# 课件PPT+作业题目

# 第一部分 复变函数

## 一、复数及其运算（18）

1. 计算：$3i^5-2i^2+4i^{4k+3}$.

2. 实数 $m$ 取何值时，$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是实数、纯虚数.

3. 计算共轭复数乘积：$(x+yi)(x-yi)$.

4. 计算：$(\frac{1-i}{1+i})^7$.

5. 计算：$\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.

6. 设 $z_1=5-5i,z_2=-3+4i$，求 $\frac{z_1}{z_2}$.

7. 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $Re(z),Im(z),z\cdot\overline{z}$.

8. 计算：$e^{i\pi}$.

9. 将 $\sqrt{3}$ +i 化为三角形式、指数形式.

10. 将 $z=-\sqrt{12}-2$i、$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$化为三角、指数形式.

11. 设 $z_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i),z_2=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$，求 $z_1z_2,\frac{z_1}{z_2}$.

12. 求 $1-i$ 的立方根.

13. 计算 $n$ 次单位根.

14. 计算 $\sqrt[4]{1+i}$.

15. 设 $z=-3+2i$，求其辐角主值 $\arg z$ 和辐角 $Argz$.

16. 判断下列复数在复平面上的位置：

17. （1）$z=1$；（2）$z=1+2i$；（3）$z=-2i$；（4）$z=1-2i$；（5）$z=-1$；（6）$z=-1-2i$；（7）$z=2i$；（8）$z=-1+2i$

18. 判断下列结论是否正确？

（1）$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$；

（2）$|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|$；

（3）$|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$；

（4）$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}(z_2\neq 0)$；

(5) $2i < 3i$；

(6) $z_1 = z_2 = \overline{z_1} - \overline{z_2}$；

(7) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$；

(8) $(\overline{\frac{z_1}{z_2}}) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} (z_2 \neq 0)$

## 二、复变函数、极限与连续性（3）

1. 判断极限：$\lim\limits_{z \to 0} \frac{zRe(z)}{|z|}$是否存在.

2. 判断极限：$\lim\limits_{z \to 0} \frac{Re(z^2)}{|z|^2}$是否存在.

3. 讨论函数 arg z 的连续性.

## 三、复变函数的导数与解析性（13）

1. 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

2. 求 $f(z) = z^n$ 的导数.

3. 考察 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的可导性.

4. 研究 $f(z) = \overline{z}$ 的可导性.

5. 研究 $f(z) = zRe(z)$ 的解析性.

6. 研究分式线性函数 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 的解析性.

7. 讨论 $f(z) = Im(z)$、$f(z) = |z|^2 z$ 的可导与解析性.

8. 证明 $f(z) = e^x(\cos\ y + i\sin\ y)$ 解析且 $f'(z) = f(z)$.

9. 讨论 $w = \overline{z}, w = zRe(z), w = \overline{z}z^2$ 的可导、解析性.

10. 证明 $\overline{z}^2$ 处处不解析.

11. 求 $a, b, c, d$ 使 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 处处解析.

12. 判断下列函数是否在整个复平面上处处解析？

(1) $f(z) = z$；(2) $f(z) = zRe(z)$；(3) $f(z) = Im(z)$；(4) $f(z) = \sin\ z$；(5) $f(z) = Re(z)$；(6) $f(z) = \cos\ z$；(7) $f(z) = z\overline{z}$；(8) $f(z) = z^2$

13. 判断下列说法是否正确？

(1) 如果函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 处可导，则 $f(z)$ 在 $z_0$ 处一定解析；

(2) 解析函数的导数一定是解析函数；

(3) 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内沿任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\oint_C\ f(z)dz = 0$；

(4) 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内积分与路径无关；

(5) 在区域 D 内处处可导与处处解析是等价的；

(6) 若 $\oint_C \; f(z)dz=0$，则函数 $f(z)$ 在 C 所围成的区域内一定解析；

(7) 如果函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 处解析，则 $f(z)$ 在 $z_0$ 处一定可导

## 四、调和函数与解析函数的构造（5）

1. 证明 $u=y^3-3x^2y$ 是调和函数，并求共轭调和函数$v$和它们构成的解析函数.

2. 证明 $u=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$ 为调和函数，求其共轭调和函数 $v$.

3. 已知 $u=e^x(ycosy+xsiny)+x+y$ 为调和函数，求解析函数 $f(z)=u+iv$ 满足 $f(0)=0$.

4. 已知 $u=x^2+xy-y^2, f(i)=-1+i$，求解析函数 $f(z)$.

5. 求 $k$ 使 $u=x^2+ky^2$ 为调和函数，并求 $v$ 与 $f(z)$，满足$f(i)=-1$.

## 五、复变函数的初等函数（8）

1. 设 $z=x+iy$，求 $|e^{i-2z}|,|e^{z^2}|,Re(e^{1/z})$.

