

高等学校电子信息类系列教材

# 电磁场与电磁波

(第五版)



王家礼 朱满座 路宏敏 编 著

高等学校电子信息类系列教材

# 电磁场与电磁波

(第五版)

王家礼 朱满座 路宏敏 编著

西安电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

全书共分八章,内容包括:矢量分析、静电场、恒定电流的电场和磁场、静态场的解、时变电磁场、平面电磁波、电磁波的辐射及导行电磁波。

本书内容精练,概念清晰,语言流畅,注重实践性与新颖性。为便于学习使用,书中安排有较多的例题。

本书可作为高等学校本科相关专业“电磁场与电磁波”课程的教材,也可作为有关科技人员的自学参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/王家礼,朱满座,路宏敏编著. —5版. —西安:西安电子科技大学出版社,2021.3

ISBN 978-7-5606-6008-0

I. ①电… II. ①王… ②朱… ③路… III. ①电磁场 ②电磁波  
IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 031365 号

责任编辑 刘玉芳

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2021年3月第5版 2021年3月第34次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 19.5

字 数 462千字

印 数 155 501~158 500册

定 价 50.00元

ISBN 978-7-5606-6008-0/O

**XDUP 6310005-34**

\* \* \* 如有印装问题可调换 \* \* \*

## 第五版前言

本书作为西安电子科技大学电子与通信类专业“电磁场与电磁波”课程的统一教材，是按照各学院的教学大纲编写的。本书在编写过程中吸收了部分讲课教师的意见和建议，同时融入了编者长期的教学经验和体会。

本书自出版以来，许多学校将其选作教材，受到了广大师生的欢迎，根据读者的反馈意见和教学需求，我们对本书第四版进行了修订，纠正其中的不妥和错误。王家礼、朱满座、路宏敏参加了全书的修订工作，其中第一章和第八章由王家礼负责修订；第二章、第三章和第四章由朱满座负责修订；第五章、第六章和第七章由路宏敏负责修订。王家礼负责全书的统稿工作。在本书的编写过程中，西安电子科技大学出版社刘玉芳编辑付出了艰辛的劳动，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中的不当之处在所难免，衷心希望使用本书的老师、同学和读者批评指正。

编 者

2020 年 10 月



## 第四版前言

本书作为西安电子科技大学电子与通信类专业“电磁场与电磁波”课程的统一教材，是按照各学院的教学大纲编写的。编写中吸收了部分讲课教师的意见和建议，同时融入了编者长期的教学经验和体会。

本书自出版以来，许多学校将其选作教材，受到了广大师生的欢迎。根据读者的反馈意见和教学的需求，我们对本书第三版进行了修订，纠正了其中的不妥与错误，充实了书中插图。王家礼、朱满座、路宏敏参加了全书的修订工作，其中第一章、第八章由王家礼负责修订，第二章、第三章、第四章由朱满座负责修订，第五章、第六章、第七章由路宏敏负责修订，王家礼负责全书的统稿工作。

由于编者水平有限，书中难免出现不当之处，衷心希望使用本书的老师、同学和读者批评指正。

编 者

2016年3月

# 目 录

第一章 矢量分析.....	1
1.1 场的概念 .....	1
1.2 标量场的方向导数和梯度 .....	3
1.3 矢量场的通量和散度 .....	7
1.4 矢量场的环量和旋度 .....	10
1.5 圆柱坐标系与球坐标系 .....	13
1.6 亥姆霍兹定理 .....	16
小结 .....	18
习题一 .....	19
第二章 静电场 .....	22
2.1 库仑定律与电场强度 .....	22
2.2 高斯定理 .....	24
2.3 静电场的旋度与静电场的电位 .....	26
2.4 电偶极子 .....	29
2.5 电介质中的场方程 .....	30
2.6 静电场的边界条件 .....	35
2.7 导体系统的电容 .....	37
2.8 电场能量与能量密度 .....	40
2.9 电场力 .....	43
小结 .....	47
习题二 .....	48
第三章 恒定电流的电场和磁场 .....	50
3.1 恒定电流的电场 .....	50
3.2 磁感应强度 .....	59
3.3 恒定磁场的基本方程 .....	62
3.4 矢量磁位 .....	65
3.5 磁偶极子 .....	67
3.6 磁介质中的场方程 .....	69
3.7 恒定磁场的边界条件 .....	73
3.8 标量磁位 .....	75
3.9 互感和自感 .....	76
3.10 磁场能量 .....	78
3.11 磁场力 .....	80

小结 .....	81
习题三 .....	83
<b>第四章 静态场的解 .....</b>	<b>86</b>
4.1 边值问题的分类 .....	86
4.2 唯一性定理 .....	87
4.3 镜像法 .....	88
4.4 分离变量法 .....	95
4.5 复变函数法 .....	104
4.6 格林函数法 .....	111
4.7 有限差分法 .....	118
小结 .....	123
习题四 .....	123
<b>第五章 时变电磁场 .....</b>	<b>126</b>
5.1 法拉第电磁感应定律 .....	126
5.2 位移电流 .....	129
5.3 麦克斯韦方程组 .....	133
5.4 时变电磁场的边界条件 .....	137
5.5 时变电磁场的能量与能流 .....	143
5.6 正弦电磁场 .....	146
5.7 波动方程 .....	153
5.8 时变电磁场中的位函数 .....	155
小结 .....	158
习题五 .....	160
综合性拓展练习题 .....	162
<b>第六章 平面电磁波 .....</b>	<b>163</b>
6.1 无耗媒质中的平面电磁波 .....	163
6.2 导电媒质中的平面电磁波 .....	171
6.3 电磁波的极化 .....	178
6.4 色散、相速和群速 .....	183
6.5 均匀平面电磁波向平面分界面的垂直入射 .....	188
6.6 均匀平面电磁波向多层媒质分界面的垂直入射 .....	196
6.7 均匀平面电磁波向平面分界面的斜入射 .....	200
6.8 均匀平面电磁波的全透射和全反射 .....	207
小结 .....	212
习题六 .....	213
综合性拓展练习题 .....	217
<b>第七章 电磁波的辐射 .....</b>	<b>218</b>
7.1 滞后位 .....	218
7.2 电基本振子的辐射场 .....	221
7.3 对偶原理与磁基本振子的辐射场 .....	226

7.4 天线的电参数 ..... 230

7.5 对称线天线和天线阵的概念 ..... 235

7.6 面天线的辐射场 ..... 241

7.7 互易定理 ..... 245

7.8 天线的有效面积 ..... 248

7.9 传输方程 ..... 249

小结 ..... 250

习题七 ..... 251

综合性拓展练习题 ..... 252

**第八章 导行电磁波** ..... 253

8.1 沿均匀导波装置传输电磁波的一般分析 ..... 253

8.2 矩形波导 ..... 262

8.3 圆柱形波导 ..... 271

8.4 波导中的能量传输与损耗 ..... 278

8.5 同轴线 ..... 282

8.6 谐振腔 ..... 286

小结 ..... 294

习题八 ..... 295

**附录一 重要的矢量公式** ..... 297

**附录二 常用数学公式** ..... 299

**附录三 量和单位** ..... 303

# 第一章 矢量分析

电场和磁场都是矢量场，因此在研究电磁场与电磁波之前，我们先介绍分析矢量场和标量场问题的数学工具——矢量分析。掌握矢量分析将为学习电磁场与电磁波内容奠定必要的数学基础。本章重点讨论如下内容：

- 标量场的方向导数和梯度
- 矢量场的通量和散度
- 矢量场的环量和旋度
- 亥姆霍兹定理

## 1.1 场的概念

### 1.1.1 矢性函数

数学上，实数域内任一代数数量  $a$  都可以称为标量，因为它只能代表该代数数量的大小。在物理学中，任意一个代数数量一旦被赋予物理单位，则成为一个具有物理意义的标量，即所谓的物理量，如电压  $u$ 、电流  $i$ 、面积  $S$ 、体积  $V$  等等。

在二维空间或三维空间内的任一点  $P$  是一个既存在大小(或称为模)又有方向特性的量，故称为实数矢量。实数矢量可用黑体  $\mathbf{A}$  表示，而白体  $A$  表示  $\mathbf{A}$  的大小(即  $\mathbf{A}$  的模)。若用几何图形表示，实数矢量是从原点出发的一条带有箭头的直线段，直线段的长度表示矢量  $\mathbf{A}$  的模，箭头的指向表示该矢量  $\mathbf{A}$  的方向。矢量一旦被赋予物理单位，便成为具有物理意义的矢量，如电场强度  $\mathbf{E}$ 、磁场强度  $\mathbf{H}$ 、速度  $\mathbf{v}$  等等。

若某一矢量的模和方向都保持不变，此矢量称为常矢，如某物体所受到的重力。而在实际问题中遇到的更多的是模和方向或两者之一会发生变化的矢量，这种矢量我们称为变矢，如沿着某一曲线物体运动的速度  $\mathbf{v}$  等。

设  $t$  是一数性变量， $\mathbf{A}(t)$  为变矢，对于某一区间  $G[a, b]$  内的每一个数值  $t$ ， $\mathbf{A}$  都有一个确定的矢量  $\mathbf{A}(t)$  与之对应，则称  $\mathbf{A}(t)$  为数性变量  $t$  的矢性函数。记为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$$

而  $G[a, b]$  为  $\mathbf{A}(t)$  的定义域。矢性函数  $\mathbf{A}(t)$  在直角坐标系中的三个坐标分量都是变量  $t$  的函数，分别为  $A_x(t)$ 、 $A_y(t)$ 、 $A_z(t)$ ，则矢性函数  $\mathbf{A}(t)$  也可用其坐标表示为

$$\mathbf{A} = A_x(t)\mathbf{e}_x + A_y(t)\mathbf{e}_y + A_z(t)\mathbf{e}_z$$

其中,  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$  为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的正向单位矢量。

在矢量代数中, 已经学习过矢性函数的极限和连续性, 矢性函数的导数和微分, 矢性函数的积分。由于篇幅所限我们不再讨论, 但是它们的运算法则我们必须掌握, 这样才能学好后面的内容。

### 1.1.2 标量场和矢量场

在许多科学问题中, 常常需要研究某种物理量在某一空间区域的分布情况和变化规律, 为此, 在数学上引入场的概念。

如果在某一空间区域内的每一点, 都对应着某个物理量的一个确定的值, 则称在此区域内确定了该物理量的一个场。换句话说, 在某一空间区域中, 物理量的无限集合表示一种场。如在教室中温度的分布确定了一个温度场, 在空间电位的分布确定了一个电位场。场的一个重要的属性是它占有一定空间, 而且在该空间域内, 除有限个点和表面外, 其物理量应该是处处连续的。若该物理量与时间无关, 则该场称为静态场; 若该物理量与时间有关, 则该场称为动态场或称为时变场。

在研究物理系统中温度、压力、密度等在一定空间的分布状态时, 数学上只需用一个代数变量来描述, 这些代数变量(即标量函数)所确定的场称为标量场, 如温度场  $T(x, y, z)$ 、电位场  $\varphi(x, y, z)$  等。然而在许多物理系统中, 其状态不仅需要确定其大小, 同时还需确定它们的方向, 这就需要用一矢量来描述, 因此称为矢量场, 例如电场、磁场、流速场等等。

### 1.1.3 标量场的等值面和矢量场的矢量线

在研究场的特性时, 以场图表示场变量在空间逐点分布的情况具有很大的意义。对于标量场, 常用等值面的概念来描述。所谓等值面, 是指在标量场  $\varphi(x, y, z)$  中, 使其函数  $\varphi$  取相同数值的所有点组成的集合, 这些点组成一个曲面, 该曲面称为等值面。如温度场的等值面, 就是由温度相同的点所组成的一个曲面, 此曲面称为等温面。等值面在二维空间就变为等值线。如地图上的等高线, 就是由高度相同的点连成的一条曲线。

标量场  $\varphi(x, y, z)$  的等值面方程为

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

对于矢量场  $\mathbf{A}(x, y, z)$ , 则用一些有向线来形象地表示矢量  $\mathbf{A}(x, y, z)$  在空间的分布, 这些有向线称为矢量线, 如图 1-1 所示。矢量线上任一点的切线方向表示该点矢量  $\mathbf{A}(x, y, z)$  的方向。在直角坐标系中, 其矢量线方程可写为

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1-1)$$

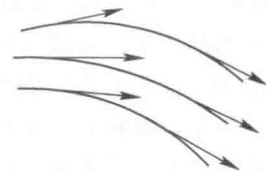


图 1-1 矢量场的矢量线

按照一定的规则, 绘制出矢量线, 既可根据矢量线确定矢量场中各点矢量的方向, 又可根据矢量线的疏密程度, 判别出矢量场中各点矢量的大小和变化趋势。因此, 矢量线在分析矢量场特性时是十分有用的。

**例 1-1** 求数量场  $\varphi = (x+y)^2 - z$  通过点  $M(1, 0, 1)$  的等值面方程。

解: 点  $M$  的坐标是  $x_0=1, y_0=0, z_0=1$ , 则该点的数量场的场值为

$$\varphi = (x_0 + y_0)^2 - z_0 = 0$$

其等值面方程为

$$(x+y)^2 - z = 0 \quad \text{或} \quad z = (x+y)^2$$

例 1-2 求矢量场  $\mathbf{A} = xy^2\mathbf{e}_x + x^2y\mathbf{e}_y + zy^2\mathbf{e}_z$  的矢量线方程。

解: 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{y^2z}$$

从而有

$$\begin{cases} \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \\ \frac{dx}{xy^2} = \frac{dz}{zy^2} \end{cases}$$

解之即得矢量方程:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_2 \\ z = C_1 x \end{cases}$$

$C_1$  和  $C_2$  是积分常数。

## 1.2 标量场的方向导数和梯度

### 1.2.1 标量场的方向导数

在标量场中, 标量  $\varphi = \varphi(M)$  的分布情况可以由等值面或等值线来描述, 但这只能大致地了解标量  $\varphi$  在场中的整体分布情况。而要详细地研究标量场, 还必须对它的局部状态进行深入分析, 即要考察标量  $\varphi$  在场中各点处的邻域内沿每一方向的变化情况。为此, 引入方向导数的概念。

设  $M_0$  是标量场  $\varphi = \varphi(M)$  中的一个已知点, 从  $M_0$  出发沿某一方向引入一条射线  $l$ , 在  $l$  上  $M_0$  点的邻近取一点  $M$ , 其长度  $\overline{M_0M} = \rho$ , 如图 1-2 所示。若当  $M_0$  点趋于  $M$  点时 (即长度  $\rho$  趋于零时), 即

$$\frac{\Delta\varphi}{\rho} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\rho}$$

的极限存在, 则称此极限为函数  $\varphi(M)$  在点  $M_0$  处沿  $l$  方向

的方向导数, 记为  $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0}$ , 即

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M_0 \rightarrow M} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\rho} \quad (1-2)$$

由上式可见, 方向导数  $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0}$  是函数  $\varphi = \varphi(M)$  在点  $M_0$  处沿  $l$  方向对距离的变化率。当

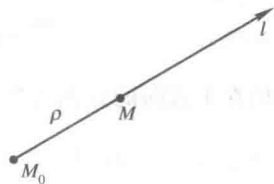


图 1-2 方向导数的定义

方向导数大于零时 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} > 0\right)$ , 表示在点  $M_0$  处函数  $\varphi = \varphi(M)$  沿  $l$  方向是增加的, 反之就是减小的。

在直角坐标系中, 方向导数可按下述公式计算。

若函数  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处可微,  $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$  为  $l$  方向的方向余弦, 则函数  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处沿  $l$  方向的方向导数必定存在, 且为

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos\gamma \quad (1-3)$$

证明:  $M$  点的坐标为  $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ , 由于函数  $\varphi$  在  $M_0$  处可微, 故

$$\Delta \varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z + \Delta$$

式中  $\Delta$  为高阶无穷小。上述等式两边除以  $\rho$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varphi}{\rho} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\Delta z}{\rho} + \frac{\Delta}{\rho} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos\gamma + \frac{\Delta}{\rho} \end{aligned}$$

当  $\rho$  趋于零时对上式取极限, 可得

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos\gamma \quad \text{证毕}$$

**例 1-3** 求数量场  $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$  在点  $M(1, 1, 2)$  处沿  $l = e_x + 2e_y + 2e_z$  方向的方向导数。

解:  $l$  方向的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \\ \cos\beta &= \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \\ \cos\gamma &= \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

而其数量场对坐标的偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-(x^2 + y^2)}{z^2}$$

数量场在  $l$  方向的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \\ &= \frac{1}{3} \frac{2x}{z} + \frac{2}{3} \frac{2y}{z} - \frac{2}{3} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \end{aligned}$$

在点  $M$  处沿  $l$  方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{3}$$

### 1.2.2 标量场的梯度

方向导数可以描述标量场中某点处标量沿某方向的变化率。但从场中某一点出发有无



穷多个方向,通常不必要更不可能研究所有方向的变化率,而只是关心沿哪一个方向变化率最大,此变化率是多少?我们从方向导数的计算公式来讨论这个问题。标量场  $\varphi(x, y, z)$  在  $l$  方向上的方向导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma$$

在直角坐标系中,令

$$l^\circ = \cos \alpha e_x + \cos \beta e_y + \cos \gamma e_z$$

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_z$$

则

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = G \cdot l^\circ = |G| \cos(G, l^\circ) \quad (1-4)$$

矢量  $l^\circ$  是  $l$  方向的单位矢量,矢量  $G$  是在给定点处的一常矢量。由上式显然可见,当  $l$  与  $G$  的方向一致时,即  $\cos(G, l^\circ) = 1$  时,标量场在点  $M$  处的方向导数最大,也就是说,沿矢量  $G$  的方向的方向导数最大,此最大值为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{\max} = |G| \quad (1-5)$$

这样,我们找到了一个矢量  $G$ ,其方向是标量场在  $M$  点处变化率最大的方向,其模值即为最大的变化率。

在标量场  $\varphi(M)$  中的一点  $M$  处,其方向为函数  $\varphi = \varphi(M)$  在  $M$  点处变化率最大的方向,其大小又恰好等于最大变化率矢量  $G$  的模,该最大变化率矢量  $G$  称为标量场  $\varphi = \varphi(M)$  在  $M$  点处的梯度,用  $\text{grad} \varphi(M)$  表示。在直角坐标系中,梯度的表达式为

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_z \quad (1-6)$$

梯度用哈密尔顿微分算子表示的表达式为

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi \quad (1-7)$$

由上面的分析可知:

(1) 在某点  $M$  处沿任意方向的方向导数等于该点处的梯度在此方向上的投影;

(2) 标量场  $\varphi = \varphi(M)$  中的每一点  $M$  处的梯度垂直于过该点的等值面,且指向函数  $\varphi(M)$  增大的方向。这一点是因为点  $M$  处梯度的坐标  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$  恰好是过  $M$  点的等值面  $\varphi(x, y, z) = c$  法线的方向导数,即梯度为其法向矢量,因此梯度垂直于该等值面。

等值面和方向导数均与梯度存在一种比较特殊的关系,这使得梯度成为研究标量场的一个极为重要的矢量。

下面给出梯度的基本运算法则。 $u(M)$  和  $v(M)$  为标量场,  $c$  为一常数。很容易证明下面的梯度运算法则成立。

$$\text{grad} c = 0 \quad \text{或} \quad \nabla c = 0 \quad (1-8)$$

$$\text{grad}(cu) = c \text{grad} u \quad \text{或} \quad \nabla(cu) = c \nabla u \quad (1-9)$$

$$\text{grad}(u \pm v) = \text{grad} u \pm \text{grad} v \quad \text{或} \quad \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1-10)$$

$$\text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v \quad \text{或} \quad \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v \quad (1-11)$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v) \quad \text{或} \quad \nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v) \quad (1-12)$$

$$\operatorname{grad}[f(u)]=f'(u)\operatorname{grad}u \quad \text{或} \quad \nabla[f(u)]=f'(u)\nabla u \quad (1-13)$$

**例 1-4** 标量函数  $r$  是动点  $M(x, y, z)$  的矢量  $\mathbf{r}=xe_x+ye_y+ze_z$  的模, 即  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , 证明:  $\operatorname{grad}r=\frac{\mathbf{r}}{r}=\mathbf{r}^\circ$ .

