第四章　不定积分试题库

一、　填空题

1. 如果 $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\sin^2 x+C$，则 $f(x)$ =________.

解　因为 $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\sin^2 x+C$，故 $f(\sin x)\cos x=(\sin^2 x+C)'=2\sin x\cos x$

所以　$f(\sin x)=2\sin x$，　即 $f(x)=2x$

2. 若 $\sin 2x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$____________

解　由已知可知　$f(x)=(\sin 2x)'=2\cos x$，所以

$$\int xf(x)\mathrm{d}x=2\int x\cos x\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}\sin x=2x\sin x-2\int \sin x\mathrm{d}x=2x\sin x+\cos x+C$$

3. 不定积分 $\int\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=$______

解 $\int\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\cos\sqrt{t}d(\sqrt{t})=2\sin\sqrt{t}+C$

4. 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$_______

解　令　$e^x=u$，得 $f'(u)=\frac{\ln u}{u}$，故 $f(x)=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$

由 $f(1)=0$，可知 $C=0$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$

5　不定积分 $\int[f(x)+xf'(x)]\mathrm{d}x=$________

解　

$$\int[f(x)+xf'(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}f(x)$$

$$=\int f(x)\mathrm{d}x+xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x+C=xf(x)+C$$

6. 若 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$____________

解　

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x\left(\frac{\sin x}{x}\right)'-\frac{\sin x}{x}+C=\frac{x\cos x-2\sin x}{x}+C$$

7. 已知 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x+x+C$，则 $\int e^x f(e^x+1)\,\mathrm{d}x=$______________.

解　$\int e^x f(e^x+1)\,\mathrm{d}x=\int f(e^x+1)\,\mathrm{d}(e^x+1)=\sin(e^x+1)+e^x+1+C=\sin(e^x+1)+e^x+C$

8. $\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$_________________.

解 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} \mathrm{d}x = \int f'(\ln x)\mathrm{d}(\ln x) = f(\ln x) + C$

9. $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x =$ ______________ .

解 $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int \cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x} + C$.

10. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$ ______________ .

解 $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \arcsin^2 x\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$.

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x =$ ______________ .

解 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C$.

12. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则 $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x =$ ______________ .

解：因为 $f'(x) = e^{-x}$，所以 $f(x) = -e^{-x} + C_0$，$f(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x} + C_0$，

$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$，$\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + C_0\ln|x| + C$.

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} =$ __________.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2} = -2\arctan\sqrt{1-x} + C$

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} =$ ________

解 令 $t = \sqrt{x+1}$，则 $x = t^2 - 1$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$$

二、选择题

1．在区间 (a,b) 内，如果 $f'(x) = g'(x)$，则必有（ ）.

A． $f(x) = g(x)$

B． $f(x) = g(x) + C$(C为任意常数)

C． $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]$

D． $\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x$

解 因为 $f'(x) = g'(x)$，故 $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int g'(x)\mathrm{d}x$，所以 $f(x) = g(x) + C$， 故选 B

2. 设 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x =$（ ）.

A. $-\frac{1}{x}+C$　　B. $-\ln x+C$　　C. $\frac{1}{x}+C$　　D. $\ln x+C$

解 因为 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f'(\ln x)\mathrm{d}\ln x=f(\ln x)+C=\frac{1}{x}+C$, 故选 C

3．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=$（　　）.

A. $f(x)$　　B. $f(x)\mathrm{d}x$　　C. $f(x)+C$　　D. $f'(x)\mathrm{d}x$

解 因为 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，所以 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$ 故选 B

4. $\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}$ 的一个原函数是（　　）.

A. $\ln(2+\sin 2x)$　　B. $\ln(1+\sin 2x)$　　C. $\ln|x+\sin 2x|$　　D. $\ln(2-\sin 2x)$

解 由不定积分可知 $\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin 2x}{2+\sin 2x}=\ln(2+\sin 2x)+C$， 故选 A

5. 若 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $x\cos x-\sin x+C$　B. $x\sin x+\cos x+C$　C. $x\cos x+\sin x+C$　D. $x\sin x-\cos x+C$

解 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$

$=x(\sin x)'-\sin x+C=x\cos x-\sin x+C$　　故选 A

6. 设 $\ln f(x)=\cos x$， 则 $\int\frac{xf'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $x\cos x-\sin x+C$　　B. $x\sin x-\cos x+C$　　C. $x(\cos x+\sin x)+C$　　D. $x\sin x+C$

解 因为 $\ln f(x)=\cos x$，故 $[\ln f(x)]'=(\cos x)'$，即 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x$，所以

$\int(-x\sin x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\cos x=x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x=x\cos x-\sin x+C$　　故选 A

7. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x^2+1}+C$. 则 $\int xf(2x^2+1)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $x\sqrt{2x^2+1}+C$　B. $\frac{1}{4}\sqrt{2(2x^2+1)^2+1}+C$　C. $\frac{1}{4}\sqrt{2x^2+1}+C$　D. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C$

解 $\int xf(2x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int f(2x^2+1)\mathrm{d}(2x^2+1)=\frac{1}{4}\sqrt{2(2x^2+1)^2+1}+C$， 故选 B

8. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$， 则 $\int f(ax^2+b)x\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $F(ax^2+b)+C$　B. $2a\ F(ax^2+b)+C$　C. $\frac{1}{a}F(ax^2+b)+C$　D. $\frac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$

解 $\int f(ax^2+b)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int f(ax^2+b)\mathrm{d}(ax^2+b)=\frac{1}{2a}F(ax^2+b)+C$　故选 D

9. 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$， 则 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\sqrt{1-x^2}+C$　B. $x\sqrt{1-x^2}+C$　C. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$　D. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

解 由 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$ 得 $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$，所以

$$\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \qquad \text{故选 D}$$

10. 设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则 $\int \mathrm{e}^{-x} f(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x =$（　　）.

A. $F(\mathrm{e}^{x})+C$　　B. $-F(\mathrm{e}^{-x})+C$　　C. $F(\mathrm{e}^{-x})+C$　　D. $\dfrac{F(\mathrm{e}^{-x})}{x}+C$

解　$\int \mathrm{e}^{-x} f(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -\int f(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -F(\mathrm{e}^{-x})+C$　　故选 B

三、计算题

1. 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{e^x+1}}$

解　令 $\sqrt{e^x+1}=t$ ，　$x=\ln(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$$

2. 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+e^x}$

解 方法一 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}\,x}{1+e^{-x}} = -\int \frac{\mathrm{d}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}} = -\ln(e^{-x}+1)+C$

方法二 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}\,x = \int \mathrm{d}\,x - \int \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}\,x$

$$= \int \mathrm{d}\,x - \int \frac{\mathrm{d}(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$$

3. 求 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

解法 1　利用分部积分公式，则有

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x，$$

所以

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C .$$

解法 2　令 $\ln x = t$，$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，则

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sin t - \int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sin t - \mathrm{e}^t\cos t - \int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t，$$

所以

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t\sin t - \mathrm{e}^t\cos t)+C = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C .$$

4. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{x}=t$，$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，则

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int te^t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}e^t = 2te^t - 2\int e^t\mathrm{d}t = 2te^t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

5. 求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$

解法一 $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

解法二 $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}(x^2+1)$

$$=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+C$$

6. 求 $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

解 $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int xd\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$=x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

7. 设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$，求 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\sin^2 t$ 则

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\sin^2 t}}{\sqrt{1-\sin^2 t}}f(\sin^2 t)\mathrm{d}x=2\int\frac{\sin t}{\cos t}\frac{t}{\sin t}\sin t\cos t\mathrm{d}x$$

$$=2\int t\sin t\mathrm{d}x=2\sin t-t\cos t+C$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$$

8. 求 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$

解 $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$

9. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

解 设 $x=\tan t$（$|t|<\frac{\pi}{2}$），

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\tan^2 t\sec t}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

10. 求 $\int\frac{x+\arctan^2 x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解 $\int\frac{x+\arctan^2 x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan^2 x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{3}\arctan^3 x+C$$

12. 求 $\int\frac{\ln(x+1)}{(2-x)^2}\mathrm{d}\,x$

解 $\int\frac{\ln(x+1)}{(2-x)^2}\mathrm{d}\,x=\int\ln(x+1)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right)=\frac{\ln(x+1)}{2-x}-\int\frac{\mathrm{d}\,x}{(2-x)(x+1)}$

$$=\frac{\ln(x+1)}{2-x}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{\ln(x+1)}{2-x}-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|+C$$

13 求 $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\frac{1+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x\ .$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})+C$$

14 求不定积分 $\int\lim_{n\to\infty}\frac{x(e^{nx}-1)}{e^{nx}+1}\mathrm{d}x$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{x(e^{nx}-1)}{e^{nx}+1}=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$

故 $\int\lim_{n\to\infty}\frac{x(e^{nx}-1)}{e^{nx}+1}\mathrm{d}x=\int|x|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C_1, & x>0\\ C_1, & x=0\\ -\frac{x^2}{2}+C_2, & x<0\end{cases}$

因为 $f(x)$ 的原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上每一点都连续，所以

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)=\lim_{x\to0^-}(-\frac{x^2}{2}+C_2)\,,$$

从而有 $C_1=C_2$. 记 $C_1=C$ ，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C, & x\ge0,\\ -\frac{x^2}{2}+C, & x<0.\end{cases}$$