华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2009 学年第一学期　　考试科目：概率论与数理统计（解答）

考试类型：（闭卷）　　　考试时间：**120** 分钟

学号________________姓名____________年级专业__________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评阅人							

一、 填空题（每小题 3 分，共 3×5=15 分）

1、设随机变量 **X** 服从二项分布 $B(10,p)$，若 **X** 的方差是 $\frac{5}{2}$，则 $p=$ $\underline{\frac{1}{2}}$

2、设随机变量 **X**、**Y** 均服从正态分布 $N(2,\ 0.2)$ 且相互独立，则随机变量

$Z=X-2Y+1$ 的概率密度函数为 $\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{2}}}$　$\left(Y\sim N(-1,\ 1)\right)$

3、设二维离散型随机变量 **X**、**Y** 的联合分布律为：

X \ Y	0	2	4
0	1/6	1/9	1/18
1	1/3	0	1/3

则联合分布函数值 $F(1,3)=$ $\underline{\frac{5}{18}}$

4、设总体 **X** 服从参数为 λ 的指数分布，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是它的一组样本值，作 λ

的极大似然估计时所用的似然函数 $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda)=$ $\underline{\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}}$ 。

~~**5**、作单因素方差分析，假定因素有 **r** 个水平，共作了 **n** 次试验，当 H_0 为真时，~~

~~统计量~~ $\cancel{F=\frac{SS_A/df_A}{SS_E/df_E}\sim \underline{F(r-1,n-r)}}$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 3×5=15 分）

1、设 A，B 是两个互斥的随机事件，则必有（ **A** ）

$(A)P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　$(B)P(A-B)=P(A)-P(B)$

$(C)P(AB)=P(A)P(B)$　　$(D)P(A)=1-P(B)$

2、设 A，B 是两个随机事件，$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{4}{5}$，$P(B|\overline{A})=\frac{5}{6}$，则（ **C** ）

$(A)P(\overline{A}|B)=\frac{1}{2}$　$(B)P(\overline{A}|B)=\frac{3}{4}$　$(C)P(\overline{A}|B)=\frac{5}{8}$　$(D)P(\overline{A}|B)=\frac{12}{25}$

3、设 X，Y 为相互独立的两个随机变量，则下列不正确的结论是（ **D** ）

$(A)E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$　　$(B)E(XY)=E(X)E(Y)$

$(C)D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$　　$(D)D(XY)=D(X)D(Y)$

4、作单因素方差分析，假定因素有三个水平，具有共同方差 σ^2。若第一个水平作了 3 次试验，第二个水平作了 4 次试验，第三个水平作了 5 次试验，SS_T 是总离差平方和，则 $\frac{SS_T}{\sigma^2}$ 服从（ **B** ）

(A) 自由度为11的 t 分布　(B) 自由度为11的 χ^2 分布

(C) 自由度为12的 t 分布　(D) 自由度为12的 χ^2 分布

5、在对一元线性回归方程的统计检验中，设有 n 组数据。回归平方和 SS_R 的自由度是：（ **D** ）

$(A)\ n-1$　$(B)\ n-2$　$(C)\ (1,\ n-2)$　(D)

三、判别题（每小题 2 分，共 2×5=10 分）

（请在你认为对的小题对应的括号内打“√”，否则打“×”）

1、（ × ）设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，随机变量 Y 的概率密度为 $f_Y(y)$，则二维随机变量（X、Y）的联合概率密度为 $f_X(x)f_Y(y)$，

2、（ √ ）设 $\Phi(x)$ 是服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量的分布函数，X 是服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量，则有 $P\{|X-\mu|<a\}=2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)-1$

3、（ × ）设一维随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 X 的分布律为：

$$P\{X=k\}=\frac{2^k}{k!}e^{-2},\quad (k=0,1,2,\cdots n)$$

4、（ √ ）若 T 服从自由度为 n 的 t 分布，则 T^2 服从 $F(1,n)$ 分布。

~~5、（ √ ）求随机变量 Y 与 X 的线性回归方程 $Y=a+\hat{b}X$，在计算公式~~

$$\cancel{\begin{cases} a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x} \\ \hat{b}=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}} \end{cases} \text{中，} L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2,\ L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)\text{。}}$$

四、解答题（每小题 10 分，共 10×2=20 分）

1、某饭店一楼刚好停了三部电梯，现有五位乘客要乘电梯，假定他们选择哪部电梯乘座是随机的，求每部电梯都有乘客的概率。

解：令 A_i 表示事件“没有乘客乘座第 i 部电梯”，$i=1,2,3$，则：

$$P(A_i)=\frac{2^5}{3^5},\quad i=1,2,3$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{3^5},$$

$$P(A_1A_2A_3)=0$$ （5 分）

“每部电梯都有乘客”的概率为：$p=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3)$

$$=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)+P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)-P(A_1A_2A_3)$$

$$=1-3\times\frac{2^5}{3^5}+3\times\frac{1}{3^5}-0=\frac{50}{81}\approx 0.6173$$ （5 分）