证: 
$$\operatorname{grad}r=\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{grad}r=\nabla r=\frac{x}{r}\mathbf{e}_x+\frac{y}{r}\mathbf{e}_y+\frac{z}{r}\mathbf{e}_z=\frac{1}{r}(xe_x+ye_y+ze_z)=\frac{\mathbf{r}}{r}=\mathbf{r}^\circ$$

**例 1-5** 求  $r$  在点  $M(1, 0, 1)$  处沿  $\mathbf{l}=\mathbf{e}_x+2\mathbf{e}_y+2\mathbf{e}_z$  方向的方向导数。

解: 由例 1-4 得知

$$\operatorname{grad}r=\nabla r=\frac{1}{r}(xe_x+ye_y+ze_z)$$

点  $M$  处的坐标为  $x=1, y=0, z=1$ , 而  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ , 所以  $r$  在  $M$  点处的梯度为

$$\operatorname{grad}r=\nabla r=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z$$

$r$  在点  $M$  处沿  $\mathbf{l}$  方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial r}{\partial l}\right|_M=\nabla r\cdot\mathbf{l}^\circ$$

而

$$\mathbf{l}^\circ=\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}=\frac{1}{3}\mathbf{e}_x+\frac{2}{3}\mathbf{e}_y+\frac{2}{3}\mathbf{e}_z$$

所以

$$\left.\frac{\partial r}{\partial l}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**例 1-6** 已知位于原点处的点电荷  $q$  在点  $M(x, y, z)$  处产生的电位为  $\varphi=\frac{q}{4\pi\epsilon r}$ , 其中矢径  $\mathbf{r}$  为  $\mathbf{r}=xe_x+ye_y+ze_z$ , 且已知电场强度与电位的关系是  $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ , 求电场强度  $\mathbf{E}$ 。

解:

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=-\nabla\left(\frac{q}{4\pi\epsilon r}\right)=-\frac{q}{4\pi\epsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

根据  $\nabla f(u) = f'(u) \cdot \nabla u$  的运算法则:

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{1}{r} \right)' \nabla r = -\frac{1}{r^2} \nabla r$$

又由例 1-4 得知,  $\nabla r = \frac{1}{r} \mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \nabla r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{r}^\circ \end{aligned}$$

### 1.3 矢量场的通量和散度

#### 1.3.1 矢量场的通量

在分析和描绘矢量场的特性时, 矢量穿过一个曲面的通量是一个很重要的基本概念。将曲面的一个面元用矢量  $d\mathbf{S}$  来表示, 其方向取为面元的法线方向, 其大小为  $dS$ , 即

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (1-14)$$

$\mathbf{n}$  是面元法线方向的单位矢量。 $\mathbf{n}$  的指向有两种情况: 对开曲面上的面元, 设这个开曲面是由封闭曲线  $l$  所围成的, 则选定绕行的方向后, 沿绕行方向按右手螺旋的拇指方向就是  $\mathbf{n}$  的方向, 如图 1-3(a) 所示; 对封闭曲面上的面元,  $\mathbf{n}$  取为封闭曲面的外法线方向, 如图 1-3(b) 所示。

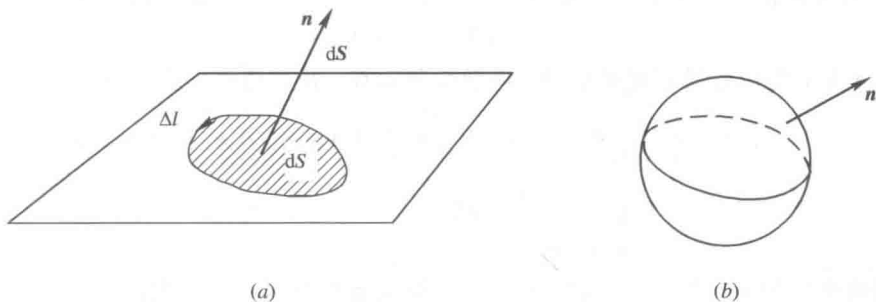


图 1-3 法线方向的取法

若面元  $d\mathbf{S}$  位于矢量场  $\mathbf{A}$  中, 由于面元  $d\mathbf{S}$  很小, 且面元上各点的场值可以认为是相同的, 矢量场  $\mathbf{A}$  和面元  $d\mathbf{S}$  的标量积  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  便称为矢量  $\mathbf{A}$  穿过面元  $d\mathbf{S}$  的通量。例如在流速场中, 流速  $\mathbf{v}$  是一个矢量,  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  就是每秒钟通过面元  $d\mathbf{S}$  的通量。通量是一个标量。

将曲面  $S$  各面元上的  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  相加, 它表示矢量场  $\mathbf{A}$  穿过整个曲面  $S$  的通量, 也称为矢量  $\mathbf{A}$  在曲面  $S$  上的面积分:

$$\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1-15)$$

如果曲面是一个封闭曲面, 则

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-16)$$

该积分表示矢量  $\mathbf{A}$  穿过封闭曲面  $S$  的通量。若  $\Psi > 0$ , 表示有净通量流出, 这说明封闭曲面  $S$  内必定有矢量场的源; 若  $\Psi < 0$ , 表示有净通量流入, 说明封闭曲面  $S$  内有洞(负的源)。在大学物理课程中我们已知, 通过封闭曲面的电通量  $\Psi$  等于该封闭曲面所包围的自由电荷  $Q$ 。若电荷  $Q$  为正电荷,  $\Psi$  为正, 则表示有电通量流出; 若电荷  $Q$  为负电荷,  $\Psi$  为负, 则表示有电通量流入。

### 1.3.2 矢量场的散度

上述通量是一个大范围面积上的积分量, 它反映了在某一空间内场源总的特性, 但它没有反映出场源分布的特性。为了研究矢量场  $\mathbf{A}$  在某一点附近的通量特性, 我们把包围某点的封闭曲面向该点无限收缩, 使包含这个点在内的体积元  $\Delta V$  趋于零, 取如下极限:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

称此极限为矢量场  $\mathbf{A}$  在某点的散度, 记为  $\text{div} \mathbf{A}$ , 即散度的定义式为

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1-17)$$

此式表明, 矢量场  $\mathbf{A}$  的散度是一个标量, 它表示从该点单位体积内散发出来的矢量  $\mathbf{A}$  的通量(即通量密度)。它反映出矢量场  $\mathbf{A}$  在该点通量源的强度。显然, 在无源区域中, 矢量场  $\mathbf{A}$  在各点的散度均为零。

矢量场  $\mathbf{A}$  的散度可表示为哈密尔顿微分算子  $\nabla$  与矢量  $\mathbf{A}$  的标量积, 即

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-18)$$

计算  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  时, 先按标量积规则展开, 再做微分运算。在直角坐标系中有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-19)$$

利用哈密尔顿微分算子, 读者可以证明, 散度运算符合下列规则:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1-20)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi \quad (1-21)$$

### 1.3.3 散度定理

矢量  $\mathbf{A}$  的散度代表的是其通量的体密度, 因此可直观地知道, 矢量场  $\mathbf{A}$  散度的体积分等于该矢量穿过包围该体积的封闭曲面的总通量, 即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-22)$$

上式称为散度定理, 也称为高斯定理。证明这个定理时, 将闭合曲面  $S$  围成的体积  $V$  分成许多体积元  $dV_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 计算每个体积元的小封闭曲面  $S_i$  上穿过的通量, 然后叠

加。由散度的定义可得

$$\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

由于相邻两体积元有一个公共表面, 这个公共表面上的通量对这两个体积元来说恰好是等值异号, 求和时就互相抵消了。除了邻近  $S$  面的那些体积元外, 所有体积元都是由几个相邻体积元间的公共表面包围而成的, 这些体积元的通量总和为零。而邻近  $S$  面的那些体积元, 它们中有部分表面是在  $S$  面上的面元  $dS$ , 这部分表面的通量没有被抵消, 其总和刚好等于从封闭曲面  $S$  穿出的通量。因此有

$$\sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

故得到

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$$

**例 1-7** 已知矢量场  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , 求由内向外穿过圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  与平面  $z=H$  所围成的封闭曲面的通量。

**解:** 根据题意(见图 1-4)可把封闭曲面分成  $S_1$  面, 即  $Z=H$  所围成的平面,  $S_2$  面也就是圆锥面。则所围成的封闭曲面的通量为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$$

因为在圆锥侧面上  $\mathbf{r}$  处处垂直于  $d\mathbf{S}$ , 所以

$$\iint_{S_2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} r \, dS \cos\theta = 0$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} x \, dy \, dz + \iint_{S_1} y \, dx \, dz + \iint_{S_1} z \, dx \, dy \\ &= \iint_{S_1} H \, dx \, dy = H \iint_{S_1} dx \, dy \\ &= H \cdot \pi H^2 = \pi H^3 \end{aligned}$$

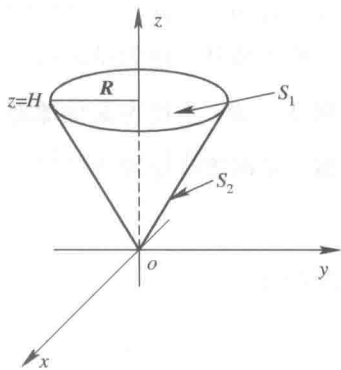


图 1-4 圆锥面与平面围成的封闭曲面

**例 1-8** 在坐标原点处点电荷产生电场, 在此电场中任一点处的电位移矢量为

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{r}^\circ \quad \left( \text{其中, } \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, r = |\mathbf{r}|, \mathbf{r}^\circ = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)$$

求穿过原点为球心、 $R$  为半径的球面的电通量(见图 1-5)。

**解:** 穿过以原点为球心,  $R$  为半径的球面的电通量为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

由于球面的法线方向与  $d\mathbf{S}$  的方向一致, 因此

$$\begin{aligned} \Psi &= \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D \, dS = \frac{q}{4\pi R^2} \oint_S dS \\ &= \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q \end{aligned}$$

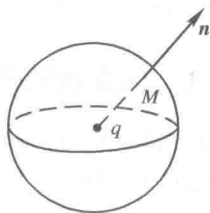


图 1-5 例 1-8 图

**例 1-9** 原点处点电荷  $q$  产生的电位移矢量  $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{r}^\circ = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}$ , 试求电位移矢量  $\mathbf{D}$  的散度。

解:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{q}{4\pi} \left( \frac{x}{r^3} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r^3} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r^3} \mathbf{e}_z \right) \\ D_x &= \frac{qx}{4\pi r^3}, \quad D_y = \frac{qy}{4\pi r^3}, \quad D_z = \frac{qz}{4\pi r^3} \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi} \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \\ \frac{\partial D_y}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi} \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \\ \frac{\partial D_z}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi} \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi} \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

从上面计算可知, 在  $r=0$  以外的空间,  $\operatorname{div} \mathbf{D}=0$ , 故在  $r=0$  以外的空间没有电荷。也就是说, 无源区域电位移矢量的散度均为零。

**例 1-10** 半径为  $R$  的球面  $S$  上任意点的位置矢量为  $\mathbf{r}=xe_x+ye_y+ze_z$ , 求  $\oiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ 。

解: 根据散度定理知

$$\oiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dV$$

而  $\mathbf{r}$  的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

所以

$$\oiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dV = \iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$$

## 1.4 矢量场的环量和旋度

### 1.4.1 矢量场的环量

在力场中, 某一质点沿着指定的曲线  $l$  运动时, 力场所做的功可表示为力场  $\mathbf{F}$  沿曲线  $l$  的线积分, 即

$$W = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int F \cos\theta \, dl \quad (1-23)$$

其中  $d\mathbf{l}$  是曲线  $l$  的线元矢量, 方向是该线元的切线方向,  $\theta$  角为力场  $\mathbf{F}$  与线元矢量  $d\mathbf{l}$  的夹角。在矢量场  $\mathbf{A}$  中, 若曲线  $l$  是一闭合曲线, 其矢量场  $\mathbf{A}$  沿闭合曲线  $l$  的线积分可表示为

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l A \cos\theta dl \quad (1-24)$$

此线积分称为矢量场  $\mathbf{A}$  的环量(或称旋涡量), 如图 1-6 所示。

矢量场的环量与矢量场的通量一样都是描述矢量场特性的重要参量。我们知道, 若矢量穿过封闭曲面的通量不为零, 则表示该封闭曲面内存在通量源。同样, 矢量沿闭合曲线的环量不为零, 则表示闭合曲线内存在另一种源——旋涡源。例如在磁场中, 在环绕电流的闭合曲线上的环量不等于零, 其电流就是产生该磁场的旋涡源。

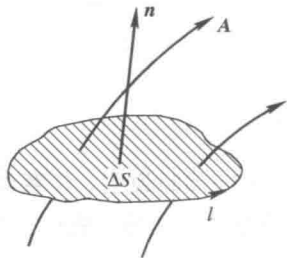


图 1-6 矢量场的环量

### 1.4.2 矢量场的旋度

从式(1-24)中可以看出, 环量是矢量  $\mathbf{A}$  在大范围内闭合曲线上的线积分, 它反映了闭合曲线内旋涡源分布的情况, 而从矢量场分析的要求来看, 我们需要知道每个点附近的旋涡源分布的情况。为此, 我们把闭合曲线收缩, 使它包围的面积元  $\Delta S$  趋于零, 并求其极限值:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1-25)$$

此极限值的意义就是环量的面密度, 或称为环量强度。由于面元是有方向的, 它与闭合曲线  $l$  的绕行方向成右手螺旋关系, 因此在给定点上, 上述的极限对于不同的面元是不同的。为此, 引入如下定义, 称为矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度, 记为  $\text{rot}\mathbf{A}$ :

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left[ \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}}{\Delta S} \quad (1-26)$$

由式(1-26)可以看出, 矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度是一个矢量, 其大小是矢量  $\mathbf{A}$  在给定处的最大环量面密度, 其方向就是当面元的取向使环量面密度最大时, 该面元的方向  $\mathbf{n}$ 。矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度描述了矢量  $\mathbf{A}$  在该点的旋涡源强度。若在某区域中各点的旋度等于零, 即  $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , 则称矢量场为无旋场或保守场。

矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度可用哈密尔顿微分算子  $\nabla$  与矢量  $\mathbf{A}$  的矢量积来表示, 即

$$\text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-27)$$

计算时, 可先按矢量积的规则展开, 然后再作微分运算。在直角坐标系中可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \times (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1-28)$$

即

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1-29)$$

利用哈密尔顿微分算子可以证明旋度运算符合如下规则:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B} \quad (1-30)$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A} \quad (1-31)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (1-32)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1-33)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \mathbf{0} \quad (1-34)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1-35)$$

式(1-33)说明,任意矢量场的旋度的散度恒等于零。式(1-34)表明任一标量场的梯度的旋度恒等于零。式(1-35)中的 $\nabla^2$ 称为拉普拉斯算子,在直角坐标系中有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{e}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{e}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z \quad (1-37)$$

### 1.4.3 斯托克斯定理

因为旋度代表单位面积的环量,因此矢量场在闭合曲线 $l$ 上的环量等于闭合曲线 $l$ 所包围曲面 $S$ 上旋度的总和,即

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-38)$$

此式称为斯托克斯定理或斯托克斯公式。它将矢量旋度的面积分转换成该矢量的线积分,或将矢量 $\mathbf{A}$ 的线积分转换为该矢量旋度的面积分。式中 $d\mathbf{S}$ 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向成右手螺旋关系。斯托克斯定理的证明,与散度定理的证明相类似,这里就不再叙述了。

**例 1-11** 求矢量 $\mathbf{A} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$ ( $c$ 是常数)沿曲线 $l$ :  $(x-2)^2 + y^2 = R^2$ 、 $z=0$ 的环量(见图 1-7)。

