第二章　导数与微分试题库

一、选择题

1．设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $x_0 \in (a,b)$，则在点 x_0 处（）.

A． $f(x)$ 的极限存在且可导．　　　B． $f(x)$ 的极限存在但不一定可导．

C． $f(x)$ 的极限不存在但可导．　　D． $f(x)$ 的极限不一定存在．

解： 连续则极限一定存在，但是连续不一定可导，选 B．

2．设 $f(x)$ 可微，则 $df(\mathrm{e}^x)=$（ ）.

A． $f'(x)\mathrm{d}x$ ．　B． $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ ．　C． $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ ．　D． $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$ ．

解： $df(\mathrm{e}^x)=f'(\mathrm{e}^x)d\mathrm{e}^x=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x dx$，选 C.

3．设曲线 $y=x^3+ax$ 与曲线 $y=bx^2+c$ 在点 $(-1,0)$ 处相切，其中 a、b、c 为常数．则（ ）.

A． $a=b=-1, c=1$ ．　　　B． $a=-1, b=2, c=-2$ ．

C． $a=1, b=-2, c=2$ ．　　　D． $a=c=1, b=-1$ ．

解： 因为 $(-1,0)$ 为切点，即为交点．所以 $-1-a=0$，$b+c=0$．又

$$y'|_{x=-1}=(x^3+ax)|_{x=-1}=3+a\text{，}\quad y'|_{x=-1}=(x^2+c)|_{x=-1}=-2b$$

所以 $a=b=-1, c=1$．选 A．

4．设 $f(x)$ 是可导函数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$．则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为（）.

A． -1 ．　B． -2 ．　C． 0 ．　D． 1 ．

解： 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$，

所以 $f'(1)=-2$．选 B．

5．设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $f^{(n)}(0)=$（　　）；

A． a_n　　B． a_0　　C． $n!a_0$　　D． 0

解： 因为 $\left(x^n\right)^{(n)}=n!$，$\left(x^k\right)^{(n)}=0\left(k<n\right)$，所以 $f^{(n)}(x)=n!a_0$．选 C.

6．设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，$y=f(\ln x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 等于（　　）；

A． $\dfrac{1}{x}f'(\ln x)$　　　B． $\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$

C. $\frac{1}{x^2}[xf''(\ln x)-f'(\ln x)]$　　　　　D. $\frac{1}{x^2}f'(\ln x)$

解： 因为 $y'=\frac{f'(\ln x)}{x}$，则 $y''=\frac{f''(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x-f'(\ln x)}{x^2}=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}$．选 B.

7．若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　　）；

A．与 Δx 等价的无穷小　　　　B．与 Δx 同阶的无穷小

C．比 Δx 低阶的无穷小　　　　D．比 Δx 高阶的无穷小

解： 因为 $\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=y'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}}{\Delta x}=\frac{1}{2}$．　选 B.

二、填空题

1．已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=$________.

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$$

$$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=1.$$

2．$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的______条件，$f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_______条件；

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故第一个空填“充分”，第二个空填“必要”.

3．$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_______条件；

解 “充分必要”.

4．若 $f(x)$ 为可微函数，当 $\Delta x\to 0$ 时，则在点 x 处的 $\Delta y-\mathrm{d}y$ 是关于 Δx 的______.

解：根据微分的定义知，答案为高阶无穷小.

5．设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

解：根据一阶二阶三阶导数的规律观察可知，答案为 $(-1)^n\cdot n!/(1+x)^{n+1}$

6．曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为 1 处的切线方程是________，法线方程是________.

解：切点为$(1,\frac{\pi}{4})$．$y'=\frac{1}{1+x^2}$，故切线斜率为$k=y'|_{x=1}=\frac{1}{2}$，法线斜率为-2，故得所求方程：$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$，$y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$．

7．$\frac{\mathrm{d}\sin\sqrt{x}}{\mathrm{d}\sqrt{x}}=$__________．

解：$\frac{\mathrm{d}\sin\sqrt{x}}{\mathrm{d}\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}\sqrt{x}}=\cos\sqrt{x}$

8．设$T=\cos n\theta$，$\theta=\arccos x$．则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{dT}{dx}$________．

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{dT}{dx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{dT}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-n\sin n\theta}{-\sqrt{1-x^2}}=n\sin n\theta$

三、解答题

1. 确定常数a和b的值，使函数$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x<0\\ b+\sin 2x, & x\ge 0\end{cases}$在$x=0$处可导.

解　要使函数在$x=0$处可导，则函数在$x=0$处连续，且$f'_-(0)=f'_+(0)$，故应有$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，得$b=f(0)=1$，又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin 2x-1}{x}=2$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a\ ,$$

由$f'_-(0)=f'_+(0)$得$a=2$，所以$a=2,b=1$为所求.

