装

订

线

华南农业大学期末考试试卷答案

2010-2011 学年第 1 学期　　　　**考试科目：** 概率论与数理统计

一、 填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15分）

得分	

1、若 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$____0.7____.

2、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$____$\frac{9}{64}$____.

3、设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为9的简单随机样本，得到样本均值 $\overline{X}=5$，则未知参数 μ 的置信度为0.95的置信区间是____(4.804，5.588)____. $(u_{0.025}=1.96)$

4、设总体 $X\sim N(0,4)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为取自该总体的样本，则统计量 $Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从____$F(10,5)$____分布.

5、因素 A 分3个水平，对每个水平进行4次试验，用方差分析法检验各组均值是否相等，试完成下列方差分析表：

方差来源	偏差平方和	自由度	均方和	F 值
因子 A	224	2	112	4.94
误差	204	9	22.67	
总计 T	428	11		

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分	

1、袋中有 4 个白球 2 个黑球，今从中任取 3 个球，则至少一个黑球的概率为(　A　).

(A) $\frac{4}{5}$　　(B) 1

(C) $\frac{1}{5}$　　(D) $\frac{1}{3}$

2、设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$(　C　).

(A) 单调增大　　(B) 单调减少

(C) 保持不变　　(D) 增减不定

3、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，则 (D).

(A) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ (B) $\overline{X}\sim n(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

(C) S^2 与 $\overline{X}$ 独立 (D) S^2 是 σ^2 的无偏估计量

4、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$，则 $EX=$(B).

(A) $\int_0^{+\infty}x^4dx$ (B) $\int_0^1 3x^3dx$

(C) $\int_0^1 x^4dx+\int_1^{+\infty}xdx$ (D) $\int_0^{+\infty}3x^3dx$

5、总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本，在水平 $\alpha=0.10$ 下检验假设 $H_0:\mu=10$，接受 H_0 等价于 (C).

(A) $\overline{X}=10$ (B) $|\mu-10|<0.10$

(C) $\overline{X}-u_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<10<\overline{X}+u_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (D) $\overline{X}\neq 10$

三、解答题（本题 10 分）

得分	

玻璃杯成箱出售，每箱 20 只。假设各箱含 0、1、2 只残次品的概率相应为 0.8、0.1 和 0.1，某顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

1、顾客买下该箱的概率 α；（7 分）

2、在顾客买下的该箱中，没有残次品的概率 β。（3 分）

解：设事件 A 表示“顾客买下该箱”，B_i 表示“箱中恰好有 i 件次品”，$i=0,1,2$。则

$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$，$P(A|B_0)=1$，$P(A|B_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{4}{5}$，

$P(A|B_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{12}{19}$ ……………………………………………………3 分

1、由全概率公式得

$$\alpha = P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(B_i)P(A|B_i) = 0.8\times 1 + 0.1\times\frac{4}{5} + 0.1\times\frac{12}{19} = 0.94$$ ……4 分

2、由贝叶斯公式

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)} = \frac{0.8\times 1}{0.94} = 0.85$$ ………………3 分

装

四、解答题（本题 10 分）

得分	

设随机变量 X 在区间(0，1)服从均匀分布，求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解： 由题设知， X 的概率密度为

订

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$ ………………2 分

$$F_Y(y) = P\{X < y\} = P\{e^X < y\} = P\{X < \ln y\} = F_X(\ln y)$$ ………………3 分

线

故 $f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\ln y) = \frac{1}{y}, 0 < \ln y < 1$ ………………3 分

所以 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & 其他 \end{cases}$ ……………………………………2 分

五、解答题（本题 10 分）

得分	

已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2Ax, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

求：1、参数 A；(2 分)

2、$P\{0.5 < X < 3\}$；(2 分)

3、$P\{X < x\}$；(6 分)

解： 1、由归一性，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 2Axdx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$ …………………………2 分

2、$P\{0.5 < x < 3\} = \int_{0.5}^{3} f(x)dx = \int_{0.5}^{1} 2xdx = 0.75$ ………………………2 分

3、因为$P\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，

……………………………………2 分

当$x \le 0$时，$P\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$

当$0<x\le 1$时，$P\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} 2tdt=x^2$ …………………2 分

当$x>1$时，$P\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{1} 2tdt=1$ …………………………2 分