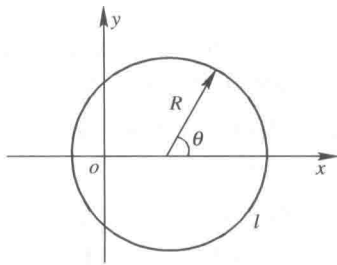


图 1-7 例 1-11 图

**解:** 由于在曲线 $l$ 上 $z=0$ ,因此 $dz=0$ 。

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (-y dx + x dy) \\ &= \int_0^{2\pi} -R \sin\theta d(2 + R \cos\theta) + \int_0^{2\pi} (2 + R \cos\theta) d(R \sin\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} (2 + R \cos\theta) R \cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [R^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2R \cos\theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (R^2 + 2R \cos\theta) d\theta = 2\pi R^2 \end{aligned}$$



环量的计算通常利用曲线的参数方程。

**例 1-12** 求矢量场  $\mathbf{A} = x(z-y)\mathbf{e}_x + y(x-z)\mathbf{e}_y + z(y-x)\mathbf{e}_z$  在点  $M(1, 0, 1)$  处的旋度以及沿  $\mathbf{n} = 2\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$  方向的环量面密度。

**解:** 矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x) \end{vmatrix} \\ &= (z+y)\mathbf{e}_x + (x+z)\mathbf{e}_y + (y+x)\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

在点  $M(1, 0, 1)$  处的旋度

$$\nabla \times \mathbf{A} \big|_M = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{n}$  方向的单位矢量

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}}(2\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z) = \frac{2}{7}\mathbf{e}_x + \frac{6}{7}\mathbf{e}_y + \frac{3}{7}\mathbf{e}_z$$

则沿  $\mathbf{n}$  方向的环量面密度为

$$\mu = \nabla \times \mathbf{A} \big|_M \cdot \mathbf{n}^\circ = \frac{2}{7} + \frac{6}{7} \cdot 2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7}$$

**例 1-13** 在坐标原点处放置一点电荷  $q$ ，它在自由空间产生的电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3}\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

求自由空间任意点( $r \neq 0$ )电场强度的旋度  $\nabla \times \mathbf{E}$ 。

**解:**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y}{r^3} \right) \right] \mathbf{e}_x + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{r^3} \right) \right] \mathbf{e}_y + \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{r^3} \right) \right] \mathbf{e}_z \right\} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

这说明点电荷产生的电场为无旋场。

## 1.5 圆柱坐标系与球坐标系

前面对梯度、散度和旋度的分析中都采用了直角坐标系，并给出它们的表达式。在实际的应用中为了分析的方便、简洁和明了，有时往往采用其它坐标系，本节将介绍常用的两种坐标系——圆柱坐标系和球面坐标系。

### 1.5.1 圆柱坐标系

在圆柱坐标系(简称柱坐标系)中,任意一点  $P$  的位置用  $\rho$ 、 $\phi$ 、 $z$  三个量来表示,如图 1-8 所示。

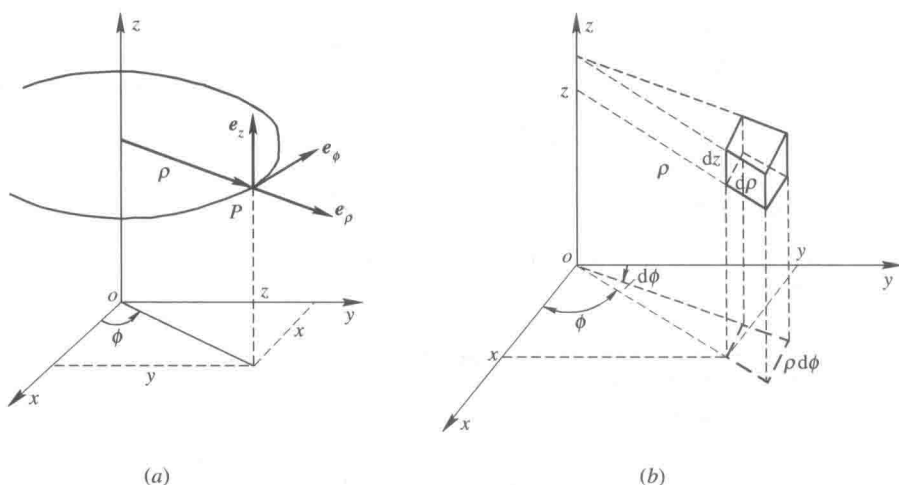


图 1-8 圆柱坐标系

各量的变化范围如下:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < \infty \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi \\ -\infty &< z < \infty \end{aligned}$$

$P$  点的三个坐标单位矢量为  $e_\rho$ 、 $e_\phi$ 、 $e_z$ , 分别指向  $\rho$ 、 $\phi$ 、 $z$  的增加方向。值得注意的是与直角坐标系的不同点, 即除  $e_z$  外,  $e_\rho$  和  $e_\phi$  都不是常矢量, 它们的方向随  $P$  点位置的不同而变化, 但  $e_\rho$ 、 $e_\phi$ 、 $e_z$  三者总保持正交关系, 并遵循右手螺旋法则:

$$e_\rho \times e_\phi = e_z$$

矢量  $\mathbf{A}$  在球面坐标系中可表示为

$$\mathbf{A} = A_\rho e_\rho + A_\phi e_\phi + A_z e_z$$

以坐标原点为起点, 指向  $P$  点的矢量  $\mathbf{r}$  称为  $P$  点的位置矢量或矢径。在圆柱坐标系中  $P$  点的位置矢量是

$$\mathbf{r} = \rho e_\rho + z e_z$$

式中未显示角度  $\phi$ , 但角度  $\phi$  将影响  $e_\rho$  的方向。对任意增量  $d\rho$ 、 $d\phi$ 、 $dz$ ,  $P$  点位置沿  $\rho$ 、 $\phi$ 、 $z$  方向的长度增量(长度元)分别为

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\phi = \rho d\phi, \quad dl_z = dz$$

它们的拉梅系数(它们同各自坐标增量之比)分别为

$$h_1 = \frac{dl_\rho}{d\rho} = 1, \quad h_2 = \frac{dl_\phi}{d\phi} = \rho, \quad h_3 = \frac{dl_z}{dz} = 1$$

与三个单位矢量相垂直的三个面积元以及体积元分别是

$$dS_\rho = dl_\phi dl_z = \rho d\phi dz$$

$$\begin{aligned}dS_{\phi} &= dl_{\rho} dl_z = d\rho dz \\dS_z &= dl_{\rho} dl_{\phi} = \rho d\phi d\rho \\dV &= dl_{\rho} dl_{\phi} dl_z = \rho d\rho d\phi dz\end{aligned}$$

哈密尔顿微分算子 $\nabla$ 的表示式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1-39)$$

拉普拉斯微分算子 $\nabla^2$ 的表示式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-40)$$

在圆柱坐标系中标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的表示式，可以根据上面介绍的关系自行导出，也可以从附录中查出。

### 1.5.2 球面坐标系

在球面坐标系(简称球坐标系)中，任意 $P$ 点的位置用 $r$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ 三个量来表示，如图1-9所示。

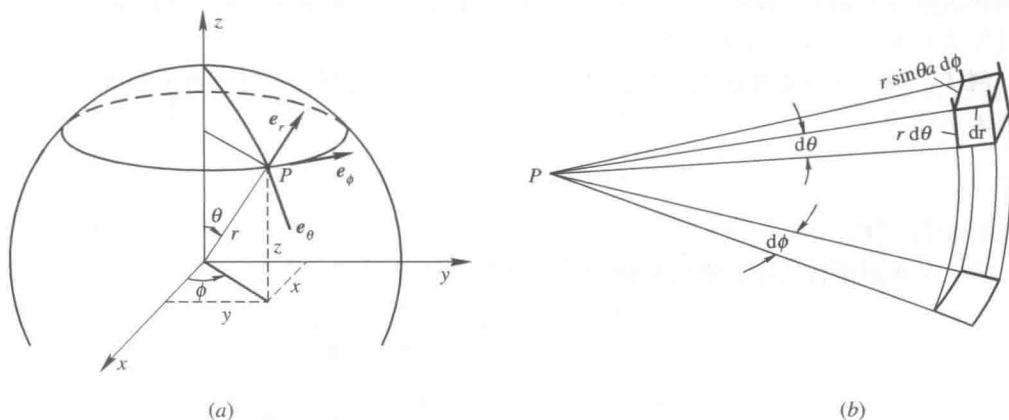


图 1-9 球面坐标系

它们分别称为矢径长度、高低角和方位角，它们的变化范围如下：

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$P$ 点的三个坐标单位矢量是 $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_{\theta}$ 、 $\mathbf{e}_{\phi}$ 。 $\mathbf{e}_r$ 的方向指向矢径延伸的方向； $\mathbf{e}_{\theta}$ 的方向垂直于矢径并在矢径和 $z$ 轴形成的平面内，指向 $\theta$ 角增大的方向； $\mathbf{e}_{\phi}$ 的方向垂直于矢径并在矢径和 $z$ 轴形成的平面内，指向 $\phi$ 角增大的方向。三者都不是常矢量，但保持正交，并遵循右手螺旋法则，即

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{\theta} = \mathbf{e}_{\phi}$$

矢量 $\mathbf{A}$ 在球面坐标系中可表示为

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + A_{\phi} \mathbf{e}_{\phi}$$

球面坐标系中 $P$ 点的位置矢量是 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ，但坐标 $\mathbf{e}_{\theta}$ 和 $\mathbf{e}_{\phi}$ 都将影响 $\mathbf{r}$ 的方向。 $P$ 点的位

置沿  $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\phi$  方向的长度增量(长度元)分别是

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\phi = r \sin\theta d\phi$$

故它们的拉梅系数(它们同各自坐标增量之比)分别为

$$h_1 = \frac{dl_r}{dr} = 1, \quad h_2 = \frac{dl_\theta}{d\theta} = r, \quad h_3 = \frac{dl_\phi}{d\phi} = r \sin\theta$$

在球面坐标系中与三个单位矢量相垂直的三个面积元以及体积元分别是

$$dS_r = dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$dS_\theta = dl_r dl_\phi = r \sin\theta dr d\phi$$

$$dS_\phi = dl_r dl_\theta = r dr d\theta$$

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

哈密尔顿微分算子  $\nabla$  的表示式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (1-41)$$

拉普拉斯微分算子  $\nabla^2$  的表示式为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1-42)$$

在球面坐标系中标量场的梯度, 矢量场的散度和旋度的表示式, 可以根据上面介绍的关系自行导出, 也可以从附录中查出。

**例 1-14** 在一对相距为  $l$  的点电荷  $+q$  和  $-q$  的静电场中, 当距离  $r \gg l$  时, 其空间电位的表达式为

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

求其电场强度  $\mathbf{E}(r, \theta, \phi)$ 。

**解:** 在球面坐标系中, 哈密尔顿微分算子  $\nabla$  的表达式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

因为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \right) \cos\theta = -\frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos\theta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \theta} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos\theta = -\frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \phi} = 0$$

所以

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta)$$

## 1.6 亥姆霍兹定理

在上面的分析中, 对于标量场引入了梯度。梯度是一个矢量, 它给出了标量场中某点

最大变化率的方向,它是由标量场  $\varphi$  对各坐标偏微分所决定的。对于矢量场我们引入散度和旋度。矢量场的散度是一个标量函数,它表示矢量场中某点的通量密度,是矢量场中某点通量源强度的度量,它取决于矢量场的各坐标分量对各自坐标的偏微分,所以散度是由场分量沿各自方向上的变化率来决定的。矢量场的旋度是一个矢量函数,它表示矢量场中某点的最大环量强度,是矢量场中某点旋涡源强度的度量,它取决于矢量场的各坐标分量分别对与之垂直方向坐标的偏微分,所以旋度是由各场分量在与之正交方向上的变化率来决定的。

以上分析表明,散度表示矢量场中各点场与通量源的关系,而旋度表示场中各点场与旋涡源的关系。故场的散度和旋度一旦确定,这就意味着场的通量源和旋涡源也就确定了。既然场是由源所激发的,通量源和旋涡源的确定便意味着场也确定,因此必然导致下述亥姆霍兹定理成立。

亥姆霍兹定理的简单表达是:若矢量场  $\mathbf{F}$  在无限空间中处处单值,且其导数连续有界,而源分布在有限空间区域中,则矢量场由其散度和旋度唯一确定,并且可以表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和,即

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-43)$$

亥姆霍兹定理的严格的表述和证明这里不再给出,读者可参考其它文献。简化的证明如下:

假设在无限空间中有两个矢量函数  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{G}$ ,它们具有相同的散度和旋度,但这两个矢量函数不相等,可令

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{g} \quad (1-44)$$

由于矢量  $\mathbf{F}$  和矢量  $\mathbf{G}$  具有相同的散度和旋度,根据矢量场由其散度和旋度唯一确定,那么矢量  $\mathbf{g}$  应该为零矢量,也就是矢量  $\mathbf{F}$  与矢量  $\mathbf{G}$  是同一个矢量。现在我们来证明矢量  $\mathbf{g}$  为零矢量。对式(1-44)两边取散度,得

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{g}) = \nabla \cdot \mathbf{G} + \nabla \cdot \mathbf{g}$$

因为  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G}$ , 所以

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (1-45)$$

对式(1-44)两边取旋度,得

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{G} + \mathbf{g}) = \nabla \times \mathbf{G} + \nabla \times \mathbf{g}$$

同样由于  $\nabla \times \mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$ , 因此

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0$$

由矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ , 可令

$$\mathbf{g} = \nabla \varphi \quad (1-46)$$

$\varphi$  是在无限空间取值的任意标量函数,将式(1-46)代入式(1-45),可得

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1-47)$$

已知满足拉普拉斯方程的函数不会出现极值,而  $\varphi$  又是无限空间上取值的任意函数,因此它只能是一个常数( $\varphi = c$ ),从而求得  $\mathbf{g} = \nabla \varphi = 0$ , 于是式(1-44)变成  $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ 。由此可以得出,已知矢量的散度和旋度所决定的矢量是唯一的。因此,亥姆霍兹定理得证。

在无限空间中一个既有散度又有旋度的矢量场,可表示为一个无旋场  $\mathbf{F}_d$  (有散度)和一个无散场  $\mathbf{F}_c$  (有旋度)之和:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_c \quad (1-48)$$

对于无旋场  $\mathbf{F}_d$  来说,  $\nabla \times \mathbf{F}_d = \mathbf{0}$ , 但这个场的散度不会处处为零。因为任何一个物理场必然有源来激发它, 若这个场的旋涡源和通量源都为零, 那么这个场就不存在了。因此无旋场必然对应于有散场, 根据矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0}$ , 可令(负号是人为加的)

$$\mathbf{F}_d = -\nabla \varphi \quad (1-49)$$

对于无散场  $\mathbf{F}_c$  来说,  $\nabla \cdot \mathbf{F}_c = 0$ , 但这个场的旋度不会处处为零, 根据矢量恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , 可令

$$\mathbf{F}_c = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-50)$$

将式(1-49)和式(1-50)代入式(1-48), 便可得到式(1-43), 即

$$\mathbf{F} = -\nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{A}$$

也就是说矢量场  $\mathbf{F}$  可表示为一个标量场的梯度再加上一个矢量场的旋度。

亥姆霍兹定理告诉我们, 研究一个矢量场必须从它的散度和旋度两方面着手。因为, 矢量场的散度应满足的关系和矢量场的旋度应满足的关系, 决定了矢量的基本性质, 故将矢量场的旋度和矢量场的散度称为矢量场的基本方程。例如, 以后我们将学到静电场的基本方程是

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1-51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-52)$$

对于各向同性的媒质, 电通量密度和电场强度的关系为  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , 因此电场强度的散度可以写为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-53)$$

上述方程说明静电场是一个无旋场, 但是它是有散场, 其电通量源的强度为  $\rho/\epsilon$  ( $\rho$  为电荷的体密度)。

### 小 结

(1) 我们讨论的物理量若只有大小, 则它是一个标量函数, 该标量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场, 该场称为标量场。若我们讨论的物理量既有大小又有方向, 则它是一个矢量函数, 该矢量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场, 该场称为矢量场。矢量运算应满足矢量运算法则。

(2) 标量函数  $u$  在某点沿  $l$  方向的变化率  $\frac{\partial u}{\partial l}$ , 称为标量场  $u$  沿该方向的方向导数。标量场  $u$  在该点的梯度  $\text{grad} u = \nabla u$  与方向导数的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \mathbf{l}$$

标量场  $u$  的梯度是一个矢量, 它的大小和方向就是该点最大变化率的大小和方向。

在标量场  $u$  中, 具有相同  $u$  值的点构成一等值面。在等值面的法线方向上,  $u$  值变化最快。因此, 梯度的方向也就是等值面的法线方向。

(3) 矢量  $\mathbf{A}$  穿过曲面  $S$  的通量为  $\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。矢量  $\mathbf{A}$  在某点的散度定义为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = h \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

它是一个标量, 表示从该点散发的通量体密度, 描述了该点的通量源强度。其散度定理为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

(4) 矢量  $\mathbf{A}$  沿闭合曲线  $l$  的线积分  $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , 称为矢量  $\mathbf{A}$  沿该曲线的环量。矢量  $\mathbf{A}$  在某点的旋度定义为

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left[ \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}}{\Delta S}$$

它是一个矢量, 其大小和方向是该点最大环量面密度的大小和此时的面元方向, 它描述旋涡源强度。其斯托克斯定理为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

(5) 哈密尔顿微分算子  $\nabla$  是一个兼有矢量和微分运算作用的运算符号。 $\nabla \cdot \mathbf{A}$  可以看作两个矢量的标量积,  $\nabla \times \mathbf{A}$  可以看作两个矢量的矢量积。计算时, 先按矢量运算法则展开, 然后再作微分运算。 $\nabla u$  可以看作矢量与标量相乘。在直角坐标系中, 其  $\nabla$  算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

在圆柱坐标系中, 其  $\nabla$  算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

在球面坐标系中, 其  $\nabla$  算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

(6) 亥姆霍兹定理总结了矢量场共同的性质: 矢量场可由矢量场的散度和旋度唯一地确定; 矢量场的散度和旋度各自对应矢量场中的一种源。所以分析矢量场时, 应从研究它的散度和旋度入手, 旋度方程和散度方程构成了矢量场的基本特性。

## 习 题 一

1-1 矢径  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  与各坐标轴正向的夹角为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ , 请用直角坐标系的  $(x, y, z)$  来表示  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ , 并证明:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

1-2 已知  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x - 9\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$ , 求:

(1)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

(2)  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

(3)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

(4)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

1-3 已知  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z$ , 若使  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$  及  $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ , 则  $b$  和  $c$  各应是多少?

