第 11 章 微分方程

一、选择题

1. 满足方程 $f(x)+2\int_0^x f(x)dx=x^2$ 的解是 $f(x)=($　$)$.

(A) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+x+\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$

(C) $ce^{-2x}+x-\frac{1}{2}$　　(D) $ce^{-2x}+x+\frac{1}{2}$

解： 这里实际上给出了初始条件: $f(0)=0,$ 两边求导得：$f'(x)+2f(x)=2x$，解此一阶线性微分方程得：

$f(x)=e^{-\int 2dx}\left(\int 2xe^{\int 2dx}dx+C\right)=x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}$，由初始条件知：$C=\frac{1}{2}$，故：$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$. 故选 (B).

2. 若 $y=y(x)$ 是方程 $x^2y'+xy=y^2$ 的满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解，则 $\int_1^3 y(x)dx=($　$)$.

(A) $\ln 5$　　(B) $\ln 3$　　(C) $\ln 2$　　(D) $\ln 7$

解： 方程两边同除以 x^2，原方程变为齐次方程形式：$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2$，令 $\frac{y}{x}=u\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，解得通解为 $y-2x=Cyx^2$，代入初始条件得：$C=-1,$ 故 $y=\frac{2x}{1+x^2}$，因此 $\int_1^3 y(x)dx=\ln(1+x^2)|_1^3=\ln 5$. 所以选(A).

3. 函数 $y=y(x)$ 在点 x 处的增量满足 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x)$　$(\Delta x\to 0)$ 且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=($　$)$.

(A) 2π　　(B) π　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

解： 当 $\Delta x\to 0$ 时，得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow y=Ce^{\arctan x}$, 又 $y(0)=\pi$，得 $C=\pi$,因此 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$. 选(D).

4. 设线性无关函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程：$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，c_1,c_2 是特定常数，则此方程的通解是（ ）.

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$ (B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_2+c_3)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$ (D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

解：这是有关线性方程解的结构性质问题，由 y_1-y_3 和 y_2-y_3 是相应齐次方程的解，且若 $\lambda_1(y_1-y_3)+\lambda_2(y_2-y_3)=0$， 则：$\lambda_1y_1+\lambda_2y_2-(\lambda_1+\lambda_2)y_3=0$,又已知函数 y_1,y_2,y_3 线性无关,由线性无关的定义知：$\lambda_1=0,\lambda_2=0,-(\lambda_1+\lambda_2)=0$，即：$\lambda_1=\lambda_2=0$，这说明 y_1-y_3 和 y_2-y_3 线性无关，故通解为：$y_1+c_1(y_1-y_3)+c_2(y_2-y_3)$，故选：（D）.

二、填空题

1. 一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的通解_______________; 通过点(1,4)的特解_________________; 满足条件 $\int_0^1 ydx=2$ 的解__________________.

解：分离变量得 $dy=2xdx$，两边积分得通解：$y=x^2+c$；通过点 $(1,4)$，即 $4=1^2+c$，解得：$c=3$，所以此特解为：$y=x^2+3$；满足条件 $\int_0^1 ydx=2$ 的解，即：$\int_0^1(x^2+c)dx=2$，解得：$c=\frac{5}{3}$,所以满足该条件的解为：$y=x^2+\frac{5}{3}$。

2. 写出具有下列性质的曲线所满足的微分方程，（1）：曲线在点 (x,y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方______________________________; （2）：曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比_______________.

解： (1) 设曲线为 $y=y(x)$，则曲线在点 (x,y) 处切线斜率为 y'，由条件知 $y'=x^2$，即为所求的微分方程。（2）设曲线为 $y=y(x)$，由条件知: $y'=kx$（$k>0$ 为常数），即为所求的微分方程。

3. 通解为 $c_1e^x+c_2x$ 的微分方程是_______________________.

解：由题目知，$y'=c_1e^x+c_2$，$y''=c_1e^x$，消去 c_1,c_2 得：$(x-1)y''-xy'+y=0$。

4. 微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=3$ 的特解是__________________.

解： 原方程是 $y''=f(x,y')$ 型的，设 $y'=p$，代入方程并分离变量后，有

$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$，两边积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+C$，即

$p=y'=C_1(1+x^2),(C_1=\pm e^C)$，由条件 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，所以 $y'=3(1+x^2)$，两端积分得 $y=x^3+3x+C_2$，又由条件 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，于是所求特解为：$y=x^3+3x+1$.

5. 微分方程 $yy''+1=y'^2$ 的通解为______________________________.

解： 此方程不显含 x，故令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，于是所给方程化为

$yp\dfrac{dp}{dy}+1=p^2\Rightarrow\dfrac{p}{p^2-1}dp=\dfrac{dy}{y}$，积分得 $\dfrac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln y-\ln C_1$.

6. 微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为___________________________.

