诚信考试，诚信做人。

华南农业大学期末考试试卷（A卷）

2024-2-2025 学年第 2 学期 **考试科目：** 复变函数与积分变换

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号__________姓名__________年级专业__________是否重修______

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
评阅人						

得分	

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）每题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在题后的括号内。

1．在下列命题中，一定正确的是（ ）

A. $z^{ab}=\left(z^{a}\right)^{b}$，$a,b$ 为复常数； B. $\overline{p(z)}=p\left(\bar{z}\right)$,其中 $p(z)$ 为复多项式；

C. 设 $z=x+\mathrm{i}y\ (x>0)$, 则 $\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}$； D. $\mathrm{Ln}\,z^{n}=n\mathrm{Ln}z$，$n\in\mathbb{N}$.

2. 设$f(z)=x^3+i\,y^3$，则 $f'(1-i)=$（ ）

A. 3； B. $3+i$； C. $1+i$； D. $3+3i$.

3. 下列不等式所确定的集合中, 是单连通有界区域的是（ ）

A. $\left|\frac{1}{z}\right|<2$； B. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$；

C. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, 且 $1<\mathrm{Im}\,z<2$； D. $\mathrm{Re}\,z^2<4$.

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z+\mathrm{i})^n$ 在点 $z=2\mathrm{i}$ 收敛，则该级数在点$z=-1-i$的敛散性为（ ）.

A. 绝对收敛； B. 条件收敛 ； C. 发散； D. 不能确定.

5. 下列说法中**不是**“函数 $f\left(z\right)=u+iv$ 在单连通区域 D 内解析”的充要条件的是（ ）

A. u，v在区域 D 内可微，且满足 C−R 方程.；

B. $\oint_C f(z)dz=0,C$为D内任意一条封闭曲线.

C. $f(z)$ 在区域 D 内任意一点可以表示成泰勒级数；

D. u，v在区域 D 内有一阶连续偏导，且满足 C−R 方程.

得分	

二、**填空题**（本大题共 5小题，每小题 3 分，共 15 分）.

1. 设 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$，则 $z^{2025}=$________________.

2. 计算 $(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}=$____________________.

3. 设C为圆周$\left|z-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$上沿逆时针方向从0到i的曲线，则$\int_C z\cdot \sin z\,\mathrm{d}z=$____________.

4. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$的收敛半径 $R=$ __________________ .

5. 设 $f(t)=\begin{cases}-2, -2<t<0, \\ 2,\ \ 0<t<2, \\ 0,\ \ 其他\end{cases}$ 则 $f(t)$的傅立叶变换为______________________.

得分	

1.5CM

三、**计算题**（本大题共 6 小题，每题 8 分，共 48 分）

1．解方程$(1+z)^5=(1-z)^5$.

2. 判断下列级数是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{\ln(n+2)}\right)^n$ ； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\sin 2}{3\mathrm{i}}\right)^n$.

3. 设曲线C为从单位圆周$|z-1|=3$（按逆时针方向），求曲线积分$\int_C \frac{\bar{z}}{|z-1|}\mathbf{d}z$.

4. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(2+\mathrm{i})z+2\mathrm{i}}$ 在点 $z=\mathrm{i}$ 展开成泰勒级数，并指出其收敛域.

5. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且$\left|f\left(z\right)\right|$为常数，试求函数 $f(z)$.

6. 计算积分$\oint_C \dfrac{\sin z}{(4z-\pi)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$，其中 C 为圆周$|z|=3$，沿逆时针方向.

得分	

1.5CM

五、**综合题**（共 2 小题，每题 11 分，共 22 分）

1. 试证 $u(x,y)=(x-1)\mathrm{e}^{x}\cos y-y\,\mathrm{e}^{x}\sin y$ 为调和函数，并求解析函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，且满足 $f(1)=0$.

2. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$ 在 $z=0$ 展开为洛朗级数.

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）答案

2024 学年第 2 学期　考试科目：复变函数与积分变换

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、C；2、D；3、C；4、A；5、C.

二、判断题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

6、×；7、×；8、×；9、×；10、×.

三、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）.

11、$\frac{3}{2}$；12、$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$；13、$(1-\sin 1-\cos 1)+i(\cos 1-\sin 1)$；14、$\frac{1}{2}$；

15、$\frac{1}{2}\ln 2+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)$。

1.5CM

四、计算题（本大题共5小题，每题7分，共35分）

16. 设 $f(z)=\frac{1}{3}z^3-2iz^2-(4-9i)z$，解方程 $f'(z)=0.$

解：因为 $f'(z)=z^2-4iz-(4-9i)=(z-2i)^2+9i,$ ……2 分

所以，$f'(z)=0,$ 即 $(z-2i)^2=-9i=9e^{-\frac{\pi}{2}i}$，……4 分

故　$z=2i+3e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}i}, k=0,1,$ ……6 分

其中，$z_1=2i+3e^{\frac{-\pi}{4}i}, z_2=2i+3e^{\frac{3}{4}i}.$ ……7 分

17. 判断函数 $f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$ 的可导性和解析性.

解：设 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y), v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y),$

易得 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(\cos y+x\cos y-y\sin y), \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y),$ 2 分

$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y), \frac{\partial u}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y),$ ……4 分

显然，u,v 具有一阶连续偏导，

且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$ 满足柯西-黎曼方程，……6 分

故 $f(z)$在复平面上处处可导，因此处处解析， $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

且 $=e^x(\cos y+x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y+\sin y).$ ……………7 分

18. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$的收敛域，并求出收敛域内的和函数.