1-4 已知  $\mathbf{A} = 12\mathbf{e}_x + 9\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$ , 且  $\mathbf{B} \perp \mathbf{A}$  及  $\mathbf{B}$  的模为 1, 试确定  $a$ 、 $b$ 。

1-5 求函数  $\varphi = xy^2 + z^2 - xyz$  在点  $(1, 1, 2)$  处沿方向角  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 、 $\beta = \frac{\pi}{4}$ 、 $\gamma = \frac{\pi}{3}$  的方向的方向导数。

1-6 求函数  $\varphi = xyz$  在点  $(5, 1, 2)$  处, 沿着点  $(5, 1, 2)$  到点  $(9, 4, 19)$  的方向的方向导数。

1-7 已知  $\varphi = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ , 求在点  $(0, 0, 0)$  和点  $(1, 1, 1)$  处的梯度。

1-8  $u$ 、 $v$  都是  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的函数,  $u$ 、 $v$  各偏导数都存在且连续, 证明:

$$(1) \operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad}u + \operatorname{grad}v$$

$$(2) \operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad}u + u \operatorname{grad}v$$

$$(3) \operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad}u$$

1-9 证明:

$$(1) \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$(2) \nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi$$

1-10 已知  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , 试证:

$$(1) \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$

$$(2) \nabla \cdot (\mathbf{r}r^n) = (n+3)r^n$$

1-11 应用散度定理计算下述积分:

$$I = \oiint_S [xz^2\mathbf{e}_x + (x^2y - z^3)\mathbf{e}_y + (2xy + y^2z)\mathbf{e}_z] \cdot d\mathbf{S}$$

$S$  是  $z=0$  和  $z=(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$  所围成的半球区域的外表面。

1-12 证明:

$$(1) \nabla \times (c\mathbf{A}) = c \nabla \times \mathbf{A} \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(2) \nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \varphi \times \mathbf{A}$$

1-13 证明:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

1-14 已知  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , 试证:

$$(1) \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$(2) \nabla \times \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{0}$$

$$(3) \nabla \times \left[ \frac{\mathbf{r}}{r} f(r) \right] = \mathbf{0} \quad (f(r) \text{ 是 } r \text{ 的函数})$$

1-15 设  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  和  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$  是具有二阶连续偏导数的两个矢性函数, 它们又满足如下方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

试证明  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  均满足:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (\mathbf{A} \text{ 等于 } \mathbf{E} \text{ 或 } \mathbf{H})$$

1-16 试证明:

$$\nabla^2(uv) = u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \cdot \nabla v$$

1-17 试证明下列函数满足拉普拉斯方程:

$$(1) \varphi(x, y, z) = \sin \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z} \quad (\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2)$$

$$(2) \varphi(\rho, \phi, z) = \rho^{-n} \cos n \phi$$

$$(3) \varphi(r, \theta, \phi) = r \cos \theta$$

1-18 试求  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  和  $\nabla \times \mathbf{A}$ :

$$(1) \mathbf{A} = xy^2z^3 \mathbf{e}_x + x^3z \mathbf{e}_y + x^2y^2 \mathbf{e}_z$$

$$(2) \mathbf{A}(\rho, \phi, z) = \rho^2 \cos \phi \mathbf{e}_\rho + \rho^2 \sin \phi \mathbf{e}_z$$

$$(3) \mathbf{A}(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r^2} \cos \theta \mathbf{e}_\phi$$

1-19 设  $\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} e^{-kr}$ ,  $k$  为常数, 试证明:

$$\nabla^2 \varphi = k^2 \frac{e^{-kr}}{r}$$

## 第二章 静 电 场

静电场是指相对于观察者为静止的电荷产生的场。静电场的基本定律是库仑定律。本章从库仑定律和叠加原理出发,运用矢量分析,讨论真空中静电场的基本方程。在此基础上,进而讨论静电场中的导体与导体系统,介质中的静电场,静电场的能量和电场力等。本章重点讨论如下内容:

- 库仑定律与电场强度
- 真空中静电场的基本方程
- 电介质中的静电场方程
- 静电场的电位
- 静电场的边界条件
- 导体系统的电容
- 电场能量与能量密度

### 2.1 库仑定律与电场强度

#### 2.1.1 库仑定律

库仑定律是描述真空中两个静止点电荷之间相互作用的实验定律,如图 2-1 所示,其内容是,点电荷  $q'$  作用于点电荷  $q$  的力为

$$\mathbf{F} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R}^\circ = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2-1)$$

式中:  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  表示从  $\mathbf{r}'$  到  $\mathbf{r}$  的矢量;  $R$  是  $\mathbf{r}'$  到  $\mathbf{r}$  的距离;  $\mathbf{R}^\circ$  是  $\mathbf{R}$  的单位矢量;  $\epsilon_0$  是表征真空电性质的物理量,称为真空的介电常数,其值为

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

库仑定律表明,真空中两个点电荷之间的作用力的大小与两点电荷电量之积成正比,与距离平方成反比,力的方向沿着它们的连线,同号电荷之间

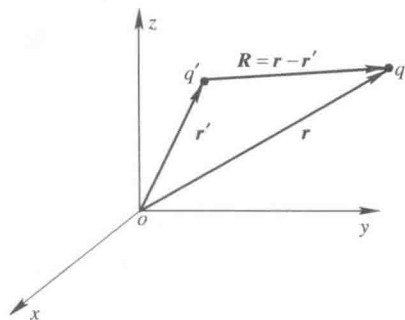


图 2-1 库仑定律用图

是斥力, 异号电荷之间是引力。点电荷  $q'$  受到  $q$  的作用力为  $\mathbf{F}'$ , 且  $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ , 可见两点电荷之间的作用力符合牛顿第三定律。

库仑定律只能直接用于点电荷。所谓点电荷, 是指当带电体的尺度远小于它们之间的距离时, 将其电荷集中于一点的理想化模型。对于实际的带电体, 一般应该看成是分布在一定的区域内, 称其为分布电荷。用电荷密度来定量描述电荷的空间分布情况。电荷体密度的含义是, 在电荷分布区域内, 取体积元  $\Delta V$ , 若其中的电量为  $\Delta q$ , 则电荷体密度为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (2-2)$$

其单位是库/米<sup>3</sup> (C/m<sup>3</sup>)。这里的  $\Delta V$  趋于零, 是指相对于宏观尺度而言很小的体积, 以便能精确地描述电荷的空间变化情况; 但是相对于微观尺度, 该体积元又是足够大, 它包含了大量的带电粒子, 这样才可以将电荷分布看作空间的连续函数。

如果电荷分布在宏观尺度  $h$  很小的薄层内, 则可认为电荷分布在一个几何曲面上, 用面密度描述其分布。若面积元  $\Delta S$  内的电量为  $\Delta q$ , 则面密度为

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (2-3)$$

对于分布在一条细线上的电荷用线密度描述其分布情况。若线元  $\Delta l$  内的电量为  $\Delta q$ , 则线密度为

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (2-4)$$

### 2.1.2 电场强度

电荷  $q'$  对电荷  $q$  的作用力, 是由于  $q'$  在空间产生电场, 电荷  $q$  在电场中受力。用电场强度来描述电场, 空间一点的电场强度定义为该点的单位正试验电荷所受到的力。在点  $\mathbf{r}$  处, 试验电荷  $q$  受到的电场力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2-5)$$

这里的试验电荷是指带电量很小, 引入到电场内不影响电场分布的电荷。由两个点电荷间作用力的公式(2-1), 可以得到位于点  $\mathbf{r}'$  处的点电荷  $q'$  在  $\mathbf{r}$  处产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2-6)$$

以后我们将电荷所在点  $\mathbf{r}'$  称为源点, 将观察点  $\mathbf{r}$  称为场点。如果真空中一共有  $n$  个点电荷, 则  $\mathbf{r}$  点处的电场强度可由叠加原理计算, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2-7)$$

对于体分布的电荷, 可将其视为一系列点电荷的叠加, 从而得出  $\mathbf{r}$  点的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2-8)$$

同理, 面电荷和线电荷产生的电场强度分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (2-9)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \quad (2-10)$$

**例 2-1** 一个半径为  $a$  的均匀带电圆环, 求轴线上的电场强度。

**解:** 取坐标系如图 2-2, 圆环位于  $xoy$  平面, 圆环中心与坐标原点重合, 设电荷线密度为  $\rho_l$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}' &= a \cos\theta \mathbf{e}_x + a \sin\theta \mathbf{e}_y \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (z^2 + a^2)^{1/2} \\ dl' &= a d\theta \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(z\mathbf{e}_z - a \cos\theta \mathbf{e}_x - a \sin\theta \mathbf{e}_y)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} a d\theta \\ &= \frac{a\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

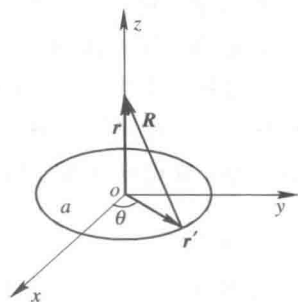


图 2-2 例 2-1 用图

## 2.2 高斯定理

从库仑定律出发, 可以推导出高斯定理。先介绍立体角的概念。如图 2-3 所示, 立体角是由过一点的射线, 绕过该点的某一轴旋转一周所扫出的锥面所限定的空间。如果以点  $o'$  为球心、 $R$  为半径作球面, 若立体角的锥面在球面上截下的面积为  $S$ , 则此立体角的大小为  $\Omega = S/R^2$ 。立体角的单位是球面度(sr)。整个球面对球心的立体角是  $4\pi$ 。对于任一个有向曲面  $S$ , 面上的面积元  $dS$  对某点  $o'$  的立体角是

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{R^2} = \frac{d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2-11)$$

式中:  $\mathbf{r}$  是面积元所处的位置;  $\mathbf{r}'$  是点  $o'$  的位置;  $\mathbf{R}$  是从点  $\mathbf{r}'$  到点  $\mathbf{r}$  的矢径;  $\theta$  是有向面元  $dS$  与  $\mathbf{R}$  的夹角。

立体角可以为正, 也可以为负, 视夹角  $\theta$  为锐角或钝角而定。整个曲面  $S$  对点  $o'$  所张的立体角为

$$\Omega = \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2-12)$$

若  $S$  是封闭曲面, 则

$$\Omega = \oint_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 内} \\ 0 & \mathbf{r}' \text{ 在 } S \text{ 外} \end{cases} \quad (2-13)$$

即任意封闭面对其内部任一点所张的立体角为  $4\pi$ , 对外部点所张的立体角为零。

高斯定理描述通过一个闭合面电场强度的通量与闭合面内电荷间的关系。先考虑点电荷的电场穿过任意闭曲面  $S$  的通量:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega \quad (2-14)$$

若  $q$  位于  $S$  内部, 上式中的立体角为  $4\pi$ ; 若  $q$  位于  $S$  外部, 上式中的立体角为零。对点电

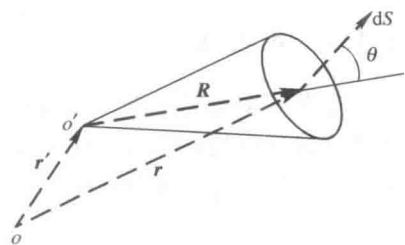


图 2-3 立体角

荷系或分布电荷,由叠加原理得出高斯定理为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2-15)$$

上式中,  $Q$  是闭合面内的总电荷。高斯定理是静电场的一个基本定理。它说明,在真空中穿过任意闭合面的电场强度通量,等于该闭合面内部的总电荷量与  $\epsilon_0$  之比。应该注意表面上的电场强度是由空间的所有电荷产生的,不要错误地认为其与曲面  $S$  外部的电荷无关。但是外部电荷在闭合面上产生的电场强度的通量为零。

以上的高斯定理也称为高斯定理的积分形式,它说明通过闭合曲面的电场强度通量与闭合面内的电荷之间的关系,并没有说明某一点的情况。要分析一个点的情形,要用微分形式。如果闭合面内的电荷是密度为  $\rho$  的体分布电荷,则式(2-15)可以写为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2-16)$$

式中  $V$  是  $S$  所限定的体积。用散度定理,可以将上式左面的面积分变换为散度的体积分,即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2-17)$$

由于体积  $V$  是任意的,所以有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-18)$$

这就是高斯定理的微分形式。它说明,真空中任一点的电场强度的散度等于该点的电荷密度与  $\epsilon_0$  之比。微分形式描述了一点处的电场强度的空间变化和该点电荷密度的关系。尽管该点的电场强度是由空间的所有电荷产生的,可是这一点电场强度的散度仅仅取决于该点的电荷密度,而与其它电荷无关。

高斯定理的积分形式可以用来计算平面对称、柱对称及球对称的静电场问题。解题的关键是能够将电场强度从积分号中提出来,这就要求找出一个封闭面(高斯面)  $S$ , 且  $S$  由两部分  $S_1$  和  $S_2$  组成。在  $S_1$  上,电场强度  $\mathbf{E}$  与有向面积元  $d\mathbf{S}$  平行,  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S}$  (或二者之间的夹角固定不变),并且电场强度的大小保持不变;在  $S_2$  上,有  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。这样就可求出对称分布电荷产生的场。

微分形式用来从电场分布计算电荷分布。

**例 2-2** 假设在半径为  $a$  的球体内均匀分布着密度为  $\rho_0$  的电荷,试求任意点的电场强度。

**解:** 本题的电荷分布是球对称的,电场强度仅有径向分量  $E_r$ ,同时它具有球对称性质。作一个与带电体同心、半径为  $r$  的球面,将积分形式的高斯定理运用到此球面上。

当  $r > a$  时:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi a^3}{3}$$

故

$$E_r = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > a)$$

当  $r < a$  时:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3$$

所以

$$E_r = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \quad (r < a)$$

**例 2-3** 已知半径为  $a$  的球内、外的电场强度为

$$\mathbf{E} = e_r E_0 \frac{a^2}{r^2} \quad (r > a)$$

$$\mathbf{E} = e_r E_0 \left( 5 \frac{r}{2a} - 3 \frac{r^3}{2a^3} \right) \quad (r < a)$$

求电荷分布。

**解:** 由高斯定理的微分形式  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , 得电荷密度为

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

用球坐标中的散度公式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

可得

$$\rho = 0 \quad (r > a)$$

$$\rho = \epsilon_0 E_0 \frac{15}{2a^3} (a^2 - r^2) \quad (r < a)$$

## 2.3 静电场的旋度与静电场的电位

静电场是一个矢量场,除了要讨论它的散度外,还要讨论它的旋度。在点电荷及分布电荷的电场强度表示式中,均含有因子  $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$ 。这里,以体分布电荷产生的电场强度为例,讨论静电场的旋度特性。由于

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (2-19)$$

可将体电荷的电场强度表示式(2-8)改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= - \nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \right] \end{aligned} \quad (2-20)$$

应注意式中的积分是对源点  $\mathbf{r}'$  进行的,算子  $\nabla$  是对场点作用的,因而可将  $\nabla$  移到积分号外。此式说明,电场强度可表示为一个标量位函数的负梯度,所以有

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2-21)$$

即,静电场的旋度恒等于零。这表明静电场是无旋场。

如上所述,可用一个标量函数的负梯度表示电场强度。这个标量函数就是静电场的位

函数, 简称为电位。电位  $\varphi$  的定义由下式确定:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (2-22)$$

电位的单位是伏(V), 因此电场强度的单位是伏/米(V/m)。

体分布的电荷在场点  $\mathbf{r}$  处的电位为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2-23)$$

线电荷和面电荷的电位表示式与上式相似, 只需将电荷密度和积分区域作相应的改变。对于位于源点  $\mathbf{r}'$  处的点电荷  $q$ , 其在  $\mathbf{r}$  处产生的电位为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2-24)$$

式(2-23)和式(2-24)中本来还要加上一个常数, 但为计算上简单, 取这个常数为零。

因为静电场是无旋场, 其在任意闭合回路的环量为零, 即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2-25)$$

这表明, 静电场是一个保守场, 它沿某一路径从  $P_0$  点到  $P$  点的线积分与路径无关, 仅仅与起点和终点的位置有关。下面讨论电场强度沿某一路径的线积分:

$$\int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_0}^P -\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} \quad (2-26)$$

因为

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi \quad (2-27)$$

故

$$\int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(P_0) - \varphi(P) \quad (2-28)$$

或

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

通常, 称  $\varphi(P) - \varphi(P_0)$  为  $P$  与  $P_0$  两点间的电位差(或电压)。一般选取一个固定点, 规定其电位为零, 称这一固定点为参考点。当取  $P_0$  点为参考点时,  $P$  点处的电位为

$$\varphi(P) = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2-29)$$

当电荷分布在有限的区域时, 选取无穷远处为参考点较为方便。此时:

$$\varphi(P) = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2-30)$$

下面分析电位所满足的微分方程。将  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  代入高斯定理的微分形式  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , 得到

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-31)$$

上面的方程称为泊松方程。若讨论的区域  $\rho=0$ , 则电位微分方程变为

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (2-32)$$

上述方程为二阶偏微分方程, 称为拉普拉斯方程。其中  $\nabla^2$  在直角坐标系中为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

关于拉普拉斯方程的一般求解方法将在静态场的解一章(第四章)中讨论。

**例 2-4** 位于  $xoy$  平面上的半径为  $a$ 、圆心在坐标原点的带电圆盘, 面电荷密度为  $\rho_s$ , 如图 2-4 所示, 求  $z$  轴上的电位。

解: 由面电荷产生的电位公式:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \\ \mathbf{r} &= ze_z \\ \mathbf{r}' &= \rho' \cos\phi' \mathbf{e}_x + \rho' \sin\phi' \mathbf{e}_y \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (z^2 + \rho'^2)^{1/2} \\ dS' &= \rho' d\phi' d\rho' \\ \varphi(z) &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(a^2 + z^2)^{1/2} - z]\end{aligned}$$

