第三章 微分中值定理与导数的应用试题库

一、选择题

1．设当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则（　A　）.

A. $a=\dfrac{1}{2},\quad b=1$；　　　　B. $a=1,\quad b=1$；

C. $a=-\dfrac{1}{2},\quad b=1$；　　　　D. $a=-1,\quad b=1$。

解：当 $x\to 0$ 时，有 $\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)\to 0$，因此 $\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是无穷小量。又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-(2ax+b)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-2a}{2}=0$（两次利用洛必达法则），因此 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x-2a=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=2a$，得 $1=2a$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$。

现把 $a=\dfrac{1}{2}$ 代入原式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-(\frac{1}{2}x^2+bx+1)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-(bx+1)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-b}{2x}=0,$$

因此需要 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{2x}=\dfrac{1}{2}$。如果 $b\neq 1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\frac{b}{x}}{2}=\infty\neq\dfrac{1}{2}$，而如果 $b=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}=\dfrac{1}{2}$ 成立。因此选(A)。

2．设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为（　B　）.

A.　1；　　　B.　2；　　　C.　3；　　　D.　4。

解：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，令 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$，得唯一的驻点 $x=e$。在区间 $(0,e)$ 上，$f'(x)>0$，故 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增。在区间 $(e,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，故 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递减。而 $f(e)=k>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k=-\infty$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{k}{x}}\to 0^-$，（因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\to 0^+$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x}\to 0^+$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}\to 0^{+}$）。故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k=-\infty$ 。综上所述零点的个数为 2，选(B)。

3. 若 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$ ，并且 $f'(x_0)=0\,(x_0\neq\ 0)$ ，则（B）.

A. $f(x_0)$ 是极大值；　　B. $f(x_0)$ 是极小值；

C. $(x_0,f(x_0))$ 是拐点；　　D. 以上说法都不对。

解：把 x_0 代入 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$ ，得 $x_0f''(x_0)+3x_0[f'(x_0)]^2=1-\mathrm{e}^{-x_0}$ ，又 $f'(x_0)=0\,(x_0\neq 0)$ ，所以 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{-x_0}}{x_0}$ 。现分两种情形讨论，如果 $x_0>0$ ，则 $1-e^{-x_0}>0$ ，得 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0$ 。如果 $x_0<0$ ，则 $1-e^{-x_0}<0$ ，得 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0$ 。因此，无论如何有 $f''(x_0)=\dfrac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0$ ，故 $f(x_0)$ 是极小值，选(B)。

4. 若函数 $f(-x)=f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$ ，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$ ，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　C　）.

A. $f'(x)>0$ ， $f''(x)<0$ ；　　B. $f'(x)>0$ ， $f''(x)>0$ ；

C. $f'(x)<0$ ， $f''(x)<0$ ；　　D. $f'(x)>0$ ， $f''(x)<0$ 。

解： 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，由 $f(x)=f(-x)$ ，两边同时求导，得 $f'(x)=-f'(-x)<0$ ，两边同时再求一次导数得 $f''(x)=f''(-x)<0$ ，故选（ C ）。

5. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$ ，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　C　）.

A. 0；　　B. 6；　　C. 36；　　D. ∞ 。

解：恒等变形后用洛必达法则，由

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6x+xf(x)}{x^3}\right]=0$$ 又因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}=-36$$ 以及

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=36$$ ，所以选（　C　）。

6. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$ ，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序为（B）.

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ ；　　B. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$ ；

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ ；　　D. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$ 。

解：在区间 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$ ，因此 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调上升，得 $f'(0)<f'(1)$, 又由中值

定理 $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)$，即 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(0,1)$，所以 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$，即 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$，故选(B)。

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left|\frac{a}{x}-\frac{b}{\sin x}\right|=-\frac{1}{6}$，则常数 $a=$______, $b=$______ .

解：$-\frac{1}{6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin x-bx}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin x-bx}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cos x-b}{3x^2}$，所以 $a=b$，否则极限为无穷大了。$-\frac{1}{6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cos x-b}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(\cos x-1)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-a\sin x}{6x}=-\frac{a}{6}$，所以 $a=b=1$。

2. 曲线 $y=\arctan x+\frac{1}{x}$ 的单调减少区间是______________.

解：定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，求导得 $y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(1+x^2)x^2}<0$，所以单调减少区间为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$。

3. 曲线 $y=1+\sqrt[3]{1+x}$ 的拐点为______________.

解：在 $x=-1$ 处，$y'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=\infty$，导数不存在。而在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，求导得 $y'=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, y''=-\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$，当 $x>-1$ 时，$y''<0$；当 $x<-1$ 时，$y''>0$，所以拐点为 $(-1,1)$。

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^2}=2$，则 $a=$_________，$b=$_________.

解：方法一：由洛必达法则，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=2$，由于分母 $2x\to 0$，分子也必须趋于 0，否则极限值就不会是 2，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}-a-2bx=0$，故 $\frac{1}{1+0}-a-2b\times 0=0$，即 $a=1$。所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1-2bx}{2x}=2$，再次利用洛必达法则，得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2b}{2}=2$，从而 $\frac{-\frac{1}{(1+0)^2}-2b}{2}=2$，得 $b=-\frac{5}{2}$。

方法二：由泰勒公式：$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，得

$$\ln(1+x)-ax-bx^2=(1-a)\cdot x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2).$$

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^2}=2$，故$\ln(1+x)-ax-bx^2\sim 2x^2\,(x\to 0)$，则

$\begin{cases}1-a=0\\ \dfrac{1}{2}+b=-2.\end{cases}$，解得$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$。

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$_________.