解: 特征方程为 $r^2-2r+2=0$，特征根为一对共轭复根 $r=1\pm i$, 故对应的齐次方程通解为：$Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$，而 $\lambda=1$ 不是特征根，故设特解为：$y^*=Ae^x$，代入原方程得 $A=1$, 从而 $y^*=e^x$，故原方程通解为：$y=Y+y^*=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x$.

三、计算题或证明题

1. 试证：$y=c_1e^{c_2-3x}-1$ 是方程 $y''-9y=9$ 的解，但不是它的通解，其中 c_1,c_2 是任意常数。

解： 方程 $y=c_1e^{c_2-3x}-1$，可以写成 $y=c_1e^{c_2}\times e^{-3x}-1$，我们记 $c=c_1e^{c_2}$，则 $y=ce^{-3x}-1$，将其代入方程 $y''-9y=9$，得

方程左端 $=(ce^{-3x}-1)''-9(ce^{-3x}-1)\ =(-3ce^{-3x})'-9ce^{-3x}+9=9ce^{-3x}-9ce^{-3x}+9=9$

$\equiv$ 方程的右端

所以 $y=c_1e^{c_2-3x}-1$ 是方程的解，但因解中实际只含有一个独立的任意常数，故它不是该方程的通解。

2. 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x$，并求满足初始条件：当 $x=0$ 时，$y=1$ 的特解。

解： 将变量分离，得 $\dfrac{dy}{y^2}=\cos xdx$,两边积分，即得 $-\dfrac{1}{y}=\sin x+c$，因而，通解为 $y=-\dfrac{1}{\sin x+c}$ (c 是任意常数)。此外，方程还有解 y=0.，它是不包含在通解中的，需要补上。 为了确定所求的特解，以 $x=0,y=1$ 代入通解中以决定任意常数 c，得到 $c=-1$，

因而，所求的特解为 $y=\frac{1}{1-\sin x}$ 。

3. 求 $xy'=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解。

解： 原方程可改写成 $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，这是齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=u+xu'$，代入原方程得 $u+xu'=u\ln u\Rightarrow\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$, 即 $\ln|\ln u-1|=\ln|cx|\Rightarrow\ln u=1+cx$，故通解为

$y=xe^{1+cx}$ 。

4. 求线性方程 $\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x}$ 的解。

解法 1： 该方程是一阶非齐次线性方程，先用常数变易法求其通解其对应的齐次线性方程为 $\frac{dy}{dx}+3y=0$ ，由分离变量法得其通解为 $y=Ce^{-3x}$, 然后假设 $y=C(x)e^{-3x}$ 是原方程的解，代入原方程得 $C'(x)=e^{5x}$ ，积分得 $C(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C$ ，所以原方程的通解为 $y=Ce^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$ 。

解法 2： 利用公式直接求其通解，这里 $P(x)=3,Q(X)=e^{2x}$.由线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式 $y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$，得原方程的通解为

$$y=e^{-\int 3dx}(\int e^{2x}\bullet e^{\int 3dx}dx+C)=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}\text{ 。}$$

5. 求方程 $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$ 的通解.

解： 原方程可写成 $\frac{dy}{dx}=\frac{6}{x}y-xy^2$ ，与 Bernoulli 方程形式一致。$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$ ($n\neq 0,1$ 是常数)，在 Bernoulli 方程求解过程中，当 $n>0$ 时，方程还有解 $y=0$。需要注意补上！此题是 $n=2$ 时的伯努利方程，令 $z=y^{1-n}=y^{-1}$ ，记算得 $\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$，代入原方程得到

$\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x$ ，这是线性方程，利用线性方程的求解公式，可求得它的通解为 $z=\frac{c}{x^6}+\frac{x^2}{8}$，代回原来的变量 y ，得到 $\frac{1}{y}=\frac{c}{x^6}+\frac{x^2}{8}$，或 $\frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=c$，这就是原方程的通解。此外，方程还有解 $y=0$。

6. 判断方程 $(y\sin x-1)dx-\cos xdy=0$ 是否为全微分方程，并求出其解。

解：这里 $P=y\sin x-1, Q=-\cos x$，由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\sin x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以该方程是全微分方程。记

$(y\sin x-1)dx-\cos xdy=dU(x,y)$, 以下用三种方法来求 $U(x,y)$.

解法 1： 线积分法，选择积分路径为折线路径： $(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$,

即选择了 M_0RM 路径，则

$$U(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(y\sin x-1)dx-\cos xdy.$$

$$=\int_0^x -1dx+\int_0^y -\cos xdx$$

$$=-x-y\cos x.$$

解法 2： 凑微分法，重组方程的左端，得

方程左端 $=-dx+(y\sin xdx-\cos xdy)=-dx-d(y\cos x)=d(-x-y\cos x)$

所以 $U(x,y)=-x-y\cos x.$

解法 3： 偏积分法，由于 $\dfrac{\partial U}{\partial x}=y\sin x-1, \dfrac{\partial U}{\partial y}=-\cos x.$ 所以