2. 计算 $e^{2+i},e^{(2-\pi i)/3}$.

3. 求 $f(z)=e^{z/5}$ 的周期.

4. 计算 $Ln3,\ln\;(-1),Ln(-1)$.

5. 计算 $Ln(-2+3i),Ln(3-\sqrt{3}i),Ln(-3)$.

6. 求 $i^i,(-2)^{\sqrt{2}},(1+i)^{1-i}$ 的实部、虚部.

7. 求 $\cos\; z$ 在 $z=1+i$ 处的值.

8. 求 $f(z)=\sin\;5z$ 的周期.

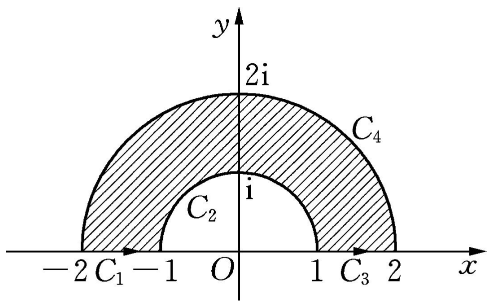
## 六、复变函数的积分（18）

1. 沿路径计算 $\int z^2dz,\int Im(z)dz$（从 (0,0) 到 (1,1)）.

2. 沿折线计算 $\int z^2dz,\int Im(z)dz$（从 (0,0) 到 (1,0)再到 (1,1)）.

3. 沿 $y=kx$计算 $\int_0^{1+ik}\;(x^b+iy^b)dz$，（$b\neq-1$）.

4. 计算 $\oint_C \; \frac{z}{\bar{z}}dz$（其中 C 为下图所示半圆环区域的正向边界）.




5. 计算 $\int z dz$（从原点到 $3+4i$的直线段）.

6. 计算 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz$（其中 C 为以$z_0$为中心，r 为半径的正向圆周，n 为整数）.

7.

计算 $\int_C \operatorname{Re} z\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 为:

(1) 从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的直线段；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的弧段；

(3) 从原点沿 $x$ 轴到点 1 再到 $1+\mathrm{i}$ 的折线 .

8. 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz.$

9. 计算 $\int_0^{\frac{\pi i}{2}} \sin 2z dz.$

10. 计算 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz.$

11. 计算$\int_0^{i} (z-1)e^{-z} dz.$

12. 计算 $\oint_C \frac{1}{z^2+z} dz$, C 为包含圆周|z|=1 在内的任何正向简单闭曲线.

13. 计算 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin z}{z} dz$，$C: |z|=3.$

14. 计算 $\oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right) dz.$

15. 计算 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz.$

16.

计算积分 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C: |z+1|=\frac{1}{2}.$

17. 计算 $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz.$

18.

**计算下列积分，其中 $C$ 为正向圆周：$|z|=r>1$.**

**(1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} \mathrm{d}z$;　　(2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z$.**

## 七、复变函数的级数（24）

1. 判断数列 $z_n=\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}$ 的敛散性.

2. 判断数列 $z_n=(-1)^n+\frac{i}{n+1}$ 的敛散性.

3. 判断数列 $z_n=\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$ 的敛散性.

4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$ 是否收敛.

5. 判断数列 $\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$ 是否收敛，若收敛求极限.

6. 判断数列 $\alpha_n=n\cos in$ 是否收敛，若收敛求极限.

7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i]$ 是否绝对收敛？

8. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛范围及和函数.

9. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径.

10. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径.

11. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n$ 的收敛半径.

12. 将$\frac{1}{z-b}$ 表示成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数.

13. 把$\frac{1}{z}$ 表示成形如 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-2)^n$ 的幂级数.

14. 求 $e^z$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数.

15. 把函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 $z$ 的幂级数.

16. 求 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

17. 把函数 $f(z)=\frac{1}{3z-2}$ 展开成 $z$ 的幂级数.

18. 求 $\arctan z$ 在 $z=0$ 处的幂级数展开式.

19. 将 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 展开成洛朗级数.

20. 将 $\frac{e^z}{z^3}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 展开成洛朗级数.

21. 将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

22. 将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $2<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

23. 将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

24. 将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $0<|z-2|<1$ 内展开成洛朗级数.

## 八、孤立奇点与留数（14）

1. 证明 $z=0$ 为 $\frac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

2. 求 $\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点，判断极点级数.

3. 求 $f(z)=z^3-1$ 的零点及级数.

4. 求 $f(z)=\sin\ z$ 的零点及级数.

5. 求 $\frac{1}{\sin z}$ 的奇点，判断极点级数.

6. 求 $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ 在原点处的留数.

7. 求 $f(z)=z^2\cos\ \frac{1}{z}$ 在原点处的留数.

8. 求 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在原点处的留数.

