华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2013~2014 学年第 2 学期　　　　考试科目：高等数学 AⅡ

考试类型：（闭卷）考试　　　　考试时间：**120** 分钟

学号________________姓名____________年级专业______________________

装

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

订

得分	

一、**填空题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

线

1．微分方程 $xy'=y\ln y$ 的通解__________。

2. 设有向量 $\vec{a}=(4,3,0)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，则数量积 $\vec{a}\times\vec{b}=$__________。

3．过点 $(-1,1,0)$ 且与平面 $3x+2y-z-13=0$ 垂直的直线方程是_____________。

4．设 $z=\sin(xy^2)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________。

5．交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$______。

得分	

二、**单项选择题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．设 L 为直线 $x=0, y=0, x=1$ 及 $y=1$ 所围成的正方形边界，取正向，则 $\oint_L (x^3+xy)dx+(x^2+y^2)dy$ 等于　　　　（　　）

A．-1　　　　B．1　　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\dfrac{1}{4}$

2．已知 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则垂直于 $\vec{a}$ 且垂直于 x 轴的单位向量是（　　）

A．$\pm(\vec{i}-\vec{k})$　　B．$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j}-\vec{k})$　　C．$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j}+\vec{k})$　　D．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

3．设 $z=\ln(xy)$，则 $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．$dy-dx$　　B．$dx+dy$　　　C．$dx-dy$　　　　D．0

4．对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，有　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．当 $p>1$ 时条件收敛　　　　　　　　B．当 $p>1$ 时绝对收敛

C．当 $0<p\le 1$ 时绝对收敛　　　　　　D．当 $0<p\le 1$ 时发散

5．设 $0\le u_n<\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中必定收敛的是　　　　　　（　　　）

A．$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　　C．$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$

得分	

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1.计算二重积分 $\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,d\sigma$，其中 D 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$。

2.设 f,g 均为连续可微函数，$u=f(x,xy)g(x+xy)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$。

装

订

线

3．设由方程 $xyz=e^z$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz 。

4. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$ 的敛散性。

5.使用间接法将函数 $f(x)=\frac{4}{4-x^2}$ 展开成 x 的幂级数,并确定展开式成立的区间。

6．求微分方程 $y'-x\cos x=\frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$ 的特解。

7．计算二重积分 $\iint\limits_{D}x\sqrt{y}d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 所围成的闭区域。

得分	

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1． L 是连接以 $(-1,0)$ 为起点和 $(1,2)$ 为终点的一条曲线，问当 a 为何值时，曲线积分 $\int_L (6xy^2 - y^3)dx + a(xy^2 - 2x^2y)dy$ 与积分路径无关，并计算此时的积分值。

2．要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，才能使它的表面积最小。

3．设 $f(x)$ 在 $|x|<1$ 上有定义，在 $x=0$ 某邻域有一阶连续的导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = a > 0$，求证：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} f(\frac{1}{n})$ 收敛。

装

订

1.5CM

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2013~2014 学年第 2 学期　　　　考试科目：高等数学 AⅡ参考答案

一、**填空题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．$y=e^{Cx}$　2．(6,-8,-11)　3．$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$　4．$2xy\cos(xy^2)$

5．$\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

二、**单项选择题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．C　2．B　3．B　4．B　5．D

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1．计算二重积分 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，其中 D 是 $\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$。

解：在极坐标中 D 为 $\{(\theta,r)\Big|0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le 1\}$………………3 分

$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma=\iint\limits_D \theta r d\theta dr$………………5 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_0^1 rdr$………………6 分

$=\frac{\pi^2}{64}$………………7 分

2.设 f,g 均为连续可微函数，$u=f(x,xy)g(x+xy)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=(f_1'(x,xy)+yf_2'(x,xy))g(x+xy)+(1+y)f(x,xy)g'(x+xy)$…4 分

$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'(x,xy)g(x+xy)+xf(x,xy)g'(x+xy)$………………7 分