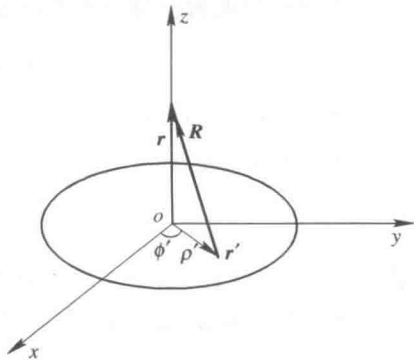


图 2-4 均匀带电圆盘

以上结果是  $z > 0$  的结论。对  $z$  轴上的任意点, 电位为

$$\varphi(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(a^2 + z^2)^{1/2} - |z|]$$

**例 2-5** 求均匀带电球体产生的电位。

解: 在前面我们计算了均匀带电球体的电场:

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > a) \\ E_r &= \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \quad (r < a)\end{aligned}$$

由此可求出电位。当  $r > a$  时:

$$\varphi = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r}$$

当  $r < a$  时:

$$\varphi = \int_r^a E_r dr + \int_a^\infty E_r dr = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

**例 2-6** 若半径为  $a$  的导体球面的电位为  $U_0$ , 球外无电荷, 求空间的电位。

解: 可以通过求解电位的微分方程计算电位。对于一般问题, 电位方程是二阶偏微分方程, 但是对于本题, 因其是对称的, 就简化为常微分方程。显然电位仅仅是变量  $r$  的函数。球外的电位用  $\varphi$  表示:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

将以上方程写成球坐标的形式, 即

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

对以上方程积分一次, 得



$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = C_1$$

即

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

再对其积分一次, 得

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

这里出现的两个常数通过导体球面上的电位和无穷远处的电位来确定。在导体球面上, 电位为  $U_0$ , 无穷远处电位为零。分别将  $r=a$ 、 $r=\infty$  代入上式, 得

$$U_0 = -\frac{C_1}{a} + C_2$$

$$0 = C_2$$

这样解出两个常数为

$$C_1 = -aU_0, C_2 = 0$$

所以

$$\varphi(r) = \frac{aU_0}{r}$$

附带要说明的是, 凡是采用积分形式高斯定理能够解决的问题, 总能够用求解常微分方程的方法, 来求解给定问题的泊松方程。

总之, 真空中静电场的基本解可归纳为

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2-33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-34)$$

即静电场是一个无旋、有源(指通量源)场, 电荷就是电场的源。电力线总是从正电荷出发, 到负电荷终止。

## 2.4 电 偶 极 子

电偶极子是指由间距很小的两个等量异号点电荷组成的系统, 如图 2-5 所示。真空中电偶极子的电场和电位可用来分析电介质的极化问题。用电偶极矩表示电偶极子的大小和空间取向, 它定义为电荷  $q$  乘以有向距离  $l$ , 即

$$\mathbf{p} = ql \quad (2-35)$$

电偶极矩是一个矢量, 它的方向是由负电荷指向正电荷。取电偶极子的轴和  $z$  轴重合, 电偶极子的中心在坐标原点。电偶极子在空间任意点  $P$  的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2-36)$$

其中:  $r_1$  和  $r_2$  分别表示场点  $P$  与  $q$  和  $-q$  的距离;  $r$  表示坐标原点到  $P$  点的距离; 当

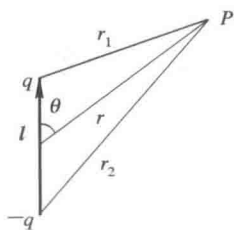


图 2-5 电偶极子

$l \ll r$  时:

$$r_1 = \left( r^2 + \frac{l^2}{4} - 2r \frac{l}{2} \cos\theta \right)^{1/2} \approx r \left( 1 - \frac{l}{r} \cos\theta \right)^{1/2}$$

$$r_2 = \left( r^2 + \frac{l^2}{4} + 2r \frac{l}{2} \cos\theta \right)^{1/2} \approx r \left( 1 + \frac{l}{r} \cos\theta \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{2r} \cos\theta \right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{l}{2r} \cos\theta \right)$$

从而有

$$\varphi = \frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2-37)$$

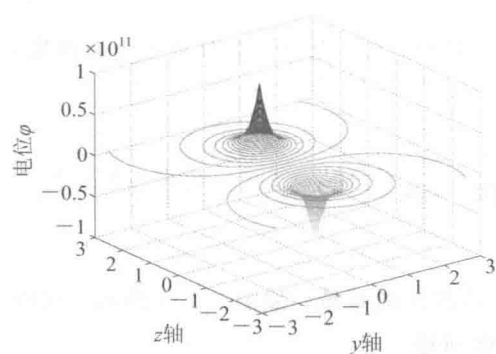
或

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2-38)$$

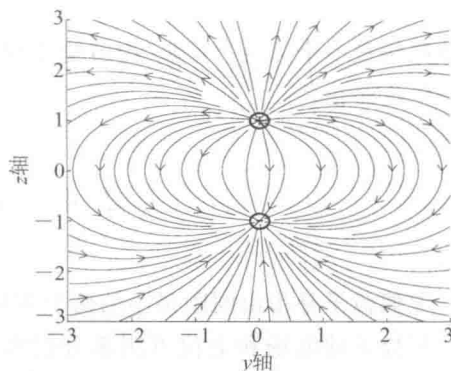
其电场强度在球坐标中的表示式为

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \quad (2-39)$$

电偶极子的电位和电场的分布如图 2-6 所示。电偶极子的电位和电场分别与  $r^2$  和  $r^3$  成反比, 单个点电荷的电位和电场分别与  $r$  和  $r^2$  成反比。这是因为在远区, 正负电荷产生的电场有一部分相互抵消的缘故。电偶极子的场分布具有轴对称性。同理, 由两个大小相等, 反平行放置且二者之间的间距很小的电偶极子组成的带电系统, 叫作电四极子。电四极子的电位和电场分别与  $r^3$  和  $r^4$  成反比。以此类推, 可以求出电多极子等的电位和电场。



(a) 电偶极子的电位



(b) 电偶极子的电场

图 2-6 电偶极子的电位和电场分布

## 2.5 电介质中的场方程

根据物质的电特性, 可将其分为导电物质和绝缘物质两类。通常称前者为导体, 后者为电介质。导体的特点是其内部有大量的能自由运动的电荷, 在外电场的作用下, 这些自

由电荷可以作宏观运动。相反,介质中的带电粒子被约束在介质的分子中,而不能作宏观运动。在电场的作用下,介质内的带电粒子会发生微观的位移,使分子产生极化。下面讨论介质中电场的特点和规律。

### 2.5.1 介质的极化

任何物质的分子或原子都是由带负电的电子和带正电的原子核组成的。依其特性,分子可分为极性分子和非极性分子。非极性分子是指分子的正负电荷中心重合,无外加电场时,分子偶极矩为零的分子,如  $H_2$ 、 $N_2$ 、 $CCl_4$  等分子。极性分子是指分子的正负电荷中心不重合,无外加电场时,分子偶极矩不为零,本身具有一个固有极矩的分子,如  $H_2O$  分子。

介质的极化一般分为三种情况。分别叫作电子极化、离子极化、取向极化。电子极化是指组成原子的电子云在电场的作用下,电子云相对于原子核发生位移,形成附加的电偶极矩。离子极化发生在由等量异号电荷组成的离子型分子中,在电场作用下组成离子型分子的正负离子,从其平衡位置发生位移,产生附加的电偶极矩。极性分子本身具有固有电偶极矩,由于分子的热运动,使各个分子的电偶极矩杂乱无章地排列,从而其合成电矩为零。但是在电场作用下,分子的电矩向电场方向转动,使得系统受到的总外力为零,总力矩为零,并且系统的能量最小,即达到一个稳定平衡,这样就产生一个合成电矩,这种极化称为取向极化。

单原子的电介质只有电子极化;所有化合物都存在离子极化和电子极化;一些化合物同时存在三种极化。

在极化介质中,每一个分子都是一个电偶极子,整个介质可以看成是真空中电偶极子有序排列的集合体。用极化强度表征电介质的极化性质。极化强度是一个矢量,它代表单位体积中电矩的矢量和。假设体积  $\Delta V$  里分子电矩的总和为  $\sum p$ ,则极化强度  $P$  为

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p}{\Delta V} \quad (2-40)$$

极化强度的单位是  $C/m^2$ 。

### 2.5.2 极化介质产生的电位

当一块电介质受外加电场的作用而极化后,就等效为真空中一系列电偶极子。极化介质产生的附加电场,实质上就是这些电偶极子产生的电场,如图 2-7 所示。

设极化介质的体积为  $V$ ,表面积是  $S$ ,极化强度是  $P$ ,现在计算介质外部任一点的电位。在介质中  $r'$  处取一个体积元  $\Delta V'$ ,因  $|r-r'|$  远大于  $\Delta V'$  的线度,故可将  $\Delta V'$  中介质当成一个偶极子,其偶极矩为  $p = P\Delta V'$ ,它在  $r$  处产生的电位是

$$\Delta\varphi(r) = \frac{P(r')\Delta V'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r-r'}{|r-r'|^3} \quad (2-41)$$

整个极化介质产生的电位是上式的积分:

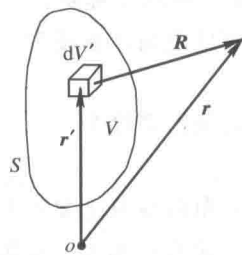


图 2-7 极化介质的电位

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2-42)$$

对上式进行变换, 利用

$$\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

变换为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2-43)$$

再利用矢量恒等式:

$$\nabla' \cdot (u\mathbf{A}) = u \nabla' \cdot \mathbf{A} + \nabla' u \cdot \mathbf{A}$$

令  $u = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ , 则

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (2-44)$$

式中,  $\mathbf{n}$  是  $S$  上某点的外法向单位矢量。上式的第一项与面分布电荷产生的电位表示式形式相同, 第二项与体分布电荷产生的电位表达式形式上相同,  $\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}$  和  $-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$  分别有面电荷密度和体电荷密度的量纲, 因此极化介质产生的电位可以看作等效体分布电荷和面分布电荷在真空中共同产生的。等效体电荷密度和面电荷密度分别为

$$\rho_p(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad (2-45)$$

$$\rho_{sp} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (2-46)$$

这个等效电荷也称为极化电荷, 或者称为束缚电荷。在实际计算时, 我们一般把公式(2-45)写为下述形式:

$$\rho(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

在以上的分析中, 场点是选取在介质外部。可以证明, 上面的结果也适用于极化介质内部任一点的电位的计算。有了电位表达式, 就能求出极化介质产生的电场。实际上, 以上的电位电场, 仅仅考虑的是束缚电荷产生的那一部分, 空间的总电场应该再加上自由电荷(也就是外加电荷)产生的电场。

**例 2-7** 一个半径为  $a$  的均匀极化介质球, 极化强度是  $P_0 \mathbf{e}_z$ , 求极化电荷分布及介质的电偶极矩。

**解:** 取球坐标系, 让球心位于坐标原点。

极化电荷体密度为

$$\rho_p(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0$$

极化电荷面密度为

$$\rho_{sp} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r = P_0 \cos\theta$$

分布电荷对于原点的偶极矩由下式计算(附带说一下, 一个带电系统的电偶极矩, 与选取的参考点无关, 也就是说, 可以选取任意点作为参考点来计算电偶极矩。我们在此是选坐标的原点为电偶极矩的参考点):

$$\mathbf{p} = \int_D \mathbf{r} dq$$

积分区域  $D$  是电荷分布的区域。因此

$$\mathbf{p} = \int_S \mathbf{r} \rho_p \, dS$$

代入球面上的各量, 有

$$\mathbf{r} = a(\mathbf{e}_r \sin\theta \cos\phi + \mathbf{e}_y \sin\theta \sin\phi + \mathbf{e}_z \cos\theta)$$

$$dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

得

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_z \frac{4\pi a^3}{3} P_0$$

其实, 由于本问题是均匀极化, 等效偶极矩肯定等于极化强度与体积之积。

### 2.5.3 介质中的场方程

在真空中高斯定理的微分形式为  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , 其中的电荷是指自由电荷。如前述, 极化介质产生的电场等效于束缚电荷的影响, 因此, 在电介质中, 高斯定理的微分形式便可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_p) \quad (2-47)$$

将  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  代入, 得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad (2-48)$$

这表明, 矢量  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  的散度为自由电荷密度。称此矢量为电位移矢量(或电感应强度矢量), 并记为  $\mathbf{D}$ , 即

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2-49)$$

于是, 介质中高斯定理的微分形式变为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-50)$$

在介质中, 电场强度的旋度仍然为零。将介质中静电场的方程归纳如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-51)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2-52)$$

与其相应的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (2-53)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2-54)$$

### 2.5.4 介电常数

在分析电介质中的静电问题时, 必须知道极化强度  $\mathbf{P}$  与电场强度  $\mathbf{E}$  之间的关系。 $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  间的关系由介质的固有特性决定, 这种关系称为组成关系。如果  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{E}$  同方向, 就称为各向同性介质, 若二者成正比, 就称为线性介质。实际应用中的大多数介质都是线性各向同性介质, 其组成关系为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2-55)$$

式中  $\chi_e$  为极化率, 是一个无量纲常数。从而有

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (2-56)$$

称  $\epsilon_r$  为介质的相对介电常数, 称  $\epsilon$  为介质的介电常数。

对于均匀介质( $\epsilon$  为常数), 电位满足如下的泊松方程:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2-57)$$

在自由电荷为零的区域, 电位满足拉普拉斯方程。

**例 2-8** 一个半径为  $a$  的导体球, 带电量为  $Q$ , 在导体球外套有外半径为  $b$  的同心介质球壳, 壳外是空气, 如图 2-8 所示。求空间任一点的  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{P}$  以及束缚电荷密度。

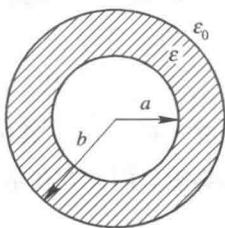


图 2-8 例 2-8 用图

**解:** 因导体及介质的结构是球对称的, 要保持导体球内的电场强度为零, 显然自由电荷及其束缚电荷的分布也必须是球对称的。从而,  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{P}$  的分布也是球对称的。即自由电荷均匀分布在导体球面上,  $\mathbf{D}$  在径向方向, 且在与导体球同心的任一球面上  $\mathbf{D}$  的数值相等。用介质中的高斯定理的积分形式, 取半径为  $r$  并且与导体球同心的球面为高斯面, 得

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \quad (r \geq a)$$

介质内( $a < r < b$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) = 0$$

介质外( $b < r$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{P} = 0$$

介质内表面( $r=a$ )的束缚电荷面密度:

$$\rho_{sp} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi a^2}$$

介质外表面( $r=b$ )的束缚电荷面密度:

$$\rho_{sp} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi b^2}$$

## 2.6 静电场的边界条件

不同的电介质的极化性质一般不同,因而在不同介质的分界面上静电场的场分量一般不连续。场分量在界面上的变化规律叫作边界条件。以下我们由介质中场方程的积分形式导出边界条件。

如图 2-9 所示,分界面两侧的介电常数分别为  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$ , 用  $\mathbf{n}$  表示界面的法向,并规定其方向由介质 1 指向介质 2。可以将  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  在界面上分解为法向分量和切向分量,法向分量沿  $\mathbf{n}$  方向,切向分量与  $\mathbf{n}$  垂直。先推导法向分量的边界条件。在分界面两侧作一个圆柱形闭合曲面,顶面和底面分别位于分界面两侧且都与分界面平行,其面积为  $\Delta S$ 。将介质中积分形式的高斯定理应用于这个闭合面,然后令圆柱的高度趋于零,此时在侧面的积分为零,于是有

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} \Delta S - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S = q = \rho_s \Delta S$$

即

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (2-58)$$

或

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (2-59)$$

其中,  $\rho_s$  表示分界面上的自由面电荷密度。上式说明,电位移矢量的法向分量在通过界面时一般不连续。如果界面上无自由电荷分布,即在  $\rho_s = 0$  时,边界条件变为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad (2-60)$$

或

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad (2-61)$$

这说明在无自由电荷分布的界面上,电位移矢量的法向分量是连续的。

现在推导电场强度切向分量的边界条件。设分界面两侧的电场强度分别为  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ , 如图 2-10 所示。在界面上作一狭长矩形回路,两条长边分别在分界面两侧,且都与分界面平行。作电场强度沿该矩形回路的积分,并令矩形的短边趋于零,有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}_2 = 0$$

因为  $\Delta \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}^\circ \Delta l$ ,  $\Delta \mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}^\circ \Delta l$ ,  $\mathbf{l}^\circ$  是沿  $\mathbf{l}$  方向的单位矢量,上式变为

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{l}^\circ = 0$$

注意到  $\mathbf{n} \perp \mathbf{l}^\circ$ , 故有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2-62)$$

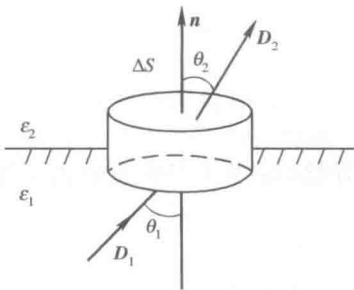


图 2-9 法向边界条件

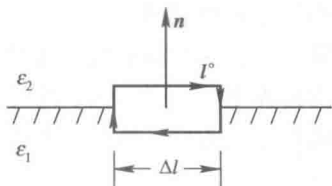


图 2-10 切向边界条件

或

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (2-63)$$

这表明, 电场强度的切向分量在边界两侧是连续的。

边界条件式(2-59)和式(2-63)可以用电位来表示。电场强度的切向分量连续, 意味着电位是连续的, 即

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (2-64)$$

由于

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$$

$$D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n} = -\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

法向分量的边界条件用电位表示为

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_s \quad (2-65)$$

在  $\rho_s = 0$  时, 有

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0 \quad (2-66)$$

最后, 分析电场强度矢量经过两种电介质界面时其方向的改变情况。设区域 1 和区域 2 内电力线与法向的夹角分别为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ , 由式(2-61)和式(2-63)得