2、甲、乙两人轮流投篮，甲先投。一般来说，甲、乙两人独立投篮的命中率分别为 0.7 和 0.6。但由于心理因素的影响，如果对方在前一次投篮中投中，紧跟在后面投篮的这一方的命中率就会有所下降，甲、乙的命中率分别变为 0.4 和 0.5。求：

（1）乙在第一次投篮中投中的概率；

（2）甲在第二次投篮中投中的概率。

解：令 A_1 表示事件“乙在第一次投篮中投中”，

令 B_i 表示事件“甲在第 i 次投篮中投中”，$i=1,2$

（1）$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(\overline{B_1})P(A_1|\overline{B_1})$

$=0.7\times 0.5+0.3\times 0.6=0.53$ （5 分）

（2）$P(A_1)=0.53,\quad \Rightarrow P(\overline{A_1})=0.47$

$P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(B_2|\overline{A_1})$ （5 分）

$=0.53\times 0.4+0.47\times 0.7=0.541$

五、解答题（每小题 10 分，共 10×2=20 分）

1、设随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} a-\dfrac{a}{2}x, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其余} \end{cases}$，求：

（1） 常数 a；

（2） X 的分布函数 $F(x)$；

（3） 条件概率 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}|X\le 1\right\}$。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2\left(a-\dfrac{a}{2}x\right)dx=\left(ax-\dfrac{a}{4}x^2\right)\Big|_0^2=a=1$ （3 分）

即 $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}x, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其余} \end{cases}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x-\dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$ （5 分）

（3）$P\left\{X>\dfrac{1}{2}|X\le 1\right\}=\dfrac{P\left\{\dfrac{1}{2}<X\le 1\right\}}{P\{X\le 1\}}=\dfrac{F(1)-F\left(\dfrac{1}{2}\right)}{F(1)}=\dfrac{5}{12}$ （2 分）

2、设二维随机变量（X，Y）的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-y}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & 其余\end{cases}$$ **，求**

（1） 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$**；**

（2） 随机变量 $Z=\sqrt{X}$ **概率密度** $f_Z(z)$**。**

解（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2xe^{-y}dy, & 0<x<1\\ 0, & 其余\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其余\end{cases}$

（2） $F_Z(z)=P\{\sqrt{X}<z\}$,

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0\Rightarrow f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X}<z\}=P\{X<z^2\}=F_X(z^2)$

$$\Rightarrow f_Z(z)=f_X(z^2)\cdot 2z=\begin{cases}4z^3, & 0<z<1\\ 0, & z\ge 1\end{cases}$$

综上所述，$f_Z(z)=\begin{cases}4z^3, & 0<z<1\\ 0, & 其余\end{cases}$

六、解答题（每小题 10 分，共 10×2=20 分）

1、设总体 $X\sim N(\mu,3^2)$**，现从 X 中抽取一个容量为 n 的样本，计算出样本均值** $\bar{x}=48.4$。对 $1-\alpha=0.95$ 的置信水平，

（1） 估计 μ **的置信区间；**

（2） 若要求置信区间的长度不超过 3，样本容量 n 至少为多少？

（参考数据：$u_{0.05}=1.64,\ u_{0.025}=1.96,\ u_{0.005}=2.58$）

解：（1）在$\sigma^2=3$已知的条件下，μ在置信水平$1-\alpha=0.95$下的置信区间为：

$$\left(\bar{x}-u_{0.025}\frac{3}{\sqrt{n}},\quad \bar{x}+u_{0.025}\frac{3}{\sqrt{n}}\right)=\left(48.4-1.96\frac{3}{\sqrt{n}},\quad 48.4+1.96\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left(48.4-\frac{5.88}{\sqrt{n}},\quad 48.4+\frac{5.88}{\sqrt{n}}\right)$$ （5 分）

（2）令$2\times\frac{5.88}{\sqrt{n}}\le 3\Rightarrow n\ge 15.3664$，即样本容量至少为 16。 （5 分）

2、已知某种小麦叶片的宽度$X\sim N\left(\mu,\ 0.048^2\right)$，（单位：cm），在喷洒一种农药后再抽取 5 张叶片，测得它们的宽度为：1.32；1.55；1.36；1.40；1.44。

（1） 求该样本的均值和方差；

（2） 问喷洒农药后小麦叶片的宽度的方差是否正常（$\alpha=0.1$）

（参考数据：$\chi^2_{0.95}(4)=0.71,\ \chi^2_{0.05}(4)=9.49,\ \chi^2_{0.95}(5)=1.15,\ \chi^2_{0.05}(5)=11.07$）

解：（1）$\bar{x}=1.414$，$s^2=\frac{0.03112}{4}=0.00778$ （5 分）

（2）检验假设：$H_0:\sigma^2=0.048^2,\quad H_1:\sigma^2\ne 0.048^2,$

当 H_0 为真时，统计量$\chi^2=\frac{4S^2}{0.048^2}\sim\chi^2(4)$

代入样本数据得χ^2的观察值：$\chi^2\approx 13.5069$

因为$13.5069>\chi^2_{0.05}(4)$ ，

所以拒绝 H_0，即在$\alpha=0.1$的假设水平下，认为叶宽的方差发生了变化。

（5 分）