解 由于$c_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$，故$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right|=1,$ ……………………2 分

所以, 收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1,$故收敛域为$\{z\mid |z|<1\}$.………………………………3 分

设 $s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z z^n dz$ ……………………………………5 分

$=\int_0^z(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n)dz=\int_0^z\frac{1}{1+z}dz=\ln(1+z)$.……………………………………7 分

19. 将函数$\sin^2 z$在$z=0$处展开成泰勒级数，并指出其收敛域.

解 因为 $\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}$ …………………………4 分

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$,…………………………………………………6 分

其中, $|2z|<+\infty$,即 $|z|<+\infty$.…………………………………………………7 分

20. 求积分$\oint_C\frac{e^z}{z(2z+1)^3}dz$，其中$C:|z|=1$的正向.

解 易知$z_1=0, z_2=-\frac{1}{2}$是被积函数的奇点,且在C内，…………………………1 分

分别以z_1, z_2作$C_1:|z|=\frac{1}{3}, C_2:\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$，取正向，…………………………2 分

由柯西积分定理，$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(2z+1)^3}dz = \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(2z+1)^3}}{z}dz + \frac{1}{4}\int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z+\frac{1}{2})^3}dz$，……3 分

由柯西积分公式及柯西高阶导数公式，可得，

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(2z+1)^3}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{(2z+1)^3}\right|_{z=0} + \frac{1}{4}\frac{2\pi i}{2!}\left.(\frac{e^z}{z})''\right|_{z=-\frac{1}{2}}$$ ……………………………5 分

$$= 2\pi i - \frac{13\pi i}{4}e^{-\frac{1}{2}}.$$ …………………………………………………………7 分

1.5CM

六、综合题（共 2 小题，每题 10 分，共 20 分）

21. 试证 $u(x,y) = 2(x-1)y$ 为调和函数，并求一解析函 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，且 $f(2) = -i.$

解　易求得，$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x-1)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，…………………………2分

显然，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，故 $u(x,y)$ 是一个调和函数.……………………………………3分

设 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，则由柯西-黎曼方程

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-1), \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y,$ ……………………………………………………………5分

故　$v(x,y) = \int_{(0.0)}^{(x,y)} -2(x-1)dx + 2ydy + C$ ……………………………………………………7分

$= y^2 - x^2 + 2x + C.$ ……………………………………………………………………………8分

由　$f(2) = -i.$ 知，$v(2,0) = -1$，故 C=-1,……………………………………………………9 分

故　$f(z) = 2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x) = z^2 - 2z.$ ………………………………………10 分

22. 求函数　$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$　以奇点中心的洛朗级数.

解 令 $(z^4+4)^4=0$，得奇点为 $z_1=-2i, z_2=2i.$ ··1 分

故 $f(z)$ 可分别在以下邻域内展开成洛朗级数：（1）$0<|z+2i|<4$；（2）

$4<|z+2i|<+\infty$ （3）$0<|z-2i|<4$；（4）$4<|z-2i|<+\infty$.··················2 分

（1） 当 $0<|z+2i|<4$ 时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z+2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z-2i)^2}$,

其中，$\dfrac{1}{(z-2i)^2}=-(\dfrac{1}{z-2i})'=-(\dfrac{1}{(z+2i)-4i})'=-(-\dfrac{1}{4i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z+2i}{4i}})'$

$=\dfrac{1}{4i}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4i)^n}(z+2i)^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{(4i)^{n+1}}(z+2i)^{n-1}$,

所以， $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{(4i)^{n+1}}(z+2i)^{n-3}$. 此时 $0<|z+2i|<4$.························4 分

（2） 当 $4<|z+2i|<+\infty$ 时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z+2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z-2i)^2}$,

其中，$\dfrac{1}{(z-2i)^2}=-(\dfrac{1}{z-2i})'=-(\dfrac{1}{(z+2i)-4i})'=-(\dfrac{1}{z+2i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{4i}{z+2i}})'$

$=-(\dfrac{1}{z+2i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(4i)^n}{(z+2i)^n})'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(4i)^n}{(z+2i)^{n+2}}$,

所以， $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(4i)^n}{(z+2i)^{n+4}}$. 此时 $0<|z+2i|<4$.·····························6 分

（3） 当 $0<|z-2i|<4$ 时， $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}=\dfrac{1}{(z-2i)^2}\cdot\dfrac{1}{(z+2i)^2}$,

其中，$\dfrac{1}{(z+2i)^2}=-(\dfrac{1}{z+2i})'=-(\dfrac{1}{(z-2i)+4i})'=-(\dfrac{1}{4i}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2i}{4i}})'$

$$=-\frac{1}{4i}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^n}(z-2i)^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4i)^{n+1}}(z-2i)^{n-1},$$

所以， $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4i)^{n+1}}(z+2i)^{n-3}$. 此时 $0<|z-2i|<4$.…………………8 分

（4） 当 $4<|z-2i|<+\infty$ 时， $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}=\frac{1}{(z-2i)^2}\cdot\frac{1}{(z+2i)^2}$，

其中， $\frac{1}{(z+2i)^2}=-(\frac{1}{z+2i})'=-(\frac{1}{(z-2i)+4i})'=-(\frac{1}{z-2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{4i}{z-2i}})'$

$=-(\frac{1}{z+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4i)^n}{(z-2i)^n})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(4i)^n}{(z-2i)^{n+2}}$，

所以， $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(4i)^n}{(z-2i)^{n+4}}$. 此时 $0<|z-2i|<4$.……………………10 分