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

另外, 在导体表面, 边界条件可以简化。导体内的静电场在静电平衡时为零。设导体外部的场为  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ , 导体的外法向为  $\mathbf{n}$ , 则导体表面的边界条件简化为

$$E_t = 0 \quad (2-67)$$

$$D_n = \rho_s \quad (2-68)$$

**例 2-9** 同心球电容器的内导体半径为  $a$ , 外导体的内半径为  $b$ , 其间填充两种介质, 上半部分的介电常数为  $\epsilon_1$ , 下半部分的介电常数为  $\epsilon_2$ , 如图 2-11 所示。设内、外导体带电分别为  $q$  和  $-q$ , 求各部分的电位移矢量和电场强度。

**解:** 两个极板间的场分布要同时满足介质分界面和导体表面的边界条件。因为内、外导体均是一个等位面, 可以假设电场沿径向方向, 然后, 再验证这样的假设满足所有的边界条件。

要满足介质分界面上电场强度切向分量连续, 上下两部分的电场强度应满足:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = E\mathbf{e}_r$$

在半径为  $r$  的球面上作电位移矢量的面积分, 有

$$2\pi\epsilon_1 r^2 E_1 + 2\pi\epsilon_2 r^2 E_2 = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2 E = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}$$

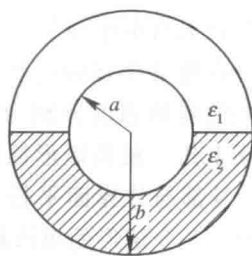


图 2-11 例 2-9 用图





### 2.7.2 电容系数和部分电容

多导体系统的电荷可以用各个导体的电位来表示,即将式(2-71)改写为

$$[q] = [p]^{-1}[\varphi] = [\beta][\varphi] \quad (2-74)$$

其中,  $[\beta]$  为  $[p]$  的逆矩阵, 其矩阵元素

式中:  $\Delta$  是矩阵  $[p]$  的行列式;  $M_{ij}$  是行列式中  $p_{ij}$  的代数余子式。将式(2-74)写成方程组, 有

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} \varphi_2 + \cdots + \beta_{1n} \varphi_n \\ q_2 &= \beta_{21} \varphi_1 + \beta_{22} \varphi_2 + \cdots + \beta_{2n} \varphi_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ q_n &= \beta_{n1} \varphi_1 + \beta_{n2} \varphi_2 + \cdots + \beta_{nn} \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (2-76)$$

称  $\beta_{ij}$  为电容系数。它的物理意义是, 导体  $j$  的电位为 1 V, 其余导体均接地, 这时导体  $i$  上的感应电荷量为  $\beta_{ij}$ 。由电容系数的定义得知, 导体  $j$  的电位比其余导体的电位都高, 所以电力线从导体  $j$  发出终止于其它导体或地, 也就是说导体  $j$  带正电, 其余导体带负电。根据电荷守恒定律,  $n$  个导体上的电荷再加上地面的电荷应为零, 这样其余  $n-1$  个导体所带电荷总和的绝对值必定不大于导体  $j$  的电荷量, 由此可推出:

$$\beta_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j) \quad (2-77)$$

$$\beta_{ii} > 0 \quad (2-78)$$

$$\sum_i \beta_{ij} \geq 0 \quad (2-79)$$

将式(2-76)写为

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= (\beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1n})\varphi_1 - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - \cdots - \beta_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n) \\ q_2 &= -\beta_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + (\beta_{21} + \beta_{22} + \cdots + \beta_{2n})\varphi_2 - \cdots - \beta_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ q_n &= -\beta_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) - \beta_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) - \cdots + (\beta_{n1} + \beta_{n2} + \cdots + \beta_{nm})\varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (2-80)$$

令

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \quad (2-81)$$

$$C_{ij} = -\beta_{ij} \quad (i \neq j) \quad (2-82)$$

则上式变为

[illegible]

这表明, 每个导体上的电荷均由  $n$  部分组成, 而其中的每一部分, 都可以在其它导体上找

到与之对应的等值异号电荷。如导体 1 上的  $C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$  这部分电荷, 在导体 2 上有一部分电荷  $C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1)$  与之对应。仿照电容器电容的定义, 比例系数  $C_{12}$  是导体 1 和 2 之间的部分电容。一般而言,  $C_{ij}$  是导体  $i$  和  $j$  之间的互部分电容,  $C_{ii}$  是导体  $i$  的自部分电容, 也就是导体  $i$  和地之间的部分电容。部分电容也具有互易性, 且为非负值, 即

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2-84)$$

$$C_{ij} \geq 0 \quad (2-85)$$

三个导体的部分电容如图 2-12 所示。

两个导体所组成的系统是实际中广泛应用的导体系统。若两个导体分别带电  $Q$ 、 $-Q$ , 且它们之间的电位差不受外界影响, 则此系统构成一个电容器。电容器的电容  $C$  与电位系数的关系为

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} \quad (2-86)$$

**例 2-10** 导体球及与其同心的导体球壳构成一个双导体系统。若导体球的半径为  $a$ , 球壳的内半径为  $b$ , 壳的厚度很薄可以不计(如图 2-13 所示), 求电位系数、电容系数和部分电容。

**解:** 先求电位系数。设导体球带电量为  $q_1$ , 球壳带总电荷为零, 无限远处的电位为零, 由对称性可得

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} = p_{11} q_1$$

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 b} = p_{21} q_1$$

因此有

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}$$

再设导体球的总电荷为零, 球壳带电荷为  $q_2$ , 可得

$$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 b} = p_{12} q_2, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 b} = p_{22} q_2$$

因此

$$p_{22} = p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}$$

电容系数矩阵等于电位系数矩阵的逆矩阵, 故有

$$\beta_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}, \quad \beta_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 b^2}{b-a}$$

部分电容为

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = 0$$

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

$$C_{22} = \beta_{21} + \beta_{22} = 4\pi\epsilon_0 b$$

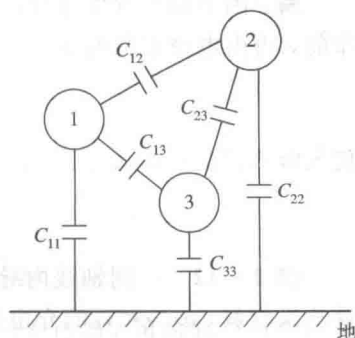


图 2-12 部分电容

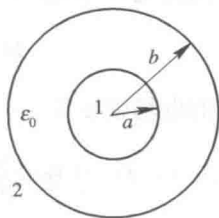


图 2-13 例 2-10 用图

**例 2-11** 假设真空中两个导体球的半径都为  $a$ , 两球心之间的距离为  $d$ , 且  $d \gg a$ , 求两个导体球之间的电容。

**解:** 因为两个导体球球心间的距离远大于导体球的半径, 球面的电荷可以看作均匀分布的, 再由电位系数的定义, 可得

$$p_{11} = p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

代入电容器的电容表示式(2-86), 得

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 ad}{d-a}$$

**例 2-12** 一同轴线内导体的半径为  $a$ , 外导体的内半径为  $b$ , 内、外导体之间填充两种绝缘材料,  $a < r < r_0$  的介电常数为  $\epsilon_1$ ,  $r_0 < r < b$  的介电常数为  $\epsilon_2$ , 如图 2-14 所示, 求单位长度的电容。

**解:** 设内、外导体单位长度带电分别为  $\rho_l$ 、 $-\rho_l$ , 内、外导体间的场分布具有轴对称性。由高斯定理可求出内、外导体间的电位移为

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi r}$$

各区域的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_1 r} \quad (a < r < r_0)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_2 r} \quad (r_0 < r < b)$$

内、外导体间的电压为

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^{r_0} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_0}^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho_l}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_0}{a} \right)$$

因此, 单位长度的电容为

$$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_0}{a}}$$

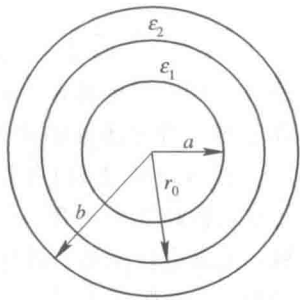


图 2-14 例 2-12 用图

## 2.8 电场能量与能量密度

### 2.8.1 电场能量

一个带电系统的建立, 都要经过其电荷从零到终值的变化过程, 在此过程中, 外力必须对系统做功。由能量守恒定律得知, 带电系统的能量等于外力所做的功。下面计算  $n$  个带电体组成的系统的静电能量。设每个带电体的最终电位为  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $\dots$ 、 $\varphi_n$ , 最终电荷为  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dots$ 、 $q_n$ 。带电系统的能量与建立系统的过程无关, 仅仅与系统的最终状态有关。假设在建立系统过程中的任一时刻, 各个带电体的电量均是各自终值的  $\alpha$  倍 ( $\alpha < 1$ ), 即带电

量为  $\alpha q_i$ ，电位为  $\alpha \varphi_i$ ，经过一段时间，带电体  $i$  的电量增量为  $d(\alpha q_i)$ ，外源对它所做的功为  $\alpha \varphi_i d(\alpha q_i)$ 。外源对  $n$  个带电体做功为

$$dA = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i d\alpha \quad (2-87)$$

因而，电场能量的增量为

$$dW_e = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i d\alpha \quad (2-88)$$

在整个过程中，电场的储能为

$$W_e = \int dW_e = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i \quad (2-89)$$

电场能量的表达式可以推广到分布电荷的情形。对于体分布电荷，可将其分割为一列体积元  $\Delta V$ ，每一体积元的电量为  $\rho \Delta V$ ，当  $\Delta V$  趋于零时，得到体分布电荷的能量为

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \rho(r) \varphi(r) dV \quad (2-90)$$

式中， $\varphi$  为电荷所在点的电位。同理，面电荷和线电荷的电场能量分别为

$$W_e = \int_S \frac{1}{2} \rho_s(r) \varphi(r) dS \quad (2-91)$$

$$W_e = \int_l \frac{1}{2} \rho_l(r) \varphi(r) dl \quad (2-92)$$

式(2-89)也适用于计算带电导体系统的能量。带电导体系统的能量也可以用电位系数或电容系数来表示：

$$W_e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} p_{ij} q_i q_j \quad (2-93)$$

$$W_e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \beta_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (2-94)$$

如果电容器极板上的电量为  $\pm q$ ，电压为  $U$ ，则电容器内储存的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (2-95)$$

### 2.8.2 能量密度

电场能量的计算公式(2-90)计算的是静电场的总能量，这个公式容易造成电场能量储存在电荷分布空间的印象。事实上，只要有电场的地方，移动带电体都要做功。这说明电场能量储存于电场所在的空间。以下分析电场能量的分布并引入能量密度的概念。

设在空间某区域有体电荷分布和面电荷分布，体电荷分布在  $S$  和  $S'$  限定的区域  $V$  内，面电荷分布在导体表面  $S$  上，如图 2-15 所示，该系统的能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \rho_s \varphi dS \quad (2-96)$$

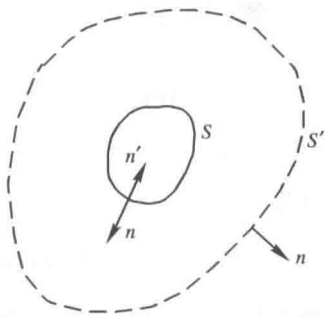


图 2-15 能量密度

将  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  和  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \rho_s$  代入上式, 有

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-97)$$

考虑到区域  $V$  以外没有电荷, 故可以将体积分扩展到整个空间, 而面积分仍在导体表面进行。利用矢量恒等式

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \nabla \varphi \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} dV &= \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \end{aligned}$$

将上式代入式(2-97), 并且注意在导体表面  $S$  上  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$ , 得

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \int_{S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-98)$$

式中  $V$  已经扩展到无穷大, 故  $S'$  在无穷远处。对于分布在有限区域的电荷,  $\varphi \propto 1/R$ ,  $D \propto 1/R^2$ ,  $S' \propto R^2$ , 因此当  $R \rightarrow \infty$  时, 上式中的面积分为零, 于是

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (2-99)$$

式中的积分在电场分布的空间进行, 被积函数  $\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$  从物理概念上可以理解为电场中某一点单位体积储存的静电能量, 称为静电场的能量密度, 以  $w_e$  表示, 即

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (2-100)$$

对于各向同性介质, 有

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (2-101)$$

**例 2-13** 若真空中电荷  $q$  均匀分布在半径为  $a$  的球体内, 计算电场能量。

**解:** 用高斯定理可以得到电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_r \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (r < a) \\ \mathbf{E} &= \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > a) \end{aligned}$$

所以

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[ \int_0^a \left( \frac{r}{a^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

如果用式(2-90)在电荷分布空间积分, 其结果与此一致。

**例 2-14** 若一同轴线内导体的半径为  $a$ , 外导体的内半径为  $b$ , 之间填充介电常数为  $\epsilon$  的介质, 当内、外导体间的电压为  $U$  (外导体的电位为零) 时, 求单位长度的电场能量。

**解:** 设内、外导体间电压为  $U$  时, 内导体单位长度带电量为  $\rho_l$ , 则导体间的电场强度为

$$E = e_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \quad (a < r < b)$$

两导体间的电压为

$$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

即

$$\rho_l = \frac{2\pi\epsilon U}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$E = e_r \frac{U}{r \ln \frac{b}{a}} \quad (a < r < b)$$

单位长度的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV = \int_a^b \frac{\epsilon U^2}{2r^2 \ln^2 \frac{b}{a}} 2\pi r dr = \frac{\pi\epsilon U^2}{\ln \frac{b}{a}}$$

## 2.9 电 场 力

带电体之间的相互作用力从原则上讲可以用库仑定律计算,但是实际上,除了少数简单情形以外,这种计算往往较难。在此介绍一种通过电场能量求力的方法,称为虚位移法。有时,这种方法显得方便而简洁。现以导体所受的电场力为例进行讨论。

虚位移法求带电导体所受电场力的思路是:假设在电场力  $\mathbf{F}$  的作用下,受力导体有一个位移  $d\mathbf{r}$ ,从而电场力做功  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ;因这个位移会引起电场强度的改变,这样电场能量就要产生一个增量  $dW_e$ ;再根据能量守恒定律,电场力做功及场能增量之和应该等于外源供给带电系统的能量  $dW_b$ ,即

$$dW_b = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW_e \quad (2-102)$$

下面分导体上的电荷不变和导体上的电位不变两种情形讨论。

### 1. 电荷不变

如果虚位移过程中,各个导体的电荷量不变,就意味着各导体都不连接外源。此时外源对系统做功  $dW_b$  为零,即

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW_e = 0 \quad (2-103)$$

因此,在位移的方向上,电场力为

$$F_r = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial r} \right|_q \quad (2-104)$$

我们分别取虚位移的方向在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向,就可以得出电场力的矢量形式:

$$\mathbf{F} = - \nabla W_e \Big|_q \quad (2-105)$$

### 2. 电位不变

如果在虚位移的过程中,各个导体的电位不变,就意味着每个导体都和恒压电源相连

接。此时,当导体的相对位置改变时,每个电源因要向导体输送电荷而做功。设各导体的电位分别为  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $\cdots$ 、 $\varphi_n$ ,各导体的电荷增量分别为  $dq_1$ 、 $dq_2$ 、 $\cdots$ 、 $dq_n$ ,则电源做功为

$$dW_b = \sum_{i=1}^n \varphi_i dq_i \quad (2-106)$$

系统的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i \quad (2-107)$$

系统能量的增量为

$$dW_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i dq_i \quad (2-108)$$

代入式(2-102),得

$$dW_b = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW_e = 2dW_e \quad (2-109)$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW_e \quad (2-110)$$

因此,在位移的方向上,电场力为

$$F_r = \left. \frac{\partial W_e}{\partial r} \right|_{\varphi} \quad (2-111)$$

与其相应的矢量形式为

$$\mathbf{F} = \nabla W_e \big|_{\varphi} \quad (2-112)$$

最后应说明,在电荷不变和电位不变条件下,电场力的表达式不同,但最终计算出的电场力是相同的。

**例 2-15** 若平板电容器极板面积为  $A$ ,间距为  $x$ ,电极之间的电压为  $U$ ,求极板间的作用力。

**解:** 设一个极板在  $yo z$  平面,第二个极板的坐标为  $x$ ,此时,电容器储能为

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{U^2 \epsilon_0 A}{2x}$$

当电位不变时,第二个极板受力为

$$F_x = \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{\varphi} = -\frac{U^2 \epsilon_0 A}{2x^2}$$

当电荷不变时,考虑到

$$U = Ex = \frac{qx}{\epsilon_0 A}$$

将能量表达式改写为

$$W_e = \frac{q^2 x}{2\epsilon_0 A}$$

$$F_x = -\left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_q = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 A} = -\frac{U^2 \epsilon_0 A}{2x^2}$$

可见,两种情况下的计算结果相同。式中的负号表示极板间的作用力为吸引力。

**例 2-16** 平行双线的两个导体圆柱的半径均为  $a$ ,二者的中轴线相距为  $d$ ,单位长度带电分别为  $\pm\lambda$ ,求带负电荷的导体圆柱单位长度所受到的电场力(假定导体间距  $d$  远大于半径  $a$ )。

**解:** 我们知道,这个问题的单位长度电容为



$$C_0 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}$$

为了采用虚位移法求电场力, 必须假设导体有一个位移。我们把带正电荷的导体圆柱固定不动, 假定带负电的导体圆柱在电场力的作用下它的中轴线移动到  $x$  处, 这样, 单位长度的电容就变为

$$C_0 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{x-a}{a}\right)}$$

这个系统单位长度的电场能量为

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{C_0} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x-a}{a}$$

我们使用电荷不变情形下的电场力公式, 可以求出带负电的导体柱单位长度受力为

$$F_x = -\frac{\partial W_{el}}{\partial x} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x-a}$$

最后, 我们再令这个受力表达式中的  $x$  为  $d$ , 就得到导体圆柱单位长度的受力。

当保持电位不变时, 同样可以求出受力。此时, 两个导体之间的电压为

$$U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{x-a}{a}$$

在  $x$  变化的情形下, 要使得电位不变, 电荷密度  $\lambda$  不再是常数。这时, 系统的单位长度的电场能量为

$$W_{el} = \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{\pi\epsilon_0}{2} U^2 \frac{1}{\ln\left(\frac{x-a}{a}\right)}$$

