第五章　定积分试题库

一、填空题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在的_________条件，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在的__________条件.

解　必要；充分.

2. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=$______________.

解　$\dfrac{\pi a^2}{4}$.　$\dfrac{1}{4}$圆的面积为$\dfrac{\pi a^2}{4}$.

3. 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在闭区间[-1，1]上的平均值=__________.

解：平均值 $\mu=\dfrac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi\cdot 1^2}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \dfrac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=$__________.

解　$\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan t\mathrm{d}t}{x^4}=$____________.

解　$\dfrac{1}{2}$.　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan t\mathrm{d}t}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{x}\tan x^2}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$

二、选择题

1. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$　对（　　　）正确.

(A)　$0\le I\le\dfrac{1}{2}$；(B)　$2\le I\le 3$；(C)　$\dfrac{1}{2}\le I\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　；　(D)　$\dfrac{\pi}{4}\le I\le\dfrac{\pi}{2}$.

解：选 C.因为$\dfrac{\sin x}{x}$在$[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$上单调递减，且最大值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$，最小值为$\dfrac{2}{\pi}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{2x}^{x^2}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t=$（　　　）.

(A)　$2\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x-2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x^2)$；　(B)　$2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x^2)-2\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x$；

(C) $2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x^2)+2\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x$； (D) $\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x^2)-\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x$.

解 B. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{2x}^{x^2}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t=2xe^{-x^2}\cos x^2-2e^{-2x}\cos 2x$

3. 下列式子中，正确的是（ ）.

（A） $\left(\int_x^0\cos t\mathrm{d}t\right)'=\cos x$. （B） $\left(\int_0^x\cos t\mathrm{d}t\right)'=\cos x$.

（C） $\left(\int_0^x\cos t\mathrm{d}t\right)'=0$. （D） $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t\right)'=\cos x$.

解：B

4. 下列广义积分收敛的是（ ）.

（A） $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. （B） $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. （C） $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. （D） $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$.

解：C

5. 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于（ ）.

（A） $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$. （B）$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$. （C）$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$. （D）$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$.

解：D

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}n\bullet\frac{3}{2}\int_0 x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}(1+x^n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(1+x^n)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}[(1+(\frac{n}{n+1})^n)^{\frac{3}{2}-1}]=(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$$

三、解答题

1.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=f(0)$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c 使 $f\,'(c)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=f(0)$，根据定积分中值定理可得，在 $[\frac{2}{3},1]$ 至少存在一点 ξ，使 $3\cdot f(\xi)\cdot\dfrac{1}{3}=f(\xi)=f(0)$.因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，则 $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上满足罗尔定理的条件，所以在 $(0,\xi)\subset(0,1)$ 内至少存在一点 c 使 $f\,'(c)=0$.

2. 求由 $\int_0^y e^t\,dt + \int_0^x \sin t dt = 0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　对方程两端同时对 x 求导得， $e^y \frac{dy}{dx} + \sin x = 0$，可得 $\frac{dy}{dx} = -\sin x e^{-y}$.

3. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x\sin x}$.

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^4}{\sin x + x\cos x} = \left(\lim_{x\to 0}\cos x^4\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}\right) = 1\times\frac{2}{1+1} = 1.$$

若用无穷小量等价代换定理，当 $x\to 0$ 时， $\sin x \sim x$，则 $x\sin x \sim x^2$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^4}{2x} = \lim_{x\to 0}\cos\ x^4 = 1\ .$$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x\ge 0, \\ x^2, & x<0, \end{cases}$ 计算 $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$.

解　设 $u = x-1$，则 $x = u+1$， $dx = du$，且当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $u = -\frac{1}{2}$；当 $x = 2$ 时， $u = 1$，

于是 $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(u)du = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} u^2 du + \int_0^1 e^{u+1}du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[e^{u+1}\right]_0^1$

$$= -\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^3 + e^2 - e = e^2 - e + \frac{1}{24}.$$

5. 计算 $\int_0^1 x\arctan x dx$ 。

$$\int_0^1 xarctgx dx = \frac{1}{2}\int_0^1 arctgx dx^2 = \frac{1}{2}\left[x^2 arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

6. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解　$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -[xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -[xe^{-x}]_0^{+\infty} - [e^{-x}]_0^{+\infty}$

$$= -[\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - 0] - [\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - e^0] = e^0 = 1$$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{x}=\int_{a}^{+\infty}4x^{2}e^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a

解：左端 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2a}{x+a}\right)^{x}=e^{-2a}$

$$右端=\int_{a}^{+\infty}\left(-2x^{2}e^{-2x}\right)d(-2x)=\int_{a}^{+\infty}-2x^{2}de^{-2x}=-2\left(x^{2}e^{-2x}\Big|_{a}^{+\infty}-\int_{a}^{+\infty}2xe^{-2x}dx\right)$$

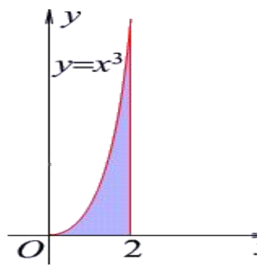
$$=2a^{2}e^{-2a}-2\int_{a}^{+\infty}xde^{-2x}=2a^{2}e^{-2a}-2\left(xe^{-2x}\Big|_{a}^{+\infty}-\int_{a}^{+\infty}e^{-2x}dx\right)$$

$$=\left(2a^{2}+2a+1\right)e^{-2a}$$

$\therefore\left(2a^{2}+2a+1\right)e^{-2a}=e^{-2a}$　　解之 $a=0$ 或 $a=-1$。

8.求由 $y=x^{3},x=2,y=0$ 所围成的图形，绕 x 轴及 y 轴旋转所得的两个不同的旋转体的体积.

解：如图，绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为



$$V_{x}=\int_{0}^{2}\pi y^{2}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\pi x^{6}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{7}\pi x^{7}\right]_{0}^{2}=\frac{128}{7}\pi$$

绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积为.

$$V_{y}=2^{2}\cdot\pi\cdot8-\int_{0}^{8}\pi x^{2}\,\mathrm{d}y=32\pi-\pi\int_{0}^{2}y^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y$$

$$=32\pi-\left[\frac{3}{5}\pi x^{\frac{5}{3}}\right]_{0}^{8}=\frac{64}{5}\pi$$

9. 计算椭圆 $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1$ 所围成的图形绕 y 轴旋转而成的立体体积.

解　所求旋转体可看作是右半椭圆 $x=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^{2}-y^{2}}$ 及 y 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所生成的立体．所对应的旋转体的体积元素为 $\mathrm{d}V=\pi x^{2}\,\mathrm{d}y=\pi\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{b^{2}-y^{2}}\right)^{2}\mathrm{d}y$.

于是所求立体的体积为 $V=\int_{-b}^{b}\pi\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{b^{2}-y^{2}}\right)^{2}\mathrm{d}y=\dfrac{\pi a^{2}}{b^{2}}\int_{-b}^{b}(b^{2}-y^{2})\,\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}\pi a^{2}b$.

10.计算曲线 $y=\ln x$ 相对应于 $x=\sqrt{3}$ 到 $x=\sqrt{8}$ 的一段曲线弧长.

解：由弧长的公式得:

$$s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+y'^{2}}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^{2}}}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}\,\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$