第九章　　曲线积分

一、选择题:

1．设 L 是从原点 $O(0,0)$ 沿折线 $y=1-|x-1|$ 至点 $A(2,0)$ 的折线段，则曲线积分 $\int_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ 等于（D）.

A．0　　　B．-1　　　C．2　　　D．-2

解 设 $B(1,1)$,则 $L=\overline{BA}+\overline{OB}$，由格林公式有

$$\int_{L+\overline{AO}} -ydx+xdy=-\iint\limits_D 2dxdy=-2,$$

而 $\int_{\overline{AO}} -ydx+xdy=0$，　因此 $\int_L -ydx+xdy=-2$，选 D

2．若微分 $(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(ax^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 为全微分，则 a 等于（B ）.

A．0　　　B．6　　　C．-6　　　D．-2

解　$P=ax^2y^2-5y^4, Q=x^4+4xy^3, \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 可知，$a=6$,选(B)

二、填空题

1．设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$ ，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$________ .

解　设 $L: x=\cos t, y=\sin t(\pi\le t\le 2\pi)$, $ds=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt=dt$

则 $\int_L (x^2+y^2)ds=\int_\pi^{2\pi} dt=\pi$

2．设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4y)\mathrm{d}y=$________.

解 由格林公式有

$$\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4y)dy=\iint\limits_D (2x-2x+2)dxdy=2\iint\limits_D dxdy=18\pi$$

3．设 L 为 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，逆时针，则 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=$_____.

解法 1　$x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，可表示为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}, \theta: 0\to\dfrac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_L xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\cos\theta\bullet\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\bullet\sqrt{2}\sin\theta)d\theta$$

$$=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta=\frac{3}{2}\pi$$

解法 2：添加辅助线 L_1：沿 x 轴 $\sqrt{2}\to 0$，L_2：沿 y 轴 $0\to\sqrt{2}$. 记 $L\cup L_1\cup L_2$ 所围区域为 D. 在 D 上用格林公式有

$$\int_{L\cup L_1\cup L_2}xdy-2ydx=\iint_D\left[\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-2y)}{\partial y}\right]dxdy=3\iint_D dxdy=\frac{3}{2}\pi.$$

而 $\int_{L_1}xdy-2ydx=0,\int_{L_2}xdy-2ydx=0$. 故 $\int_L xdy-2ydx=\frac{3}{2}\pi.$

4．设 L 为任意一条分段光滑的闭曲线，则曲线积分 $\oint_L(2xy-2x)\mathrm{d}x+(x^2-4y)\mathrm{d}y=$ <u>0</u> .

解　利用积分与路径无关的条件可知.

三、解答题

1．计算 $\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$,其中 L 为右半圆 $x^2+y^2=a^2$ 以点 $A(0,a)$ 为起点,点 $B(0,-a)$ 为终点的一段有向弧，a 为大于零的常数;

解法 1　设曲线 L 的参数方程为 $x=a\cos t,y=a\sin t$，其中 t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$，

故 $\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[a\cos t\cdot a^2\sin^2 t\cdot a\cos t-a^2\cos^2 t\cdot a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t$

$$=-2a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\pi a^4 .$$

解法 2　作有向线段 BA，其方程为 $BA:x=0$，其中 y 从 $-a$ 变到 a，

则有向曲线 L 与有向线段 BA 构成一条分段光滑的有向闭曲线，设它所围成的闭区域为 D，

由格林公式，有 $\int_{L+BA}xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi a^4$ ，

即 $\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x+\int_{BA}xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^4$ ，

而 $\int_{BA}xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}(0\cdot y^2-0^2\cdot y\cdot 0)\mathrm{d}y=0$ ，故 $\int_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\pi a^4$.

2．求 $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 的原函数．

解法 1　因为 $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy-y^2)=2x-2y=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy-y^2)$，故

$$F(u,v)=\int_{(0,0)}^{(u,v)}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(u,v)}(x^2dx-y^2dy)-(y^2dx+2xydy)+(2xydx+x^2dy)$$

$$=\int_{(0,0)}^{(u,v)}d[\frac{1}{3}(x^3-y^3)-xy^2+x^2y]$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x^3-y^3)-xy^2+x^2y\right]_{(0,0)}^{(u,v)}=\frac{1}{3}(u^3-v^3)-uv^2+u^2v$$

故　$$F(x,y)=\frac{1}{3}(x^3-y^3)-xy^2+x^2y+C$$

解法 2　$(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$

$$=(x^2dx-y^2dy)+(2xydx+x^2dy)-(y^2dx+2xydy)$$

$$=d(\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3})+d(x^2y)-d(xy^2)=d(\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}+x^2y-xy^2)$$

所以　$F(x,y)=\dfrac{1}{3}(x^3-y^3)-xy^2+x^2y+C$ 为所求.

3．求曲线积分 $\int_L(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 的上半圆周，取顺时针方向.

解　令 $P=(1+xe^{2y})$，$Q=x^2e^{2y}-y$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 面内恒成立，因此，曲线积分 $\int_C(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内与路线无关。故可取沿 x 轴上的线段 OA 积分，即 $y=0,\ 0\le x\le 4$，于是，$\mathrm{d}y=0$，有

$$\int_C(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y=\int_{OA}(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^4(1+x)\mathrm{d}x=12\,.$$

4. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数,积分 $\int_L f(x)(y\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ 在右半平面 $x>0$ 内与路径无关,试求满足条件 $f(0)=1$ 的函数 $f(x)$.

解　令 $P(x,y)=yf(x)$，$Q(x,y)=f(x)$，依题意，有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$$\frac{df(x)}{dx}=f(x),$$

故 $f(x)=c\mathrm{e}^x$，其中 c 是任意常数。再由条件 $f(0)=1$ 可得 $c=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 为所求的函数。

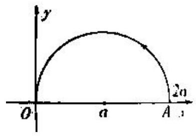
5. 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周（$R>1$），取逆时针方向.

解　记 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}. \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}, (x,y)\neq(0,0).$

作足够小椭圆 $C:\begin{cases}x=\frac{\delta}{2}\cos\theta\\ y=\delta\sin\theta\end{cases}$，（$\theta\in[0,2\pi]$，$C$ 取逆时针方向）。于是由格林公式有

$\oint_{L+C^-}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$，即得　$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2/2}{\delta^2}=\pi.$

6. 求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.



解法一　记 $P=e^x\sin y-b(x+y), Q=e^x\cos y-ax.$

可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=b-a.$

记 D 为 L 与 x 轴所围成区域，由格林公式可得：

$$I=\iint_D(b-a)dxdy+\int_0^{2a}bxdx=(b-a)\pi a^2/2+2a^2b=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi a^3}{2}.$$

解法二　利用曲线积分与路径无关计算。

$$I=\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos xdy-\int_L b(x+y)dx+axdy.$$

注意到 $\frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial x}=\frac{\partial(e^x\sin y)}{\partial y}$，即 $\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy$ 与路径无关。

所以 $\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0.$

对第二个积分，由题设，L 的参数方程为：$x=a+a\cos t, y=a\sin t, t\in[0,\pi]$ 得

$$\int_L (x+y)dx + axdy = \int_0^{\pi} [(-a^2 b\sin t - a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin^2 t) + a^3\cos t + a^3\cos^2 t]dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3.$$

综上得 $I = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2 b - \frac{\pi a^3}{2}.$