我们使用电位不变情形下的电场力公式, 可以求出带负电的导体柱单位长度受力为

$$F_x = \frac{\partial W_{el}}{\partial x} = -\frac{\pi\epsilon_0 U^2}{2} \frac{1}{\ln^2\left(\frac{x-a}{a}\right)} \frac{1}{x-a}$$

我们再使用关系式  $U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{x-a}{a}$ , 最后再令  $x$  为  $d$ , 就得到带负电荷的导体单位长度受力为

$$F_x = -\frac{\partial W_{el}}{\partial x} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d-a}$$

通过上面的例题我们看到, 虚位移法是在假想位移的情形下计算的电场力。在假设电位不变或者电荷不变的约束下, 能量的平衡关系是不同的。但是, 最后求得的电场力结果是一致的, 并不受假设条件的影响。下面我们再分析一个电场力的问题。

**例 2-17** 空气中有一个半径为  $a$  的导体球均匀带电, 电荷总量为  $Q$ , 求导体球面上的电荷单位面积受到的电场力。

**解:** 我们知道, 根据同性电荷相斥的原则, 不论导体球上的电荷是正是负, 导体表面的电荷都受到一个沿半径方向向外的电场力。导体球的电容为  $C = 4\pi\epsilon_0 a$ , 因而静电能量为

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

我们采用电荷不变情形下电场力的公式来计算。我们把导体半径  $a$  看作变量(注意在虚位移情形下, 导体半径应该有一个假想的位移, 所以半径  $a$  在虚位移过程中不应看作常数)。此时, 导体面上单位面积受到的电场力为

$$f = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial W_e}{\partial a} = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \right) = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^4}$$

这个力的方向是沿着矢径方向向外的。

当然, 我们可以通过库仑定律计算这个问题。下面我们采用库仑定律重新计算这个问题。我们知道, 在  $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$  公式中, 其电场表示的是外加电荷产生的场, 不包括试验电荷  $q$  所产生的场。为此, 我们做如下的处理。我们假定导体球的球心和坐标的原点重合, 并且假定导体是一个无限薄的球壳。我们在空间  $A(0, 0, a)$  点, 人为地作一个以  $A$  点为圆心、以  $b$  为半径的圆。注意, 这样得到的是球面上的一个圆, 假设这个圆所带的电量为  $q$ , 当半径  $b$  比较小时, 我们可以近似地认为, 其形状是一个平面圆盘。我们有  $q=\pi b^2\sigma$ , 其中  $\sigma$  是电荷面密度。下面我们分析, 除去刚才那个小圆盘以外, 其余的电荷在  $A$  点附近产生的电场。首先在  $b$  比较小时, 可以按照平面均匀带电圆盘来处理。均匀带电圆盘产生的电场为  $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , 其中的正号对应  $r \rightarrow a+0$  处的电场, 其方向沿矢径向外; 其中的负号对应  $r \rightarrow a-0$  处的电场, 其方向沿矢径向内。我们又知道, 由整个导体球产生的电场在球外  $r \rightarrow a+0$  处为  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$  (为了书写简便, 略去了电场的方向矢量)。这个带电球在球内产生的电场为零。并且在  $b$  较小时, 去掉小圆盘的剩余电荷在小圆盘附近产生的场, 在  $r \rightarrow a$  处是近似为常数, 我们把这个场记为  $E$ , 根据小圆盘和剩余电荷共同产生的场在球内为零, 就有

$$E - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

即

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2 \times 4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

上述结果是去掉小圆盘的剩余电荷在  $A$  点附近产生的电场。小圆盘上的电荷  $q$  受到外电场  $E$  的作用力为

$$F = qE = \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Q\pi b^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \sigma = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{Q}{4\pi a^2} \pi b^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^4} \pi b^2$$

单位面积受到的作用力为

$$f = \frac{F}{\pi b^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^4}$$

这个结果与采用虚位移法计算的一致。从这个例题可以看出, 采用虚位移法, 通过能量关系求电场力, 往往比使用库仑定律求力要简便。

虚位移法还能分析导体受到的力矩。若假设某一导体绕  $z$  轴有一个角位移  $d\theta$ , 则其所受力矩的  $z$  分量  $T_z$  做功为  $T_z d\theta$ 。这时, 力矩计算式为

$$T_z = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial \theta} \right|_q \quad (2-113)$$

$$T_z = \left. \frac{\partial W_e}{\partial \theta} \right|_\varphi \quad (2-114)$$

小 结

(1) 在均匀介质中点电荷及分布电荷的电场和电位。

点电荷: 
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

体电荷: 
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

面电荷: 
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

线电荷: 
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\rho_l(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl'$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'$$

(2) 真空中静电场的基本方程。

积分形式:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

(3) 静电场是有势场, 可以用电位  $\varphi$  的负梯度表示, 即  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 。

电位  $\varphi$  的微分方程为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

或

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

(4) 用极化强度  $\mathbf{P}$  描述介质的极化程度。

电位移矢量定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

对于各向同性介质:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

介质中, 高斯定理为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

与其相应的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

(5) 在不同介质界面上, 边界条件为

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad \text{或} \quad D_{2n} = D_{1n} \quad (\rho_s = 0)$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

边界条件用电位表示为

$$-\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s \quad \text{或} \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \quad (\rho_s = 0)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

(6) 在线性介质中, 多导体系统之间存在电位系数、电容系数和部分电容。这些量只与导体的形状、大小、相对位置及介质特性有关, 与导体所带电量和导体的电位无关。

(7) 静电场的能量存在于场中:

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V w_e dV$$

(8) 带电体受到的电场力可以用虚位移法计算:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e|_q$$

或

$$\mathbf{F} = \nabla W_e|_\varphi$$

## 习 题 二

2-1 总量为  $q$  的电荷均匀分布于球体中, 分别求球内、球外的电场强度。

2-2 半径分别为  $a$ 、 $b$  ( $a > b$ ), 球心距为  $c$  ( $c < a - b$ ) 的两球面之间有密度为  $\rho$  的均匀体电荷分布, 如图所示, 求半径为  $b$  的球面内任一点的电场强度。

2-3 一个半径为  $a$  的均匀带电圆柱(无限长)的电荷密度是  $\rho$ , 求圆柱体内、外的电场强度。

2-4 一个半径为  $a$  的均匀带电圆盘, 电荷面密度为  $\rho_{s0}$ , 求轴上任一点的电场强度。

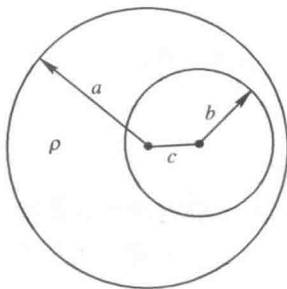
2-5 已知半径为  $a$  的球内、外电场分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} E_0 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \mathbf{e}_r & r > a \\ E_0 \left( \frac{r}{a} \right) \mathbf{e}_r & r < a \end{cases}$$

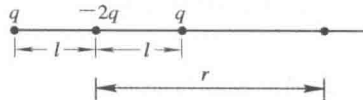
求电荷密度。

2-6 求习题 2-1 的电位分布。

2-7 电荷分布如图所示, 试证明, 在  $r \gg l$  处的电场为



习题 2-2 图



习题 2-7 图

$$E = \frac{3ql^2}{2\pi\epsilon_0 r^4}$$

2-8 真空中有两个点电荷, 一个电荷  $-q$  位于原点, 另一个电荷  $q/2$  位于  $(a, 0, 0)$  处, 求电位为零的等位面方程。

2-9 一个圆柱形极化介质的极化强度沿其轴向方向, 介质柱的高度为  $L$ , 半径为  $a$ , 且均匀极化, 求束缚体电荷分布及束缚面电荷分布。

2-10 假设  $x < 0$  的区域为空气,  $x > 0$  的区域为电介质, 电介质的介电常数为  $3\epsilon_0$ 。如果空气中的电场强度  $\mathbf{E}_1 = 3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z$  (V/m), 求电介质中的电场强度  $\mathbf{E}_2$ 。

2-11 一个半径为  $a$  的导体球表面套一层厚度为  $b-a$  的电介质, 电介质的介电常数为  $\epsilon$ 。假设导体球带电  $q$ , 求任意点的电位。

2-12 证明极化介质中, 束缚电荷体密度与自由电荷体密度的关系为

$$\rho_p = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \rho$$

2-13 同轴线内、外导体的半径分别为  $a$  和  $b$ , 证明其所储存的电能有一半是在半径为

$$c = \sqrt{ab}$$

的圆柱内。

2-14 将两个半径为  $a$  的雨滴当作导体球, 当它们带电后, 电势为  $U_0$ 。当此两雨滴并在一起(仍为球形)后, 求其电位。

2-15 真空中有两个导体球的半径都为  $a$ , 两球心之间距离为  $d$ , 且  $d \gg a$ , 计算两个导体之间的电容。

2-16 四个完全相同的导体球置于正方形的四个顶点, 并按照顺时针方向排序。若给球 1 带电荷  $q$ , 然后用细导线依次将它与球 2、3、4 接触, 每次接触均达到平衡为止。证明最后球 4 和球 1 上的电荷为

$$q_4 = \frac{q}{8} \frac{p_{11} - p_{24}}{p_{11} - p_{14}}, \quad q_1 = \frac{q}{8} \frac{p_{11} - 2p_{14} + p_{24}}{p_{11} - p_{14}}$$

2-17 间距为  $d$  的两平行金属板, 竖直地插入介电常数为  $\epsilon$  的液体内, 板间加电压  $U$ 。试证明, 两板间的液面升高为

$$h = \frac{1}{2\rho g} (\epsilon - \epsilon_0) \left( \frac{U}{d} \right)^2$$

式中:  $\rho$  为液体密度;  $g$  为重力加速度。

## 第三章 恒定电流的电场和磁场

运动的电荷在它周围不但产生电场,同时还产生磁场。由恒定电流或永久磁体产生的磁场不随时间变化,称为恒定磁场,也称为静磁场。本章主要讨论恒定电流产生的电场和磁场的基本特性以及磁场的计算等问题,主要内容有:

- 恒定电流的电场的基本特性
- 磁感应强度与磁场强度
- 恒定磁场的基本方程
- 磁介质中的场方程
- 恒定磁场的边界条件
- 自感与互感的计算
- 磁场能量与能量密度

### 3.1 恒定电流的电场

#### 3.1.1 电流密度

我们知道,导体内的自由电子在电场的作用下,会沿着与电场相反的方向运动,这样就形成电流。习惯上,规定正电荷运动的方向为电流的方向,用电流强度描述一根导线上电流的强弱(电流强度定义为单位时间内通过某导线截面的电荷量)。

电流强度只能描述一根导线上总电流的强弱。为了描述电荷在空间的流动情况(即考虑导体截面的大小),要引入电流密度的概念。电流密度是一个矢量,它的方向与导体中某点的正电荷运动方向相同(实际上是自由电子移动方向的反方向),大小等于与正电荷运动方向垂直的单位面积上的电流强度。若用  $\boldsymbol{n}$  表示某点处的正电荷运动方向,取与  $\boldsymbol{n}$  相互垂直的面积元  $\Delta S$ ,如图 3-1 所示。设通过  $\Delta S$  的电流为  $\Delta I$ ,则该点处的电流密度  $\boldsymbol{J}$  为

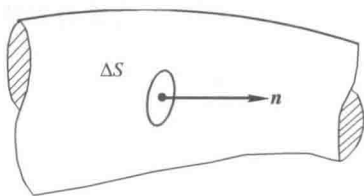


图 3-1 电流密度

相互垂直的面积元  $\Delta S$ ,如图 3-1 所示。设通过  $\Delta S$  的电流为  $\Delta I$ ,则该点处的电流密度  $\boldsymbol{J}$  为

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \mathbf{n} = \frac{dI}{dS} \mathbf{n} \quad (3-1)$$

电流密度的单位是安培/米<sup>2</sup> (A/m<sup>2</sup>)。导体内每一点都有一个电流密度, 因而构成一个矢量场。我们称这一矢量场为电流场。电流场的矢量线叫作电流线。

可以从电流密度  $\mathbf{J}$  求出流过任意面积  $S$  的电流强度。一般情况下, 电流密度  $\mathbf{J}$  和面积元  $d\mathbf{S}$  的方向并不相同。此时, 通过面积  $S$  的电流就等于电流密度  $\mathbf{J}$  在  $S$  上的通量, 即

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J \cos\theta dS \quad (3-2)$$

有时电流仅仅分布在导体表面的一个薄层内, 为此, 需要引入面电流密度的概念。空间任一点面电流密度的方向是该点正电荷运动的方向, 大小等于通过垂直于电流方向的单位长度上的电流。若用  $\mathbf{n}$  表示某点处的正电荷运动方向, 取与  $\mathbf{n}$  相互垂直的线元  $\Delta l$ , 如图 3-2 所示。设通过  $\Delta l$  的电流为  $\Delta I$ , 则该点处的面电流密度  $\mathbf{J}_s$  为

$$\mathbf{J}_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \mathbf{n} = \frac{dI}{dl} \mathbf{n} \quad (3-3)$$

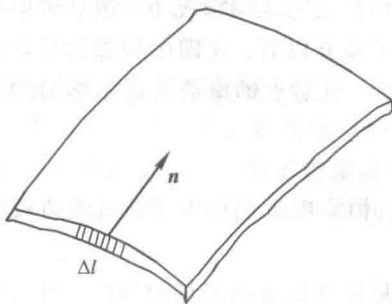


图 3-2 面电流密度

电流可以分为传导电流和运流电流。传导电流是指导体中的自由电子或半导体中的自由电荷在电场作用下作定向运动所形成的电流, 如金属中的电流、电解液中的电流均是传导电流。电荷在真空中或者气体中, 由于电场的作用而产生运动时, 形成的电流称为运流电流。如电真空管中的电流是运流电流。运流电流和传导电流的显著不同在于, 运流电流不服从我们后面将要介绍的欧姆定律。就是说, 运流电流的电流密度不与电场强度成正比, 有时候, 二者的方向可能不一致。同样, 运流电流也不服从焦耳定律。电场对运流电流所做的功, 不会变化为热量, 而是使得电荷加速。

当体密度为  $\rho$  的带电粒子以速度  $\mathbf{v}$  运动时, 运流电流密度为

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (3-4)$$

### 3.1.2 电荷守恒定律

电荷守恒定律表明, 任一封闭系统的电荷总量不变。也就是说, 任意一个体积  $V$  内的电荷增量必定等于流入这个体积的电荷量。因而, 在体电流密度为  $\mathbf{J}$  的空间内, 任取一个封闭的曲面  $S$ , 通过  $S$  面流出的电流应该等于以  $S$  为边界的体积  $V$  内单位时间内电荷减少的量, 即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (3-5)$$

式中  $V$  是边界  $S$  所限定的体积。因积分是在固定体积内进行的, 即积分限与时间无关, 所以上式微分可以移到积分内。一般情况下  $\mathbf{J}$  是空间点  $\mathbf{r}$  和时间  $t$  的函数, 故而要写成求偏导的形式, 从而有

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3-6)$$

上式是电荷守恒的数学表达式, 亦称为电流连续性方程的积分形式。对其应用散度定理, 则有

$$\int_V \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \tag{3-7}$$

要使这个积分对任意的体积  $V$  均成立, 必须使被积函数为零, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

此式是电流连续性方程的微分形式。

在恒定电流的情况下, 虽然带电粒子不断地运动, 但是从宏观上看, 可认为某点的带电粒子离开以后, 立即由相邻的带电粒子来补偿, 以便保证电流的恒定。也就是说, 导电媒质内, 任意点的电荷分布不随时间变化, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3-8}$$

因此, 恒定电流场的电流连续性方程变为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{3-9}$$

上式是保证恒定电流场的条件, 也叫作恒定电流场的方程。其积分形式是

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{3-10}$$

上述方程表明, 恒定电流  $\mathbf{J}$  的矢量线总是无起始点、无终点的闭合曲线。

3.1.3 欧姆定律的微分形式

导体中由于存在自由电子, 在电场的作用下, 这些自由电子作定向运动, 就形成了电流。实验表明, 对于线性各向同性的导体, 任意一点的电流密度与该点的电场强度成正比, 即

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{3-11}$$

上式叫作欧姆定律的微分形式。 $\sigma$  是电导率, 其单位是西门子/米(S/m)。表 3-1 列出了几种材料在常温(20℃)下的电导率。

表 3-1 常用材料的电导率

材 料	电导率 $\sigma$ /(S/m)
铁(99.98%)	$10^7$
黄铜	$1.46 \times 10^7$
铝	$3.54 \times 10^7$
金	$3.10 \times 10^7$
铅	$4.55 \times 10^7$
铜	$5.80 \times 10^7$
银	$6.20 \times 10^7$
硅	$1.56 \times 10^{-3}$

通常的欧姆定律  $U=RI$ , 也叫作欧姆定律的积分形式。积分形式的欧姆定律描述一段



导线上的导电规律，而微分形式的欧姆定律描述导体内任一点的  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{E}$  的关系，所以它比积分形式更能细致地描述导体的导电规律。

应注意，运流电流不遵从欧姆定律。

以上的欧姆定律是电源外部的情形。现在讨论电源内部的情况。在电源内部，一定有非静电力存在。这个非静电力使正电荷从电源负极向正极运动，不断补充极板上的电荷，从而使得电荷分布保持不变，这样便可以维持恒定电流。所以说，非静电力是维持导体内电流恒定流动的的必要条件。所谓非静电力，是指不是由静止电荷产生的力。例如，在电池内，非静电力指的是由化学反应产生的使正、负电荷分离的化学力；在发电机内，非静电力是指电磁感应产生的作用于电荷上的洛仑兹力。

我们将非静电力对电荷的影响等效为一个非保守电场（也叫非库仑场），其电场强度  $\mathbf{E}'$  只存在于电源内部。在电源外部只存在由恒定分布的电荷产生的电场，称为库仑场，以  $\mathbf{E}$  表示。在电源内部既有库仑场  $\mathbf{E}$ ，也有非保守电场  $\mathbf{E}'$ ，二者方向相反。为了定量描述电源的特性，引入电动势这个物理量。其定义是：在电源内部搬运单位正电荷从负极到正极时非静电力所做的功，用  $\mathcal{E}$  表示（见图 3-3），其数学表达式为

