ ……………**2 分**

$\therefore e^{iz}=-\frac{1+i}{i}=i(1+i)=-1+i,$ ……………**3 分**

装

订

线

$iz = Ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$ ……………………**5 分**

$z = -i\ln\sqrt{2} + (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) = (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) - i\frac{\ln 2}{2}.$ ………………**8 分**

17. 设 $z = x + iy$，则 $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z = (x^3 - xy^2) + i2x^2y$，………………………1 分

令 $u(x,y) = (x^3 - xy^2), v(x,y) = 2x^2y,$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 4xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2,$ ……………………………3 分

令 $3x^2 - y^2 = 2x^2, -2xy = -4xy,$

解得 $x = y = 0,$ ……………………………5 分

即 $f(z)$ 在 $z = 0$ 可导，故在复平面上处处不解析， ……………………………6 分

且 $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z=0} = 0.$ ……………………………8 分

18. 解：设曲线 C 的参数方程为：$z(y) = y^2 + iy, y: 0 \to 1,$ ……………………………2分

故 $\mathbf{d}z = (2y + i)\mathbf{d}y$， ……………………………3 分

所以，$\int_C (x + iy^2)\mathbf{d}z = \int_0^1 (y^2 + iy^2)(2y + i)\mathbf{d}y$ ……………………………5 分

$= (1+i)\int_0^1 (2y^3 + iy^2)\mathbf{d}y$ ……………………………6 分

$= = \frac{1}{6} + i\frac{5}{6}.$ ……………………………8 分

19. 因为 $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2} = \frac{1}{(z+i)^2} \cdot (\frac{1}{i-z})'$ ，……………………2分

又因为，当 $0 < |z+i| < 2$ 时，$\frac{1}{i-z} = \frac{1}{2i - (z+i)} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+i}{2i}}$

$= \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{z+i}{2i})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n,$ ……………………………5分

装

订

1.5CM 线

故 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n]'=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2i)^{n+1}}(z+i)^{n-1}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2i)^{n+1}}(z+i)^{n-3}$，其中 $0<|z+i|<2$. ……………………………8分

20. 显然 $F(z)=(z+1)^2 f(z)$ 在C内解析，………………………………1分

由柯西高阶导数公式有，

$\int_C \frac{(z+1)^2 f(z)}{z^2}\mathbf{d}z=\frac{2\pi i}{1!}\cdot[(z+1)^2 f(z)]'\Big|_{z=0}$ ……………………………3分

$=\frac{2\pi i}{1!}\cdot[2(z+1)f(z)+(z+1)^2 f'(z)]\Big|_{z=0}$ ………………………………5分

$=2\pi i(2f(0)+f'(0))=8\pi i.$ ………………………………8分

七、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 解 易求得，$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}\sin y+2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-x}\cos y+2x,$，

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-e^{-x}\sin y,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^{-x}\sin y$，…………………………………………2分

显然，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，故 $v(x,y)$ 是一个调和函数.………………………………3分

由于 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，则由柯西-黎曼方程

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-x}\cos y+2x,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-x}\sin y-2y,$ ……………………5分

故 $u(x,y)=\int_{(0.0)}^{(x,y)}(-e^{-x}\cos y+2x)dx+(-e^{-x}\sin y-2y)dy+C$ ……………7分

$=e^{-x}\cos y+x^2-y^2-1+C.$ …………………………………………8分

由 $f(0)=1.$ 知，$u(0,0)=1$，故 $C=0$,…………………………………………9 分

故 $f(z)=(e^{-x}\cos y+x^2-y^2-1)+i(-e^{-x}\sin y+2xy)=e^{-z}+z^2-1.$ ……10 分

22. 解： 当 $a=0$ 时，$f(z)$ 不能展开为泰勒级数。故 $a\neq 0$.

当 $a\neq i$ 时，因为 $f(z)=\frac{1}{i-a}(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z-a}),$ ……………………2 分

且 $\dfrac{1}{z-i}=-\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{i}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{i^{n+1}}z^n,\quad |z|<1;$ ……………………………3 分

$\dfrac{1}{z-a}=-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{a}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{a^{n+1}}z^n,\quad |z|<|a|;$ ……………………………………4 分

所以，当$|a|<1$时，$f(z)=\dfrac{1}{i-a}(\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z-a})$

$=\dfrac{1}{i-a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\dfrac{1}{a^{n+1}}-\dfrac{1}{i^{n+1}})z^n,\quad |z|<|a|;$ ……………………………………5 分

当$|a|>1$时，$f(z)=\dfrac{1}{i-a}(\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z-a})$

$=\dfrac{1}{i-a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\dfrac{1}{a^{n+1}}-\dfrac{1}{i^{n+1}})z^n,\quad |z|<1;$ ……………………………………6 分

当$a=i$时，因为

$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2}=(\dfrac{1}{i-z})'$ ……………………………………………8 分

$=(\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{i}})'=(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{i^{n+1}}z^n)'$ ……………………………………9 分

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{i^{n+1}}z^{n-1}.$ ……………………………………………………………10 分

装

订

线