华南农业大学 2007 第一期概率统计试卷标准答案

一. 选择题（$5\times3'$=15 分）

1. D　2.B　3. B　4. C　5.A

二. 填空题（$5\times3'$=15 分）

1. $\frac{4}{3}e^{-2}$ 或 0.1804；2. $2\Phi(1)-1$ 或 0.7；3. $\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$；4. $\chi^2(10n)$；5. 3.0202；

三. (10 分)

解　设 B={此人感染此病}，

A_1，A_2，A_3 分别表示此人选自甲、乙、丙三个地区…………………1 分

由已知，有 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.3$，

$$P(B|A_1)=0.06,\quad P(B|A_2)=0.04,\quad P(B|A_3)=0.03$$ …………………2 分

（1）由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=0.2\times0.06+0.5\times0.04+0.3\times0.03=0.041\end{aligned}$$ …………………3 分

（2）由贝叶斯公式有

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times0.06}{0.041}=\frac{12}{41}\approx0.2927.$$ …………………3 分

答：从三个地区任意抽取一人，感染此流行病的概率为 0.041；若已知此人染病，此人来自乙地区的概率约为 0.2927. ……………………………………1 分

四.(12 分)

解 (1) $p\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ …………………4 分

（2）当 x<-1 时　$F(X)=\int_{-\infty}^{x}0dx$ ……………………………………1 分

当 $-1\le x<1$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$$ ……………3 分

当 $x\ge1$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{1}^{x}0dxdx=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$ ……………3 分

故 X 分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$ ……………………………1 分

五（16 分）

解 （1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ ……………………………………………2 分

当 $x<0$ 时，

$f(x,y)=0$，从而 $f_X(x)$ ＝0. ……………………………………………1 分

当 $x\ge 0$ 时

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{0} 0dy+\int_{0}^{+\infty}12e^{-3x-4y}dy=-3e^{-3x}(e^{-4y})_0^{+\infty}=3e^{-3x}$ …3 分

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, x\ge 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$$ …………………………………1 分

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, y\ge 0\\ 0, \quad y<0\end{cases}$$ …………………………………2 分

（2）由（1）求出的两个边缘密度函数表达式可知，对于一切 x，y，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

则可证明 X 与 Y 相互独立. ……………………………………………………3 分

（3） $P(0<X\le 1, 0<Y\le 2)=\int_0^2\int_0^1 f(x,y)dxdy$ ……………………………2 分

$$=\int_0^2 f_Y(y)dy\cdot\int_0^1 f_X(x)dx$$

$$=\int_0^2 4e^{-4x}dy\cdot\int_0^1 3e^{-3x}dx$$ ……………………2 分

$$=-e^{-4x}\Big|_0^2-e^{-3x}\Big|_0^1=2-e^{-8}-e^{-3}.$$

六.（10 分）

解 令 X 表示取到正品之前已经取出的废品的数，则 X 的可能取值为 0，1，2，

………………………………………1 分

X 的分布律为

$P\{X=0\}=\dfrac{8}{10}$，

$P\{X=1\}=\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$，

$P\{X=2\}=\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{8}{8}=\dfrac{1}{45}$， ……………………………………………3 分

所以$EX=0\times\frac{8}{10}+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{9}$， ……………………………2 分

$EX^2=0^2\times\frac{8}{10}+1^2\times\frac{8}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{4}{15}$ ……………………………2 分

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{4}{15}-\frac{4}{81}=\frac{88}{405}$. ……………………………2 分

七.（10 分）

解　设该次考试的考生成绩为X,则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，把从X中抽取的容量为n=26

的样本均值记为$\overline{X}$，样本标准差为S.本题是在显著水平$\alpha=0.05$下检验假设

$$H_0:\mu=70,\quad H_1:\mu\neq 70.$$

由于σ^2未知，用t检验法. ………………………………………3 分

当H_0为真时，统计量$|T|=\left|\frac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$，……………………………3 分

由$n=26,\overline{X}=66.5,S=15,t_{0.025}(25)=2.060$算得$|T|=1.19<2.060$，所以统计量 T

未落入拒绝域中，从而接受H_0，即在显著水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分. ……………………………………………4 分

八.（12 分）

解　　$E(X)=\int_0^1 x(\beta+1)x^{\beta}dx=\frac{\beta+1}{\beta+2}$ ……………………………………………3 分

由$\overline{X}=E(X)=\frac{\beta+1}{\beta+2}$知矩估计量为$\hat{\beta}=\frac{1}{1-\overline{X}}-2$ ……………………………2 分

$$L(\beta)=\begin{cases}(\beta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta},0<x_i<1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$ ……………………………………………2 分

$\ln L(\beta)=n\ln(\beta+1)+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ……………………………………………1 分

令$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ……………………………………………2 分

故极大似然估计量为 $\widehat{\beta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$ ……………………………………2 分