$U=\int -\cos xdy=-y\cos x+C(x)$，其中 $C(x)$ 是任意的可微数，在上式两端分别对 x 求导，得 $\dfrac{\partial U}{\partial x}=y\sin x+C'(x)$, 结合前面的式子得 $y\sin x+C'(x)=y\sin x-1$,所以 $C'(x)=-1$. 故可取 $C(x)=-x$, 所以 $U(x,y)=-x-y\cos x.$

由上可知此方程的通解为 $-x-y\cos x=C$ (其中 C 为任意的常数)。

7. 求下列高阶微分方程的通解。

(1) $y'''=xe^x$； (2) $xy''+y'=\ln x$； (3) $y''+\dfrac{2}{1-y}y'^2=0.$

解： (1) 观察原方程是 $y^{(n)}=f(x)$ 型的方程，对此类型的高阶微分方程，只需连续积分 n 次即可求出通解。

因为 $y'''=xe^x$，所以 $y''=\int xe^x dx=xe^x-e^x+C_1.$

再积分一次得 $y'=\int(xe^x-e^x+C_1)dx=xe^x-2e^x+C_1x+C_2$. 第三次积分得

$y=\int(xe^x-2e^x+C_1x+C_2)dx$

$$= xe^x - 3e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3.$$

即为所求的通解。

（2）该方程属于 $y'' = f(x, y')$ 型的方程，这类题只需做变换 $y' = p$,化原方程为一阶微分方程求出通解，代回 $p = y'$，即可求出原方程的通解。

令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，代入原方程，得 $xp' + p = \ln x.$ 即 $(xp)' = \ln x$，积分得 $xp = x\ln x - x + C_1$，把 $p = y'$ 代入该方程整理得 $y' = \ln x - 1 + \frac{C_1}{x}.$

再积分，得所求通解为

$$y = \int (\ln x - 1 + \frac{C_1}{x})dx = (x - C_1)\ln x - 2x + C_2.$$

(3) 该方程属于 $y'' = f(y, y')$ 型，令 $y' = p, p = p(y)$，利用复合函数的求导法则得 $y'' = p\frac{dp}{dy}$, 代入原方程得 $p\frac{dp}{dy} + \frac{2}{1-y}p^2 = 0$.

当 $p \neq 0$ 时，分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{2}{y-1}dy.$ 积分得 $\ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln C_1$，即

$p = C_1(y-1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2.$ 分离变量得 $\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx.$ 积分得

$-\frac{1}{y-1} = C_1x + C_2$，即 $y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2}.$

当 $p = 0$时，$y = C(\neq 1)$ 亦是方程的解（已隐含于上式中）。

综上所述，所求通解为 $y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2}.$ 其中 C_1, C_2 为任意常数。

8 求下列常系数齐次线性方程的通解。

(1) $3y'' - 2y' - 8y = 0$； (2) $y'' - 2y' + 5y = 0$； (3) $9y'' - 30y' + 25y = 0$ 。

解：（1）相应特征方程为$3r^2 - 2r - 8 = 0$，得两特征根为$r_1 = -\frac{4}{3}, r_2 = 2$，

这是属于两个不相等特征根的情形，故通解为： $y = C_1e^{-\frac{4}{3}x} + C_2e^{2x}$.

（2）所给方程的特征方程为$r^2 - 2r + 5 = 0$，其根为$r_{1,2} = 1 \pm 2i$ 为一对共轭复根，因此，所求通解为 $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$

(3) 所给方程的特征方程为 $9r^2-30r+25=0$，解得 $r=\frac{5}{3}$（二重根），故通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{5}{3}x}$.

9. 求非齐次线性微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解。

解：先求其对应的齐线性方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解，这里特征方程为

$r^2-2r-3=0$ 有两个根 $r_1=3, r_2=-1,$ 因此，通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。再求非齐次线性方程的一个特解，这里 $f(x)=3x+1,$ 所以为 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中 $\lambda=0$，又 $\lambda=0$ 不是特征根，故可取特解形如 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}(k=0,\lambda=0)$，即可设为 $y^*=A+Bx$，其中 A,B 为待定常数，为了确定 A,B，将 $y^*=A+Bx$ 代入原方程，得到 $-2B-3A-3Bx=3x+1$，比较系数得 $\begin{cases}-3B=3\\-2B-3A=1\end{cases}$，由此得 $A=\frac{1}{3},B=-1$，从而 $y^*=\frac{1}{3}-x$，因此原方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}$.

10. 求非齐次线性微分方程 $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$ 的通解。

解：原方程为 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型非齐次线性微分方程，特征方程为 $r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3=0$ 有三重根 $r_{1,2,3}=-1,$ 故有形状为 $y^*=x^3(A+Bx)e^{-x}$ 的特解，将它代入方程得

$(6A+24Bx)e^{-x}=e^{-x}(x-5)$，比较系数得 $A=-\frac{5}{6},B=\frac{1}{24}$，从而 $y^*=\frac{1}{24}x^3(x-20)e^{-x}$，故方程的通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}+\frac{1}{24}x^3(x-20)e^{-x}$. 其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.