2. 已知$f(x)=\begin{cases}x(\cos x)^{x^{-2}}, x>0\\ ax+b, \quad x\le 0\end{cases}$处处可导，求$a,b$的值.

解　因为$f(x)=\begin{cases}x(\cos x)^{x^{-2}}, x>0\\ ax+b, \quad x\le 0\end{cases}$处处可导，故函数在$x=0$处可导，则函数在$x=0$处连续，且$f'_-(0)=f'_+(0)$，故应有$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，得

$$b=f\left(0\right)=\lim_{x\to 0^+}x(\cos x)^{x^{-2}}=\lim_{x\to 0^+}x\cdot(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}=e$， $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $b=f\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=0\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=0$ ，

又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(\cos x)^{x^{-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{x^{-2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}=a$ ，所以 $a=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},b=0$ 为所求.

3．求函数 $y=\arctan\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 的一阶导数.

解：$y'=\dfrac{1}{1+(e^{\sqrt{x}})^2}\cdot(e^{\sqrt{x}})'=\dfrac{1}{1+(e^{\sqrt{x}})^2}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'$

$$=\frac{1}{1+(e^{\sqrt{x}})^2}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+e^{2\sqrt{x}})}.$$

4．设 $y=[\ln(x\sec x)]^2$．求 $\mathrm{d}y$.

解：$dy=d[\ln(x\sec x)]^2=2\ln(x\sec x)d\ln(x\sec x)$

$$=2\ln(x\sec x)\cdot\frac{1}{x\sec x}d(x\sec x)=\frac{2(x+x\tan x)\ln(x\sec x)}{x\sec x}dx.$$

5．设 $f(u)$ 为可微函数．求 $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=e^{f(x)}\cdot\dfrac{d}{dx}f(e^x)+f(e^x)\cdot\dfrac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\cdot f'(e^x)\cdot e^x+f(e^x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)$.

6．求幂指数函数 $y=(\ln x)^x$ 的一阶导数.

解：$y'=[e^{x\ln(\ln x)}]'=e^{x\ln(\ln x)}[x\ln(\ln x)]'=(\ln x)^x[\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}]$.

7．设 $x=\mathrm{e}^{2t}-1$， $y=2\mathrm{e}^t$．求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{t}}{2e^{2t}}=e^{-t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{d}{dx}(e^{-t})=\dfrac{d}{dt}(e^{-t})\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-e^{-t}}{2e^{2t}}=-\dfrac{1}{2}e^{-3t}$.

8．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

解：因为 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，由参数方程确定的函数的求导公式可得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=(3t+2)(1+t)=3t^2+5t+2\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{6t+5}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}\ .$$

9．已知 $y=1+x\mathrm{e}^{xy}$，求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$；

解 将 $y=1+x\mathrm{e}^{xy}$ 两边同时对 x 求导，得 $y'=\mathrm{e}^{xy}+x\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\cdot y'\right)$，变形整理

得 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{xy}(1+xy)}{1-x^2\mathrm{e}^{xy}}$，所以 $y'|_{x=0}=1$；

$$y''=\frac{\left[\mathrm{e}^{xy}(y+xy')(1+xy)+\mathrm{e}^{xy}(y+xy')\right]\left(1-x^2\mathrm{e}^{xy}\right)-\mathrm{e}^{xy}(1+xy)\left(-2x\mathrm{e}^{xy}-x^2\mathrm{e}^{xy}(y+xy')\right)}{\left(1-x^2\mathrm{e}^{xy}\right)^2}$$

将 $x=0,y=1$ 代入，可得 $y''\big|_{x=0}=2$.

10．设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 所确定，求 $\mathrm{d}y$.

解 将方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 两边同时微分，得：$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x+y}\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right)$，

变形、整理得：$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}\mathrm{d}x$.

11. 设函数 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　因为 $x=\arctan t$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{1+t^2}$，

而 $2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5$，可得 $2\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}t-2yt\mathrm{d}y+\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{y^2-\mathrm{e}^t}{2-2yt}$，

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(y^2-\mathrm{e}^t\right)\left(1+t^2\right)}{2-2yt}$.

12. 已知 $f(x)$ 是周期为5的可导函数，其在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x) ,$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小．求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程．

解 由题设条件有

$$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to 0}[8x+\alpha(x)] ,$$

从而 $f(1)-3f(1)=0$，得 $f(1)=0$．又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{8x}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=8 ,$$

从而
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=8 ,$$

即
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=8 .$$

令 $t=\sin x$，则有 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=8$,

即 $\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}=4f'(1)=8$.

所以 $f'(1)=2$．由 $f(x+5)=f(x)$，可得 $f'(x+5)=f'(x)$．则

$$f(6)=f(1)=0 ,\quad f'(6)=f'(1)=2 ,$$

故所求切线方程为 $y-0=2(x-6)$，即 $2x-y-12=0$ 为所求．