第六章　空间解析几何与向量代数

一、选择题

1．设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=2$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$（）.

A．-1；　　B．7；　　C．-7；　　D．1

答案：C

解：由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{a}|^2$，

同理$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{b}|^2$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{c}|^2$，三式相加可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-7$．C

2．设有直线L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面$\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线$L$（　）.

A．平行于π；　B．在π上；　C．垂直于π；　D．与π斜交.

答案：C

解：因为直线的方向向量$\vec{a}=(1,3,2)\times(2,-1,-10)=-7(4,-2,1)$,平面$\pi$的法向量为$\vec{n}=(4,-2,1)$,所以　$\vec{a}\parallel\vec{n}$，所以直线L垂直于π，答案选C．

3．设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与$L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$则$L_1$与$L_2$的夹角为（）.

A．$\dfrac{\pi}{6}$；　B．$\dfrac{\pi}{4}$；　C．$\dfrac{\pi}{3}$；　D．$\dfrac{\pi}{2}$.

答案：C

解：L_1的方向向量$\overrightarrow{s_1}=(1,-2,1)$，而$L_2$的方向向量为$\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1,-1,2).$

故L_1与L_2的夹角余弦$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}|}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}=\dfrac{1}{2}$，交角为$\theta=\dfrac{\pi}{3}$．

4. 曲线$\begin{cases} x^2+4y^2-z^2=16 \\ 4x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$在$xOy$坐标面上投影的方程是（）.

A．$\begin{cases} x^2+4y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$；　　B．$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$；　　C．$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$；　　D．$x^2+y^2=0$.

答案：C

解：从$\begin{cases} x^2+4y^2-z^2=16 \\ 4x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$消去$z$坐标即得曲线的投影柱面方程为$x^2+y^2=4$，因而在$xoy$坐标面上投影的方程$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$，答案选C.

二、填空题

1．设$\boldsymbol{a}=(3,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\frac{4}{3},k)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$k=$___. 若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则$k=$___.

答案：$k=-\frac{26}{3}$，$k=\frac{2}{3}$

解：若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,2,1)\cdot(2,\frac{4}{3},k)=6+\frac{8}{3}+k=0$，$\therefore k=-\frac{26}{3}$.

若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\frac{3}{2}=\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{k}$，$\therefore k=\frac{2}{3}$.

2、若$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$ $\underline{\sqrt{2}}$ ，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ______ ；

答案：0

解 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}=0$.

3. 经过已知点$(1,-1,4)$和直线$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{5}=\frac{1-z}{1}$的平面方程是_____.

答案：$4x-y-3z+7=0$.

解：已知直线的方向向量为 $\vec{s}=(2,5,1)$，点$(1,-1,4)$和点$(-1,0,1)$在所求平面上，所求平

面的法向量为$\vec{n}=(2,5,1)\times(2,-1,3)=4(4,-1,-3)$,故平面方程为

$4(x-1)-(y+1)-3(z-4)=0$ 即 $4x-y-3z+7=0$.

4．一条直线过点(2, -3, 4)，且垂直于直线$x-2=1-y=\frac{z+5}{2}$和$\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-2}=z-1$，则该直线方程为__________.

答案：$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=z-4$

解：已知直线的方向向量分别为$\overrightarrow{a_1}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{a_2}=(3,-2,1)$,所以所求直线方程的方向向量为 $\vec{a}=\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}=(3,5,1)$,故所求直线方程为 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=z-4$.

5．与直线$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$都平行，且过原点的平面方程为______.

答案：$x-y+z=0$

解：过原点的平面方程可设为$Ax+By+Cz=0$ ，由题设知(A,B,C)垂直$\overrightarrow{a_1}=(0,1,1)$及$\overrightarrow{a_2}=(1,2,1)$，故可取$(A,B,C)=\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}=(0,1,1)\times(1,2,1)=(-1,1,-1)$，从而所求平面方程为$x-y+z=0$.