9. 计算 $I_1=\oint_{|z|=1}\ \frac{\sin z}{z}dz$，$I_2=\oint_{|z|=1}\ ze^{\frac{1}{z}}dz$.

10. 计算 $\oint_{|z|=2}\ \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$.

11. 计算 $\oint_{|z|=2}\ \frac{z}{z^4-1}dz$，$|z|=2$ 正向.

12. 计算 $\oint_{|z|=1}\ \frac{\cos z}{z^3}dz$.

13. 计算 $\oint_C\ \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$（$C$ 为正向圆周 $|z|=2$）.

14. 计算 $\oint_C\ \frac{1}{z^{101}(1-z^2)}dz$（$C$ 为正向圆周 $|z|=1/2$）.

## 九、共形映射（4）

1. 求 $w=f(z)=z^3$ 在 $z=0$、$z=i$ 处的导数值，说明几何意义.

2. 求映射 $w=f(z)=z^2+2z$ 在 $z=-1+2i$ 处的转动角，判断放大缩小区域.

3. 分析 $w=e^z$ 构成的映射性质.

4. 将映射 $w=\frac{3z+4}{iz-1}$ 分解为简单变换的复合.

5. 共形映射的定义.

6. 分式线性映射也叫 Möbius 变换，它不仅保角，还保圆（将直线视为半径无穷大的圆）、保交比不变，是复分析中非常重要的一类共形映射.

## 第二部分 （5）

## 一、傅里叶变换

1. 若 $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换函数，判断下列公式是否正确？

(1) $\mathscr{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}F(\omega)$;

(2) $\mathscr{F}[f^{'}(t)] = j\omega\mathscr{F}[f(t)]$;

(3) $\mathscr{F}[f(t-t_0)] = e^{j\omega t_0}F(\omega)$;

(4) $\mathscr{F}[tf(t)] = j\frac{d\mathscr{F}[f(t)]}{d\omega}$;

(5) $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = e^{j\omega_0 t}f(t)$;

(6) $\mathscr{F}[f(at)] = aF(\frac{\omega}{a})$;

(7) $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$;

(8) $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}dt$;

(9) $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}dt$;

(10) $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}dt$;

(11) $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = e^{-j\omega_0 t}f(t)$;

(12) $\mathscr{F}^{-1}[F^{'}(\omega)] = jtf(t)$

2. 求指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0; \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 的傅里叶变换函数 $F(\omega)$，并求傅里叶逆变换的积分表达式，其中 $\beta$>0.

3. 求函数 $f(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和逆变换的积分表达式，其中 $A, \beta > 0$. 这个函数叫做钟形函数，又称为高斯(Gauss)函数，是工程技术中常见的函数之一.

4. 求常系数线性常微分方程 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$

的解，其中 $-\infty < t < \infty$ ，$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 均为常数.

5. 证明：傅里叶变换的频移性质：$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = e^{j\omega_0 t}f(t)$.

## 二、 拉普拉斯变换（1）

若 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换函数，判断下列公式是否正确?

(1) $\mathscr{L}[f^{'}(t)] = sF(s) - f(0)$;

(2) $\mathscr{L}[f(t-t_0)] = e^{st_0}F(s)$;

(3) $\mathscr{L}[tf(t)]=-\frac{dF(s)}{ds}$;

(4) $\mathscr{L}[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$;

(5) $\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$;

(6) $\mathscr{L}[sgn(t)]=\frac{1}{s}$;

(7) $\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s}$;

(8) $\mathscr{L}[e^{-t}]=\frac{1}{s}$

(9) $\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$ 对任意整数 $n$ 都成立.（×）

复变函数与积分变换 作业 教材课后题

第一章 P27 6(1,4)，9(1,3)，12(3,5)，13
第二章 P50 2(1,3),3(1),4,7,9(4),10,13(2),14,18(1,2),19,20
第三章 P73 3,4,6,7,8(2),10(4),13(1),
第四章 P98 3,5(2),7(1),8(1),9.
第五章 P128 3(4,6),7(1,5)
第六章 P161 2,3
第八章 P205 5(1),6(1),14

期末题目 80%来源 作业题+ PPT 上例题

**请手写各章内容提要，具体要求如下：**

**1. 内容完整：需涵盖本章核心知识点，包括但不限于相关*基本概念*、*性质定理*（含定理核心表述）、*重点公式*（公式书写规范，标注公式含义），不遗漏关键内容，逻辑连贯。**

**2. 字迹工整：书写规范、笔画清晰，卷面整洁，无潦草、涂改、连笔过度等情况，确保可读性。**

**3. 格式规范：分点清晰（可采用序号或项目符号区分概念、性质、定理、公式），段落分明；关键知识点可适当加粗（手写可采用下划线标注），整体排版整齐、美观。**