装

订

线

华南农业大学期末考试试卷 A 答案

2011-2012 学年第 1 学期 **考试科目：** 概率论与数理统计

填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\frac{2}{3}$；2、0.6；3、1；4、$D\theta_1 \le D\theta_2$；5、(2.68963，2.72037)。

二、**选择题**（本大题共 6小题，每小题 3 分，共 18 分）

1、D；2、B；3、C；4、A；5、C；6、B。

三、解答题（本题 8 分）

解： 设 A 为事件"产品合格"，B 为事件"机器状态良好"．已知 $P(A\,|\,B)=0.98$，

$P(A\,|\,\overline{B})=0.55$，$P(B)=0.95$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.05$．……………2 分

由全概率公式可知，

$P(A)=P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})=0.95\times0.98+0.05\times0.55=0.9585$ ………3 分

由贝叶斯公式，所求概率为 $P(B\,|\,A)=\dfrac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(A)}=\dfrac{0.95\times0.98}{0.9585}\approx0.97$ …3 分

四、解答题（本题 11 分）

解： (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}A\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y$

$=A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\dfrac{A}{2}$．得 $A=2$． … 2 分

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}y$

$=\begin{cases}2\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^y\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ … 4 分

(3) X 与 Y 的边沿密度分别为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(x+2y)}dy, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$ …… 2 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(x+2y)}dx, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$ …… 2 分

显然，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 成立,故 X 与 Y 独立. ……………………1 分

五、解答题（本题 8 分）

解： 由 X 服从区间 $[1,2]$ 上的均匀分布，即 $X\sim f(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 当 $Y=e^{2X}$ 时，

$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{e^{2X}<y\}=P\{X<\frac{1}{2}\ln y\}=F_X(\frac{1}{2}\ln y)$ … 3 分

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数。于是 Y 的密度函数 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{dF_X(\frac{1}{2}\ln y)}{dy}=f_X(\frac{1}{2}\ln y)\cdot\frac{1}{2y}$$ …………………3 分

所以，$f_Y(y)=\begin{cases}1\times\frac{1}{2y}, & 1\le\frac{1}{2}\ln y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2\le y\le e^4\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………………2 分

六、解答题（本题 8 分）

解：$\bar{t}=46.36$，$\bar{y}=19.45$，$\bar{t}^2=2149.2496$，$\bar{y}^2=378.3025$ ……………1 分

$l_{tt}=\sum_{i=1}^{11}t_i^2-n\bar{t}^2=36750-11\times46.36^2=13108.2544$ ………………1 分

$l_{ty}=\sum_{i=1}^{11}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}=13910-11\times46.36\times19.45=3991.278$ ………………1 分

故 $\hat{b}=\frac{l_{ty}}{l_{tt}}=\frac{3991.278}{13108.2544}=0.3$；$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=19.45-0.3\times46.36=5.542$ 2 分

因此回归直线方程为：$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t=5.542+0.3t$ ……………………1 分

又 $S_R=b^2l_{tt}=1179.7425, Q_e=l_{yy}-S_R=80.93, F=\frac{S_R}{Q_e/9}=131.2>F(1,9)=5.12$

所以方程有效。 ……………………2 分

七、解：设 $X_1,\dots,X_n$ 的样本均值为 $\bar{X}$。由 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x>c,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

得 $\mu=EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_c^{+\infty}x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx=\frac{\theta c^\theta}{1-\theta}x^{1-\theta}\Big|_c^{+\infty}$ ……………2 分

因为 $\theta>1$，则 $\mu=\frac{\theta c^\theta}{1-\theta}x^{1-\theta}\Big|_c^{+\infty}=\frac{\theta c}{\theta-1}$ ………………… 1 分

由矩估计法 $\hat{\mu}=\frac{\hat{\theta}c}{\hat{\theta}-1}=\bar{X}$，得 θ 的矩法估计 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$ ….. 2 分

(1) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\prod_{i=1}^n\theta c^\theta x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n c^{n\theta}\prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}$$ …… 2 分

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\ln\prod_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\theta\ln c-\ln\prod_{i=1}^n x_i$$ ………………… 2 分

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，即得 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i-n\ln c}$ … 1 分

八、解答题（本题8分）

解：由 $X\sim N(\mu,1)$，即 $\frac{X-\mu}{1}\sim N(0,1)$ 且 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，可知

装 订 线

$$P(X<10)=P(X-\mu<10-\mu)=\Phi(10-\mu)$$

$$P(10\le X\le 12)=P(10-\mu\le X-\mu\le 12-\mu)=\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)$$

$$P(X>12)=P(X-\mu>12-\mu)=1-p(X-\mu\le 12-\mu)=1-\Phi(12-\mu)$$ ----2分

由 $L=\begin{cases}-1 & X<10\\ 20 & 10\le X\le 12\\ -5 & X>12\end{cases}$，得

$$EL=-\Phi(10-\mu)+20\Phi(12-\mu)-20\Phi(10-\mu)-5+5\Phi(12-\mu)$$
$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$$ ……… 2分

因为 $\dfrac{dEL}{d\mu}=-25\Phi'(12-\mu)+21\Phi'(10-\mu)=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)$

令 $\dfrac{dEL}{d\mu}=0$，即 $-25\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(12-\mu)^2}+21\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(10-\mu)^2}=0$ ………… 2分

$\dfrac{21}{25}=e^{-\frac{1}{2}(12-\mu)^2+\frac{1}{2}(10-\mu)^2}=e^{2(\mu-11)}$，$2(\mu-11)=\ln\dfrac{21}{25}$，

所以 $\mu=11+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{21}{25}\approx 10.9$

答：平均内径 μ 取10.9时，销售一个零件的平均利润最大。 ………… 2分

九、解答题（本题 8 分）

解：据题意，总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，并有一个容量 n=100 的样本均值为 34.25，假设检验问题为

$$H_0:\mu=32,\quad H_1:\mu>32$$ ……………………… 2 分

检验统计量为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$， ……………………… 1 分

它的观察值为 $u=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}=\dfrac{34.25-32}{10/\sqrt{100}}=2.25$ ………………… 2 分

拒绝域为：$U>u_{0.05}=1.645$ ……………… 1 分

现 2.25>1.64，故应拒绝原假设，即认为今年每个家庭平均每月耗电量已经提高了。… 2 分

十、解答题（本题 6 分）

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值	F 临界值
因素 A	224	2	112	4.94	4.26
误差	204	9	22.67		
总和	428	11			

（参考临界值：$F_{0.05}(3,11)=3.59$，$F_{0.05}(2,9)=4.26$，$F_{0.05}(3,9)=3.86$）

……………………………………………表格：4 分

分析结果：因为 $F_A=4.94>F_{0.05}(2,9)=4.26$，拒绝 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，可以认为组平均值在整体上是有显著差异的。…………………………………………2 分