6．设曲面方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，当$a=b$时，曲面可由$xOz$面上以曲线_______绕_____轴旋转而成，或由yOz面上以曲线__________绕__________轴旋转而成.

答案：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$z$；$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$z$.

解：当$a=b$时，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$可由$xoz$面上椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转而成；或由$yoz$面上椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕$z$轴旋转而成.

三、解答题

1、设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

解：由 $\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，$\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直有

$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$，$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$ 即 $7\left|\vec{a}\right|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\left|\vec{b}\right|^2=0$，$7\left|\vec{a}\right|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\left|\vec{b}\right|^2=0$ 由上述两式解得 $\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\left|\vec{a}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，从而 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$，

所以 $\cos(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{1}{2}$，即 $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

2、已知直线 L 过点 $M_0(1,0,-2)$，且与平面 $\pi:3x+4y-z+6=0$ 平行，又与直线 $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}$ 垂直，求直线 L 的方程.

解：由于所求直线 L 与平面 π 平行，又与直线 L_1 垂直，因此，直线 L 的方向向量 $\vec{s}$ 既垂直于平面 π 的法向量 $\vec{n}=(3,4,-1)$，也垂直于直线 L_1 的方向向量 $\overrightarrow{s_1}=(1,4,1)$，

于是 $\vec{s}=\overrightarrow{s_1}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&4&1\\3&4&-1\end{vmatrix}=(-8,4,-8)$，又直线 L 过点 $M_0(1,0,-2)$，故所求直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

3、已知直线 L 过点 $B(1,-2,3)$，与 z 轴相交，且与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ 垂直，求直线 L 的方程.

解：设直线 L 与 z 轴的交点为 $A(0,0,z)$，则 AB 与 L_1 垂直，即向量 $(1,-2,3-z)$ 与 $(4,3,-2)$ 垂直，即 $(1,-2,3-z)\cdot(4,3,-2)=0\Rightarrow z=4$，则 L 的方向向量 AB 为 $(1,-2,-1)$，从而所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

4、求经过点 $(2,3,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0\\x-y+z+4=0\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}x+3y-1=0\\y+z-2=0\end{cases}$ 相交的直线方程.

解法 1：　先求过 L_1 与（2，3，1）的平面方程 π，过 L_1 的平面方程可设为

$$\lambda(x+y)+x-y+z+4=0,$$

将（2，3，1）代入上式，得 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$，所以 $\pi: x-9y+5z+20=0$.

然后再求 L_2 与 π 的的交点，由 $\begin{cases} x-9y+5z+20=0 \\ x+3y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$，得 $x_0=-\dfrac{76}{17}, y_0=\dfrac{31}{17}, z_0=\dfrac{3}{17}$，

故所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{x_0-2}=\dfrac{y-3}{y_0-3}=\dfrac{z-1}{z_0-1}$ 即 $\dfrac{x-2}{55}=\dfrac{y-3}{10}=\dfrac{z-1}{7}$.

解法 2 由解法 1 知（2，3，1）与 L_1 确定的平面方程为 $x-9y+5z+20=0$，同理，可求得（2，3，1）与 L_2 确定的平面方程为 $x-2y-5z+9=0$，故所求的直线方程为

$$\begin{cases} x-9y+5z+20=0 \\ x-2y-5z+9=0 \end{cases}.$$

5、求过 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上一点 M 处的切平面，使其通过 $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

解：设点 M 的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，则曲面在点 M 处的法向量 $\boldsymbol{n}=(2x_0, 4y_0, 6z_0)$，故过点 M 的切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$，即 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$. 由于切平面过直线 $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$，故直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,-1)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即 $2x_0+2y_0-3z_0=0$，①. 且点 $\left(6,3,\dfrac{1}{2}\right)$ 在切平面上，故 $6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21$，②. 又点 M 在曲面上，即 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$，③. 由①②③可得 $z_0=2, x_0^2+2y_0^2=9$，所以，$x_0=1, y_0=2, z_0=2$. 故所求的切平面方程为 $x+4y+6z=21$.