六、解答题（本题 12 分）

得分	

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

1、确定常数c的值；（4 分）

2、二维随机变量(X,Y)是否相互独立？为什么？（8 分）

解：1、因为$\iint\limits_{x^2<y<1} f(x,y)dxdy=1$，即

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}cx^2ydy=c\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}(1-x^4)dx=c\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{21}=1$$ ………………3 分

所以，$c=\dfrac{21}{4}$ ……………………1 分

2、因为$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

所以$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x^2}^{1}\dfrac{21}{4}x^2ydy=\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), x^2<1$

即 $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & x^2<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ …………………………3 分

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{21}{4}xydx=\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, 0<y<1$

即 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ …………………………3 分

显然有$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不独立。 …………2 分

装

订

线

七、解答题（本题 10 分）

得分	

设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1},0<x<1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

其中θ是未知参数，且$\theta>0$。试求θ的极大似然估计量。

解： 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的子样观察值，那么样本的似然函数为

$$L(\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}$$ ………………….3 分

就有

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$ ………………….3 分

于是，似然方程为

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$ ……………………….2 分

从而，可得

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$ ……………………………2 分

八、解答题（本题8分）

得分	

有人认为企业的利润水平和它的研究费用间存在着近似的线性关系。下面是某 10 个企业的利润水平(x)与研究费用(y)的调查资料：

$$\sum_{i=1}^{10}x_i=102,\quad\sum_{i=1}^{10}y_i=2390,\quad\sum_{i=1}^{10}x_i^2=1066,\quad\sum_{i=1}^{10}y_i^2=624300,\quad\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=25040$$

试建立研究费用 y 与企业利润水平 x 的回归直线方程。

解： $\bar{x}=10.2$，$\bar{y}=239$ ……………………………….1 分

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-n\bar{x}^2=1066-10\times10.2^2=25.6$$ ………………………….1 分

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-n\bar{y}^2=624300-10\times239^2=53090$$ ………………………….1 分

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}=25040-10\times10.2\times239=662$$ ………………………1 分

故 $\hat{b}=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=\dfrac{662}{25.6}\approx 25.86$； $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=239-25.86\times 10.2=-24.77$ ……2 分

因此回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=-24.77+25.86x$ ……………………2 分

九、**解答题**（本题 8 分）

得分	

设某经销商正与某出版社联系订购下一年的挂历，根据多年的经验，经销商得出需求量分别为150本，160本，170本，180本的概率分别为0.1，0.4，0.3，0.2，种订购方案的获利 $X_i(i=1,2,3,4)$ (百元)是随机变量，经计算各种订购方案在不同需求情况下的获利如下表：

需求数量 订购方案	需求 150 本（概率 0.1）	需求 160 本（概率 0.4）	需求 170 本（概率 0.3）	需求 10 本（概率 0.2）
订购 150 本获利 X_1	45	45	45	45
订购 160 本获利 X_2	42	48	48	48
订购 170 本获利 X_3	39	45	51	51
订购 180 本获利 X_4	36	42	48	54

1、经销商应订购多少本挂历可使期望利润最大？（5 分）

2、在期望利润相等的情况下，考虑风险最小经销商应订购多少本挂历。(5分)

解： 1、因为 $EX_1=45\times 0.1+45\times 0.4+45\times 0.3+45\times 0.2=45$ ……………1分

$EX_2=42\times 0.1+48\times 0.4+48\times 0.3+48\times 0.2=47.4$ ………………1分

$EX_3=39\times 0.1+45\times 0.4+51\times 0.3+51\times 0.2=47.4$ ………………1分

$EX_4=36\times 0.1+42\times 0.4+48\times 0.3+54\times 0.2=45.6$ ………………1分

所以要使期望利润最大，可订购160本或170本。 ………………1分

2、由于

$EX_2^2=42^2\times 0.1+48^2\times 0.4+48^2\times 0.3+48^2\times 0.2=2250$ ………………1分

$DX_2=EX_2^2-(EX_2)^2=2250-47.4^2=3.24$ ………………1分

$EX_3^2=39^2\times 0.1+45^2\times 0.4+51^2\times 0.3+51^2\times 0.2=2262.6$ ………………1分

$DX_3=EX_3^2-(EX_3)^2=2262.6-47.4^2=15.84$ …………………1分

因为 $DX_2<DX_3$，所以从风险考虑应订购160本。 ………………1分