解：属于1^∞型，用求指数型极限的一般方法计算，即

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$，故原式为$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

6. 设$f(x)=x\mathrm{e}^x$，则$f^{(n)}(x)$在点$x=$___________处取得极小值___________.

解： 由$f^{(n)}(x)=(x+n)\mathrm{e}^x$，$f^{(n+1)}(x)=(x+n+1)\mathrm{e}^x$，令$f^{(n+1)}(x)=0\Rightarrow x=-n-1$，所以$f^{(n)}(x)$的极小值为$-\dfrac{1}{e^{n+1}}$。

三、解答题

1. 函数$f(x)$在(a,b)内具有二阶导数，且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中$a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在(a,b)内至少有一点ξ，使得$f\ \ (\xi)=0$。

证明：因为$f(x)$在(a,b)内具有二阶导数，所以由罗尔定理，得$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\exists\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，又因为$f'(x)$在$\left[\xi_1,\xi_2\right]$且满足罗尔定理的条件，故由罗尔定理，得：$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$，使得$f''(\xi)=0$。

2. 设$h>0$，证明：$\dfrac{h}{1+h^2}<\arctan h<h$。

证明： 对函数$f(x)=\arctan x$在$[0,h]$上应用拉格朗日中值定理：存在$\xi\in(0,h)$，

使得 $\arctan h=\arctan h-\arctan 0=\dfrac{h}{1+\xi^2}$，从而 $\dfrac{h}{1+h^2}<\arctan h<h$。

3. 试证方程 $x^3-3x+c=0$（c 为任意常数）在 $[0,1]$ 上不可能有两个根。

证明：用反证法，假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有两个零点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$，满足罗尔定理条件，于是至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，而当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=3x^2-3<0$，这与 $f'(\xi)=0$ 矛盾，故假设不成立，命题得证。

4. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；　　(3) $\lim\limits_{x}\left|1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right|^x$。

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=1$。

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos 3x}{\cos x\sin 3x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin 3x}{\sin x}=3$。

（3）令 $y=\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)^x$，则

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+5}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{1}=3,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)^x=e^3$。

5. 证明不等式：$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x\quad(x>0)$。

证明：设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^2}{1+x}>0(x>0)$ 从而当 $x>0$ 时，$f(x)$ 严格单调增加。又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即

$\ln(1+x) > x-\dfrac{x^2}{2}$。又设 $g(x)=x-\ln(1+x), x>0$.求导得 $g'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$，所以 $g(x)$ 严格单调增加，又 $g(0)=0$，所以，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $x>\ln(1+x)$。综合上述结果可得，当 $x>0$ 时，有 $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x \quad (x>0)$。

6. 一个无盖的圆柱形容器，当给定体积 V 时，要使容器的表面积为最小，问底半径与容器的高的比例应该怎样？

解：设底半径为 R，高为 h，则体积为 $\mathrm{V}=\pi\mathrm{R}^2\mathrm{h}$，表面积为

$$S=\pi\mathrm{R}^2+2\pi\mathrm{Rh}=\pi\mathrm{R}^2+\frac{2\mathrm{V}}{\mathrm{R}}。$$

令 $S'=2\pi\mathrm{R}-\dfrac{2\mathrm{V}}{\mathrm{R}^2}=0$，得 $\mathrm{R}=\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{V}}{\pi}}=h$。所以，当底半径与高的比例为 $1:1$ 时，容器的表面积为最小。

7. 求下列曲线的渐近线：(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$；(2) $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$。

解：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$，所以 $y=0$ 为水平渐近线，$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$，所以 $x=-1$ 为铅直渐近线，无斜渐近线.

（2）无水平渐近线，$\lim\limits_{x\quad 0} xe^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t}\dfrac{e^{t^2}}{t}=\lim\limits_{t}\dfrac{2te^{t^2}}{1}=\infty$，所以 $x=0$ 为铅直渐近线，$a=\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x}\dfrac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=1$，

$b=\lim\limits_{x}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=\lim\limits_{t\quad 0}\dfrac{e^{t^2}-1}{t}=\lim\limits_{t\quad 0}\dfrac{2te^{t^2}}{1}=0$，所以 $y=x$ 为斜渐近线。

8. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径。

解：$y'=2ax+b, y''=2a$ 代入曲率公式，得 $k=\dfrac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}$，由 k 容易看出，当 $2ax+b=0$，即 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，k 的分母最小，因而 k 有最大值 $|2a|$。而 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 所对应的点为抛物线的顶点。因此，抛物线在顶点处的曲率最大。即在顶点处的曲率半径最小，

$\rho = \dfrac{1}{|2a|}$。

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi)。$$

证明：令 $y = xf(x)$ 在，可以验证函数 $y = xf(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi)。$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0 < f(x) < 1$，$f'(x) \neq -1$，证明：方程 $f(x) = 1-x$ 在 $(0,1)$ 内有惟一的实根。

证明：先证存在性。

令 $F(x) = f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续，且 $F(0) = f(0)-1 < 0$，$F(1) = f(1) > 0$。由闭区间上连续函数的零点定理知，存在 $\xi \in (0,1)$，使 $F(\xi) = 0$，即 ξ 为方程 $f(x) = 1-x$ 的实根。

唯一性（用反证法证）。

若 $f(x) = 1-x$ 在 $(0,1)$ 内有两个不等实根 $x_1, x_2 (0 < x_1 < x_2 < 1)$，即 $f(x_1) = 1-x_1$，$f(x_2) = 1-x_2$。对 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上利用拉格朗日中值定理，至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{(1-x_2)-(1-x_1)}{x_2-x_1} = -1$，这与题设条件 $f'(x) \neq -1$ 矛盾。唯一性得证，证毕。