3.设由方程 $xyz=e^z$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz。

解：设 $F(x,y,z)=xyz-e^z$………………1 分

$F_x=yz, F_y=xz, F_z=xy-e^z$………………4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy}$ ………………6 分

$dz=\frac{z}{e^z-xy}(ydx+xdy)$ ………………7 分

4.判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$的敛散性。

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!n^n}$ ………………4 分

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{2}<1$ ………………………………6 分

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{4^n n!}$发散………………………………7 分

5.使用间接法将函数$f(x)=\frac{4}{4-x^2}$展开成x的幂级数，并确定展开式成立的区间。

解:∵$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\quad(-1<x<1)$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots\quad(-1<x<1)$ ………………1 分

$f(x)=\frac{4}{4-x^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{x}{2}})$ ………………3 分

$=1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{16}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2^{2n}}+\cdots$ ………………5 分

展开式成立的区间为$(-2,2)$ ………………7 分

6.求微分方程$y'-x\cos x=\frac{y}{x}$满足初始条件$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$的特解。

解：原方程化为$y'-\frac{y}{x}=x\cos x$

$y=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int x\cos x\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}+C)$ ………………2 分

$=x(\sin x+C)$ ………………5 分

由$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$，得$C=-2$，特解为$y=x(\sin x-2)$ ………………7 分

7.计算二重积分$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$，其中D是由曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$所围成的闭区域。

装

订

1.5CM

线

解：$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,x^2\le y\le \sqrt{x}\}$………………2 分

$\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy$ ………………4 分

$=\int_0^1 \frac{2}{3}(x^{\frac{7}{4}}-x^4)dx$ ………………5 分

$=\frac{6}{55}$………………7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

4．1. L 是连接以 $(-1,0)$ 为起点和 $(1,2)$ 为终点的一条曲线，问当 a 为何值时，曲线积分 $\int_L (6xy^2-y^3)dx+a(xy^2-2x^2y)dy$ 与积分路径无关，并计算此时的积分值。

解：令 $P=6xy^2-y^3, Q=a(xy^2-2x^2y)$，则

$\frac{\partial Q}{\partial x}=a(y^2-4xy), \frac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2$………………2 分

令 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，得 $a=-3$，曲线积分与路径无关………………3 分

选择路径 $L=L_1+L_2, L_1: y=0(-1\le x\le 1), L_2: x=1(0\le y\le 2)$， ………………5 分

$\int_L (6xy^2-y^3)dx+a(xy^2-2x^2y)dy=\int_0^2 -3(y^2-2y)dy=4$………………7 分

2.要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，才能使它的表面积最小。

解：设水池的长、宽、高分别为 x,y,z，水池的表面积为 A，则

$A=xy+2xz+2yz,\quad xyz=k$ ………………2 分

令 $F=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-k)$………………4 分

$\begin{cases} F_x=y+2z+\lambda yz=0 \\ F_y=x+2z+\lambda xz=0 \\ F_z=2x+2y+\lambda xy=0 \\ xyz=k \end{cases}$………………5 分

解得 $x=y=\sqrt[3]{2k}, z=\frac{\sqrt[3]{2k}}{2}$ ………………7 分

3. 设 $f(x)$ 在 $|x|<1$ 上有定义，在 $x=0$ 某领域有一阶连续的导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，求证：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$ 收敛。

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，所以当 n 充分大后 $f(\frac{1}{n})>0$ ………………1 分

又因为改变级数前面有限项不影响级数敛散性，所以可认为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 是正项级数………………2 分

（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a>0$ ………………3 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散………………4 分

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$（连续），所以 $f(0)=0$ ………………5 分

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$

又 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，得 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=a>0$

由极限性质得，当 n 充分大时，$f(\frac{1}{n})$ 单调递减………………5 分

又由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(\frac{1}{n})=0$

由莱布尼兹判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{n})$ 收敛。………………7 分