第十章　无穷级数

一、选择题

1. 设$\{u_n\}$是数列,则下列命题正确的是(　　);

A 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

B 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

C 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

D 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

答案：A

解:根据级数的性质“如果级数收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛”,A正确;

设$u_{2n-1}=1,u_{2n}=-1$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散,所以B不对;

设$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,但级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})$发散,所以C不对;

设$u_n=\frac{1}{n}$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$收敛,但级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散,所以D不对.

2. 下列级数条件收敛的是(　　);

A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$　　　　B $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{2}}$

C $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}$　　　　D $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)}{n^2}$

答案：D

解:对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$,由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,所以根据比值审敛法知,该级数收敛,

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$绝对收敛,所以 A 不对;

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{2}}$,易知其一般项的极限不存在,因此该级数发散,所以 B 不对;

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}$就是$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,所以发散,故 C 不对;

首先,对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$,由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=1$,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$发散,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2}$不是绝对收敛;其次,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2}$是交错级数,且满足莱布尼兹条件,因此收敛;由此可知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2}$条件收敛. 故 D 正确.

3．常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$（ ）.

A．条件收敛　　B．绝对收敛　　C．发散　　D．可能收敛，也可能发散

答案：A

解：由莱布尼茨定理知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$条件收敛.

4．正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛是级数$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$收敛的（ ）.

A．必要条件　　B．充分条件　　C．充分必要条件　　D．既非充分也非必要条件

答案：B

解：若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$，由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$收敛，反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不一定收敛。如$a_n=\frac{1}{n}$。故应选 B。

5．级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^p$（$p$为常数）（ ）.

A．一定条件收敛　　B．一定绝对收敛　　C．一定发散　　D．收敛性与常数p有关

答案：D

解：$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$，$|u_n|=n^p=\frac{1}{n^{-p}}$，故当$-p>1$，即$p<-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛；当$0<-p\le 1$，即$-1\le p<0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，但由莱布尼茨定理知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，即原级数条件收敛；当$-p\le 0$，即$p\ge 0$时，$\lim_{n\to\infty}u_n\ne 0$，原级数发散。故应选 D。

二、填空题

1．正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+a^n}$（$a>0$）当$a$________时收敛.

答案：$a\le 1$

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+a^n}{2+a^{n+1}}=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{a^n}}{a+\frac{2}{a^n}}=\dfrac{1}{a}, & a>1\\ 1, & a\le 1\end{cases}$，由此可知当$a>1$时级数收敛；当$a\le 1$时级数发散。

2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$当$\alpha$满足______时收敛, 在______发散;

答案：$\alpha>\frac{1}{2}$；$\alpha\le\frac{1}{2}$

解: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}=\frac{1}{2}$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$在$\alpha+\frac{1}{2}>1$时收敛, 在$\alpha+\frac{1}{2}\le 1$时发散, 因此根据比较审敛法, 原级数在$\alpha>\frac{1}{2}$时收敛, 在$\alpha\le\frac{1}{2}$时发散.

3. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n+1)}$的收敛区间为______;

答案：$(0,2)$

解: 令$x-1=t$, 则原级数成为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$, 对于该级数, 由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2n+1}}=1,$$

所以$R=1$, 故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$的收敛区间为$(-1,1)$, 从而原级数的收敛区间为$(0,2)$

4．设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$在$x=3$处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为$R=$_______.

答案：$R=4$

解：令 $t=x+1$，则原幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$，由题设它在 $t=4$ 处条件收敛，由 Abel 定理可知，它在区间 $(-4,4)$ 内绝对收敛，因此其收敛半径 $R\ge 4$。若 $R>4$，则它在 $t=4$ 处绝对收敛，与题设“在 $t=4$ 处条件收敛”矛盾。故只能有 $R=4$。

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x}$ 在 $(-1,1)$ 内的幂级数展开式为______;

答案：$f(x)=\dfrac{x^3}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+3}$，$x\in(-1,1)$

解:由于 $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$x\in(-1,1)$ ， 所以 $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

从而 $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+3}$，$x\in(-1,1)$

三、计算题或者证明题

1.判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{1+\mathrm{e}^n}$ 的敛散性。

解:因为 $\dfrac{3^n}{1+\mathrm{e}^n}<\dfrac{3^n}{\mathrm{e}^n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{\mathrm{e}^n}}=\dfrac{3}{\mathrm{e}}>1$，所以根据根值审敛法可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{\mathrm{e}^n}$ 发散，从而由比较审敛法知，原级数发散。

2. 判定级数 $(1-\sin 1)+\left(\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)+\cdots$ 的敛散性。

解:该级数的一般项为 $u_n=\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{3\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}{3\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{6},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 收敛，因此根据比较审敛法知，原级数收敛.

3. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}-2)$ 的敛散性。

解:因为 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-e^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}\right)=2$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，因此根据比较审敛法知，原级数收敛.

4. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n-2^n}$的敛散性。

解:对于该正项级数,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}}{\frac{n\cdot 2^n}{3^n-2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1,$$

所以根据比值审敛法知,原级数收敛.

5. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin n}$的敛散性。

解:对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\sin n}$,由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-\sin n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-\sin n}=1$,并且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\sin n}$发散,从而原级数不是绝对收敛.

原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin n}$为交错级数,并且有$|u_n|>|u_{n+1}|$,$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$,满足莱布尼兹条件,故原级数收敛.从而原级数条件收敛.

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$的敛散性。

解:对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$,由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-\ln n}=1$,并且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$发散,从而原级数不是绝对收敛.

原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$为交错级数,并且有$|u_n|>|u_{n+1}|$,$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$,满足莱布尼兹条件,故原级数收敛.从而原级数条件收敛.

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域，并求和函数.

解：设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$，上式两边对$x$求导，得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}\qquad(-1<x<1)$$

两边从0到x积分，并注意到$s(0)=0$，得

$$s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad(-1<x<1).$$

故所求和函数为$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$(-1<x<1)$.

8. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$的收敛域，并求和函数.

解：$u_n=(-1)^{n-1}nx^{n-1}$，由于$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，所以该级数的收敛区间为$(-1,1)$.

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$，两边从 0 到$x$逐项积分得

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=\frac{x}{1+x}$$

两边逐项求导得$s(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$，$x\in(-1,1)$

9. 将函数$\cos x$展开成（$x+\frac{\pi}{3}$）的幂级数.

解：$\cos x=\cos\left[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$

因为$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ (-\infty<x<+\infty)$，$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (-\infty<x<+\infty)$，

所以$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$，$(-\infty<x<+\infty)$.

10. 将$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$展开为（$x-2$）的泰勒级数.

解：$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}-\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{x-2}{5}}$

因为$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (-1<x<1)$，

所以$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{4}\right)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{5}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{5^{n+1}}\right](x-2)^n$，$(-2<x<6)$.