第八章 重积分

一、填空题

1、设 $D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant 1\}$，且 $\iint\limits_D yf(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$________ .

答案：2

解：因为 $\iint\limits_D yf(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)dx\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx=1$，所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2$。

2、交换积分次序 $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy=$__________

答案：$\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$

解：$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2x\}=D_1+D_2$

$$=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 2,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\}+\{(x,y)\,|\,2\leqslant y\leqslant 4,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\}$$

所以 $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$。

二、选择题

1、D 是闭区域 $\{(x,y)\,|\,a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$，则 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=$ （　　）

A. $\frac{\pi}{2}(b^3-a^3)$　　B. $\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$　　C. $\frac{4\pi}{3}(b^3-a^3)$　　D. $\frac{3\pi}{2}(b^3-a^3)$

答案：B

解：$D=\{(x,y)\,|\,a^2\le x^2+y^2\le b^2\}=\{(r,\theta)\,|\,a\le r\le b,0\le\theta\le 2\pi\}$

所以 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r^2dr=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$。

2、D 是由曲线 $x^2+y^2=1$ 围成的闭区域，则 $\iint\limits_D 3dxdy=$ （　　）

A．π　　B．3π　　C．0　　D．2π

答案：B

解： $\iint\limits_D 3dxdy = 3\iint\limits_D dxdy = 3S_D = 3\pi$

3、设 $\boldsymbol{D=\{(x,y)\big|1\le x\le 3,1\le y\le 2\}}$，记 $\boldsymbol{I_1=\iint\limits_D xyd\sigma}$， $\boldsymbol{I_2=\iint\limits_D xy^2d\sigma}$，

$\boldsymbol{I_3=\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma}$，则 $\boldsymbol{I_1,I_2,I_3}$ 的大小顺序为 （　　）

A. $\boldsymbol{I_1\le I_2\le I_3}$； B. $\boldsymbol{I_3\le I_1\le I_2}$； C. $\boldsymbol{I_2\le I_1\le I_3}$； D. $\boldsymbol{I_3\le I_2\le I_1}$.

答案：B

解：当 $\boldsymbol{1\le x\le 3,1\le y\le 2}$ 时，$\boldsymbol{x\sqrt{y}\le xy\le xy^2}$，所以 $\boldsymbol{I_3\le I_1\le I_2}$ 。

三、计算题

1、计算 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$， $x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的区域。

解： $D=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$

$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}dy$$

$$=-\frac{1}{3}\times\int_{-1}^{1}[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}]_x^1dx=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}((x^2)^{\frac{3}{2}}-1)dx=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)dx=\frac{1}{2}$$

2、计算 $\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy$，其中 D 是由 $x=0$， $y=\pi$ 及 $y=x$ 所围成的区域。

解： $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,x\le y\le\pi\}$

$$\iint\limits_D\cos(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\cos(x+y)dy=-\int_0^{\pi}(\sin x+\sin 2x)dx=-2$$

3、计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$。

解： $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le a,0\le\theta\le 2\pi\}$

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho=2\pi\cdot(-\frac{1}{2})e^{-\rho^2}\big|_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$$

4、计算二重积分$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。

解：设$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$

则$e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases} e^{y^2}, & (x,y)\in D_1 \\ e^{x^2}, & (x,y)\in D_2 \end{cases}$

所以$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{y^2}dxdy+\iint\limits_{D} e^{x^2}dxdy$

$=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx+\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=e-1$

5、计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$y=x, y=2x, y=2$所围成的闭区域。

解：D可用不等式表示为$\frac{y}{2}\le x\le y,\ \ 0\le y\le 2$，于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+y^2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{d}y=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{13}{6}.$$