第一章　函数与极限试题库

一、填空题：

1、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+b}{x-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1\end{cases}$ 适合 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$ ，则 a 的值为________， b 的值为________， A 的值为________ .

解：因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+b}{x-1}=A$ ，所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+b)=0$ ，则 $b=-3$ ，那么 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=4=A$ ，而极限值与函数值无关， a 可取任意实数.

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}=$________.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{2\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(\frac{\sin x}{2})}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(\frac{\sin x}{2})}{x^2}=\dfrac{1}{4}$.

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+5}{x-5})^x=$________.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+5}{x-5})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{10}{x-5})^{\frac{x-5}{10}\times 10}\times(1+\dfrac{10}{x-5})^5\right]=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{10}{x-5})^{\frac{x-5}{10}\times 10}\times\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{10}{x-5})^5=\mathrm{e}^{10}$.

4、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-3$ ，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$__________ ， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$__________ .

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-3$ ，则 $\dfrac{f(x)}{x^3}=-3+o(x)$ ， $f(x)=-3x^3+o(x^4)$ ，

那么 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x^3+o(x^4)}{x}=0$ ， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x^3+o(x^4)}{x^2}=0$.

5、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$__________ .

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=1+0=1;$

二、选择题：

1、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中与 x 不等价的是（　　）.

A . $x-3x^2+x^3$ ；　 B . $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ ；　 C . $\mathrm{e}^x-2x^2+5x^4-1$ ；　 D . $\sin(6\sin x+x^2)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3x^2+x^3}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2x^2+5x^4-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+5x^4}{x}=1$ ，

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6\sin x+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x+x^2}{x}=6$ ，所以选D ；

2、若$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-kx-6}{x-3}=5$ ，则$k=$________ .

A . 0　　　　B . 1　　　　C . 2　　　　D . 3

解 :因为$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-kx-6}{x-3}=5$,所以$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-kx-6)=0$,则$3^2-3k-6=0$ ，$k=1$,所以选B ；

3、 若当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$和$\beta(x)$都是无穷小，则当$x\to x_0$时，下列表达式中哪一个不一定是无穷小（　　）.

A . $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$；　　　　B . $\alpha^2(x)$和$\beta^2(x)$；

C . $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$；　　　　D . $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$.

解：例如，设$\alpha(x)=x$ ，$\beta(x)=x^3$，当$x\to 0$，$\alpha(x)$和$\beta(x)$都是无穷小，但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$不存在，选 D;

4、下列极限不存在的是（　　）.

A . $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\sin x}{x})$；　　　　B . $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$；

C . $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}$；　　　　D . $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\arctan\dfrac{1}{x})$.

解：因为$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}$，所以选$C$；

5、设$\forall n$，数列$|f(n)|<g(n)$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=3$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$的值为（　）.

A . $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=-3$；　B . $-3\le\lim\limits_{n\to\infty}f(n)\le 3$；　C . $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=3$；　D . $-3<\lim\limits_{n\to\infty}f(n)<3$.

解：由$|f(n)|<g(n)$，则$-g(n)<f(n)<g(n)$，所以选B；

三、解答题：

1、求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}$ ；

解 ：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$ ；

2、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$；

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$；

3、计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x}\left[\ln(1+x-x^2)-\ln(1-x+x^2)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-x^2}{2x}-\dfrac{-x+x^2}{2x}\right)=1$ ；

4、计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ ；

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

5、已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=1$，其中 a,b,c 为常数，求 a,b,c 的值.

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(25-a)x^2+bx+c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=1$

所以 $\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=1\end{cases}$，则 $\begin{cases}a=25\\ b=10\end{cases}$， c 可以取任意值.

6、设 $x\to0^+$ 时，$\mathrm{e}^{\sqrt{x}\cos x^2}-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 与 x^μ 是同阶无穷小，求 μ 的值.

解：因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}\cos x^2}-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}\left(\cos x^2-1\right)}-1\right)}{x^\mu}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}\left(\cos x^2-1\right)}-1\right)}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\cos x^2-1\right)}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}x^4\right)}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}}{x^\mu}=C$（非零常数），

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}\left(\cos x^2-1\right)}-1\right)}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\cos x^2-1\right)}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}x^4\right)}{x^\mu}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}}}{x^\mu}=C$（非零常数）

所以 $\mu=\dfrac{9}{2}$；

7、确定常数 a 与 b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 6x}{2x}, x<0, \\ a+3x, x=0, \\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, x>0.\end{cases}$ 处处连续.

解：当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin 6x}{2x}$ 和当 $x>0$ 时，$f(x)=(1+bx)^{\frac{1}{x}}$，函数 $f(x)$ 显然是连续的.
又 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 6x}{2x}=3$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+bx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+bx)^{\frac{b}{bx}}=e^b$，$f(0)$=a,要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点也连续，则 $e^b=3=a$, ,即 $a=3$，$b=\ln 3$.

8、求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的间断点，并判断其类型.

解：当 $\tan x=0$ 时，有 $x=0$ 或 $x=n\pi$ （n=±1,±2, ⋯）因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$ =1，所以 $x=0$ 为可去间断点. 又 $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$（n=±1,±2⋯）所以 $x=n\pi$（n=±1,±2⋯）为无穷间断点. 当 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$（n=0,±1,±2, ⋯）时，$\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}$ =0，所以 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$

（n=0,±1,±2, ⋯）是可去间断点.

9、已知函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{2+x^{2n}}$，试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

解：因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{2+x^{2n}}=\begin{cases}0, |x|>1 \\ 0, 0\le |x|<1 \\ \dfrac{1}{3}, x=1 \\ \text{不存在，} x=-1\end{cases}$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0\ne f(1)$，

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0, f(-1)$不存在,因此，$x=\pm 1$ 均为可去间断点。

10、证明数列 $\sqrt{3}$，$\sqrt{3+\sqrt{3}}$，$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$，⋯的极限存在并求该极限；

证明：先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由于 $x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}>\sqrt{3}=x_1>0$，假设 $x_n>x_{n-1}>0$ 成立，则 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}>\sqrt{3+x_{n-1}}=x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

下证有界性，$x_1=\sqrt{3}<1+\sqrt{3}$，假设 $x_n<1+\sqrt{3}$，则

$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}<\sqrt{3+(1+\sqrt{3})}<\sqrt{3+1+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$，

故 $0<x_n<1+\sqrt{3}$，即数列 $\{x_n\}$ 有界.

根据单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

则有 $A=\sqrt{3+A}$，解得 $A_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$A_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$（舍去），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.