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (3-12)$$

对于恒定电流而言，与之相应的库仑电场  $\mathbf{E}$  是不随时间变化的恒定电场，它是由不随时间变化的电荷产生的，因而，其性质与由静止电荷产生的静电场相同，即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

式中积分路径  $l$  是电源之内或之外的导体中的任意闭合回路，式中的电场表示由库仑场和非保守场叠加而成的总电场。

我们可以将电动势用总电场（库仑场与非库仑场之和）的回路积分表示：

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} \quad (3-13)$$

式中的积分是沿整个电流回路进行的。

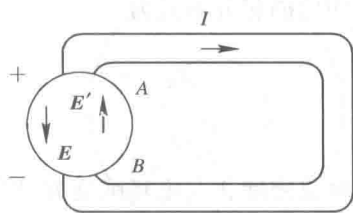


图 3-3 电动势

### 3.1.4 焦耳定律

金属导体内部的电流是由自由电子在电场力的作用下定向运动而形成的。自由电子在运动过程中不断与金属晶格点阵上的质子碰撞，由于质子的质量大约是自由电子的 1837 倍，因而在碰撞过程中近似地认为质子的位置不发生移动。这样整个碰撞过程是一个非弹性碰撞，就是说碰撞前后的机械能不守恒。电子碰撞中，把自身的能量传递给质子，使晶格点阵的热运动加剧，导体温度上升。这就是电流的热效应，这种由电能转换来的热能称为焦耳热。

当导体两端的电压为  $U$ ，流过的电流为  $I$  时，则在单位时间内电场力对电荷所做的功，即功率是

$$P = UI$$

在导体中,沿电流线方向取一长度为  $\Delta l$ 、截面为  $\Delta S$  的体积元,该体积元内消耗的功率为

$$\Delta P = \Delta U \Delta I = E \Delta l \Delta I = EJ \Delta l \Delta S = EJ \Delta V$$

当  $\Delta V \rightarrow 0$  时,取  $\Delta P / \Delta V$  的极限,就得出导体内任一点的热功率密度,表示为

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = EJ = \sigma E^2 \quad (3-14)$$

或

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (3-15)$$

此式就是焦耳定律的微分形式。

应该指出,焦耳定律不适合于运流电流。因为对于运流电流而言,电场力对电荷所做的功转变为电荷的动能,而不是转变为电荷与晶格碰撞的热能。

### 3.1.5 恒定电流场的基本方程

我们将电源外部导体中恒定电场的基本方程归纳如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3-16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3-17)$$

与其相应的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-18)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3-19)$$

电流密度  $\mathbf{J}$  与电场强度  $\mathbf{E}$  之间满足欧姆定律  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 。

以上的电场是指库仑场,因为在电源外的导体中,非库仑场为零。

由于恒定电场的旋度为零,因而可以引入电位  $\varphi$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 。在均匀导体内部(电导率  $\sigma$  为常数),有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \varphi) = -\nabla^2 \varphi = 0$$

### 3.1.6 恒定电流场的边界条件

将恒定电流场基本方程的积分形式应用到两种不同导体的界面上(如图 3-4 所示),可得出恒定电流场的边界条件为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (3-20)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = 0 \quad (3-21)$$

或

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (3-22)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (3-23)$$

这表明,电流密度  $\mathbf{J}$  在通过界面时其法向分量连续,电场强度  $\mathbf{E}$  的切向分量连续。

在恒定电场中,用电位  $\varphi$  表示的边界条件为

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (3-24)$$

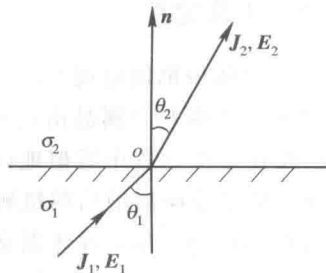


图 3-4 边界条件

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (3-25)$$

如前所述, 在导体的电导率为常数时, 在恒定电流情形下, 导体内体电荷密度为零。对于分区均匀的导体, 电荷只能分布在分界面上, 其面密度为

$$\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{2n} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{1n} = J_n \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right)$$

式中,  $J_n = J_{1n} = J_{2n}$ 。当  $\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$  时, 分界面上的面电荷密度为零。

应用边界条件, 可得

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

可以看出, 当  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ , 即第一种媒质为良导体, 第二种媒质为不良导体时, 只要  $\theta_1 \neq \pi/2$ ,  $\theta_2 \approx 0$ , 即在不良导体中, 电力线近似地与界面垂直。这样, 可以将良导体的表面看作等位面。

**例 3-1** 设同轴线的内导体半径为  $a$ , 外导体的内半径为  $b$ , 内、外导体间填充电导率为  $\sigma$  的导电媒质, 如图 3-5 所示, 求同轴线单位长度的漏电导。

**解:** 漏电电流的方向是沿半径方向从内导体到外导体, 如令沿轴向方向单位长度 ( $L=1$ ) 从内导体流向外导体的电流为  $I$ , 则在媒质内 ( $a < r < b$ ), 电流密度为

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r L} \mathbf{e}_r \bigg|_{L=1} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \frac{I}{2\pi\sigma r} \mathbf{e}_r$$

两导体间的电位差为

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$

这样, 可求出单位长度的漏电导为

$$G_0 = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

**例 3-2** 一个同心球电容器的内、外半径为  $a$ 、 $b$ , 其间媒质的电导率为  $\sigma$ , 求该电容器的漏电导。

**解:** 媒质内的漏电电流沿径向从内导体流向外导体, 设流过半径为  $r$  的任一同心球面的漏电电流为  $I$ , 则媒质内任一点的电流密度和电场为

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \mathbf{e}_r$$

内、外导体间的电压为

$$U = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

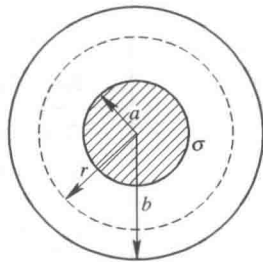


图 3-5 同轴线横截面

漏电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{4\pi\sigma ab}{b-a}$$

我们也可以通过计算媒质内的焦耳损耗功率,并由  $P=I^2R$  求出漏电阻  $R$ :

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_a^b \frac{I^2}{(4\pi r^2)^2 \sigma} 4\pi r^2 dr = \frac{I^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

### 3.1.7 恒定电流场与静电场的比拟

如果我们把导电媒质中电源外部的恒定电场与不存在体电荷区域的静电场加以比较,则会发现两者有许多相似之处,如表 3-2 所示。

表 3-2 恒定电场与静电场的比较

恒定电场(电源外)	静电场( $\rho=0$ 的区域)
$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$J_{1n} = J_{2n}$	$D_{1n} = D_{2n}$
$E_{1t} = E_{2t}$	$E_{1t} = E_{2t}$
$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	$q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$

可见,恒定电场中的  $\mathbf{E}$ 、 $\varphi$ 、 $\mathbf{J}$ 、 $I$  和  $\sigma$  分别与静电场中的  $\mathbf{E}$ 、 $\varphi$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $q$  和  $\epsilon$  相互对应,它们在方程和边界中处于相同的地位,因而它们是对偶量。由于二者的电位都满足拉普拉斯方程,只要两种情况下的边界条件相同,二者的电位必定是相同的。因此,当某一特定的静电问题的解已知时,与其相应的恒定电场的解可以通过对偶量的代换(将静电场中的  $\mathbf{D}$ 、 $q$  和  $\epsilon$  换为  $\mathbf{J}$ 、 $I$  和  $\sigma$ )直接得出,这种方法称为静电比拟法。例如,将金属导体 1、2 作为正、负极板置于无限大电介质或无限大导电媒质中,如图 3-6 所示,可以用静电比拟法通过电容计算极板间的电导。因为电容为

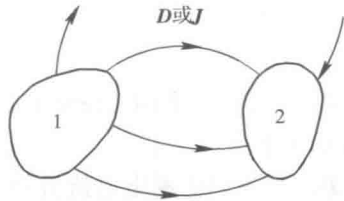


图 3-6 两极板间的电场

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

式中的面积分是沿正极板进行的, 线积分从正极到负极。极板间的电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\sigma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

也就是说, 恒定电场中的电导  $G$  和静电场中的电容  $C$  也是对偶量。如对于线间距为  $d$ , 线半径为  $a$  的平行双导线, 周围媒质的介电常数为  $\epsilon$ , 电导率为  $\sigma$ , 可从其电容

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d-a}{a}}$$

直接写出其电导为

$$G = \frac{\pi\sigma}{\ln \frac{d-a}{a}}$$

同理, 由同轴线的单位长度电容公式

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

可以直接得出同轴线单位长度的漏电导为

$$G_0 = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

**例 3-3** 计算深埋地下半径为  $a$  的导体半球的接地电阻 (如图 3-7 所示)。设土壤的电导率为  $\sigma$ , 接地半球的电导率为无穷大。

**解:** 导体球的电导率一般总是远大于土壤的电导率, 可将导体球看作等位体。在土壤内, 半径  $r$  等于常数的半球面是等位面。假设从接地线流入大地的总电流为  $I$ , 可以容易地求出, 在土壤内任意点处的电流密度, 等于电流  $I$  均匀分布在半球面上, 即

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_r \frac{I}{2\pi r^2}$$

这样, 就得到土壤内的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$$

把上述电场沿着电力线积分, 积分从  $r=a$  到无穷大, 就得到接地半球的电位, 即

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma a}$$

最后求出接地电阻为

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$

同样, 这个问题可以通过计算总的损耗功率来计算电阻。其中  $P = I^2 R$ , 而损耗功率能够通过功耗密度  $p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2$  的积分求出。

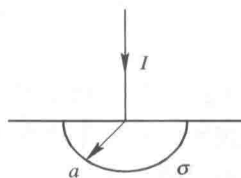


图 3-7 半球形接地器

**例 3-4** 求一条形状均匀, 但电导率非均匀的导线的电阻。设导线的横截面为  $A$ , 长度为  $L$ , 电导率沿长度方向的分布为  $\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)$ , 其中  $\sigma_0$  为常数。

**解:** 我们先计算位于  $x$  和  $x + \Delta x$  之间的这一小段导线的电阻, 并用  $dR$  来表示。很容易求得这一小段的电阻为

$$dR = \frac{dx}{A\sigma_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)}$$

同时能够判别出各个小段的电阻是串联关系, 这样就得到整个导线的电阻为

$$R = \int dR = \int_0^L \frac{dx}{A\sigma_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)} = \frac{\pi L}{4A\sigma_0}$$

**例 3-5** 一个导体的形状为内半径  $a$ , 外半径  $b$ , 高度为  $h$  的同心圆环柱状结构的  $1/4$ , 如图 3-8 所示。在下列三种情形下, 求导体的电阻(设导体的电导率为常数)。

- (1) 以顶面和底面为正负极;
- (2) 以内外半径为正负极;
- (3) 以左右侧面为正负极。

**解:** (1) 当以上下面为正负极时, 电阻器的几何形状与电导率都是均匀的, 因而可以方便地算出电阻为

$$R_1 = \frac{h}{\sigma S} = \frac{h}{\sigma \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi(b^2 - a^2)} = \frac{4h}{\sigma \pi(b^2 - a^2)}$$

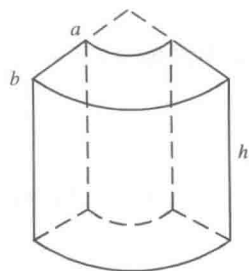


图 3-8 部分同心圆环电阻

(2) 当以内外半径为正负极时, 从内半径出发的电力线全部终止在外半径上, 此时不能采用均匀电阻器的公式计算。但是我们考虑在半径  $r$  和半径等于  $r + \Delta r$  之间的电阻, 然后用电阻的串联公式, 就可以得出电阻为

$$R_2 = \frac{4h}{\sigma \pi} \ln \frac{b}{a}$$

(3) 当以左右两个侧面为正负极时, 可以判定电力线是一个同心圆环形状。我们把要计算的导体划分为一系列的同心圆环, 可以看出, 每个圆环的电阻是并联关系。我们先求出一个圆环的电导值, 并且把这个小的电导记作  $dG$ , 使用电导的公式, 即电导与电导率成正比, 与面积成正比, 与长度成反比, 就有

$$dG = \frac{\sigma \cdot h \cdot dr}{\frac{\pi}{2} \cdot r} = \frac{2\sigma h}{\pi r} dr$$

对上述表达式积分, 得到总的电导为  $G = \frac{2\sigma h}{\pi} \ln \frac{b}{a}$ , 这样就得到电阻为

$$R = \frac{\pi}{2\sigma h} \ln \frac{b}{a}$$

**例 3-6** 一段金属导线的横截面为半径等于  $a$  的圆, 导线长度为  $L$ , 电导率非均匀, 且其仅仅是半径  $r$  的函数, 其形式为  $\sigma = \sigma_0 r/a$ , 求这段导线的电阻。

解：我们把导线划分为一系列同心圆环，先求出每个同心圆环的电阻，然后采用电阻并联公式求总电阻。一个圆环元的长度是  $L$ ，面积是  $2\pi r \, dr$ ，电导率为  $\sigma = \sigma_0 r/a$ 。我们可以容易地得到这个圆环的电阻为

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{2\pi r \Delta r} = \frac{aL}{2\pi\sigma_0 r^2 \Delta r}$$

令此式中的  $\Delta r$  趋于零，就可以用  $dr$  来近似  $\Delta r$ ，再采用电阻并联公式，把每一个小电阻对应的电导值叠加，并用积分计算这个叠加后的总电导，有

$$G = \int dG = \int_0^a \frac{2\pi\sigma_0 r^2}{aL} dr = \frac{2\pi a^2 \sigma_0}{3L}$$

最后得到电阻为

$$R = \frac{3L}{2\pi a^2 \sigma_0}$$

## 3.2 磁感应强度

运动的电荷在它的周围不但产生电场，同时还产生磁场。由恒定电流或永久磁体产生的磁场不随时间变化，称为恒定磁场，也称为静磁场。

恒定磁场的重要定律是安培定律(见图 3-9)。安培定律是法国物理学家安培根据实验结果总结出来的一个基本定律。安培定律指出：在真空中载有电流  $I_1$  的回路  $C_1$  上任一线元  $dI_1$  对另一载有电流  $I_2$  的回路  $C_2$  上任一线元  $dI_2$  的作用力为

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R})}{R^3} \quad (3-26)$$

式中： $I_1 d\mathbf{l}_1$  和  $I_2 d\mathbf{l}_2$  称为电流元矢量； $\mathbf{R}$  是  $d\mathbf{l}_1$  到  $d\mathbf{l}_2$  的距离矢量； $R = |\mathbf{R}|$ ； $\mu_0$  是真空的磁导率， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。回路  $C_2$  受到回路  $C_1$  的作用力为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R})}{R^3} \quad (3-27)$$

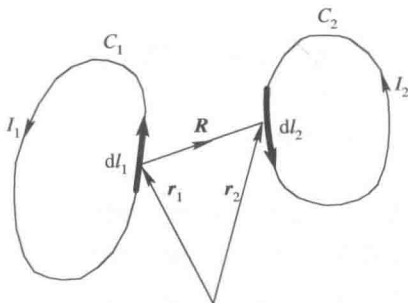


图 3-9 安培定律

需要说明的是，两个电流元之间的磁场力并不满足牛顿第三定律，即  $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$ ，在大多数情况下，这两个力甚至不在一条直线上，但是两个封闭的载流回路之间的作用力满足牛顿第三定律。

即用场的观点来看,力  $F_{12}$  应理解为第一个回路  $C_1$  在空间产生磁场,第二个回路在这一磁场中受力,即将公式(3-27)改写为

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \quad (3-28)$$

式中括号内的量是与  $I_2 d\mathbf{l}_2$  无关的,它与回路  $C_1$  的电流元的分布有关,也与场点  $\mathbf{r}_2$  的位置有关。令

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-29)$$

上式表示回路  $C_1$  在  $\mathbf{r}_2$  点产生的磁感应强度(也称磁通密度),在国际单位制中,它的单位是 T(特斯拉,简称特),也可用  $\text{Wb}/\text{m}^2$ (韦伯/米<sup>2</sup>)表示。这个公式也叫毕奥—萨伐尔定律。以后我们用  $\mathbf{r}'$  表示此式中的  $\mathbf{r}_1$ ,称其为源点;用  $\mathbf{r}$  表示  $\mathbf{r}_2$ ,称其为场点或观察点。

若电流不是线电流,而是具有体分布的电流  $\mathbf{J}$ ,则式(3-29)改为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (3-30)$$

同理,对面电流  $\mathbf{J}_s$ ,其产生的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (3-31)$$

从式(3-28)可以得出电流元  $I d\mathbf{l}$  在外磁场  $\mathbf{B}$  中受的力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

可以用上式计算各种形状的载流回路在外磁场中受到的力和力矩。对以速度  $\mathbf{v}$  运动的点电荷  $q$ ,其在外磁场  $\mathbf{B}$  中受的力是

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

如果空间还存在外电场  $\mathbf{E}$ ,电荷  $q$  受到的力还要加上电场力。这样,就得到带电  $q$  以速度  $\mathbf{v}$  运动的点电荷在外电磁场( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ )中受到的电磁力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

上式称为洛伦兹力公式。

**例 3-7** 求载流  $I$  的有限长直导线(参见图 3-10)外任一点的磁场。

**解:** 取直导线的中心为坐标原点,导线和  $z$  轴重合,在圆柱坐标中计算。将式(3-29)改写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

从对称关系能够看出磁场与坐标  $\phi$  无关。不失一般性,将场点取在  $\phi = 0$ ,即场点坐标为  $(r, 0, z)$ ,源点坐标为  $(0, 0, z')$ ,注意这里的角度  $\alpha$  选取逆时针方向为正。

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$z' = z - r \tan \alpha, \quad dz' = -r \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$d\mathbf{l}' = \mathbf{e}_z dz' = -\mathbf{e}_z r \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$R = r \sec \alpha$$

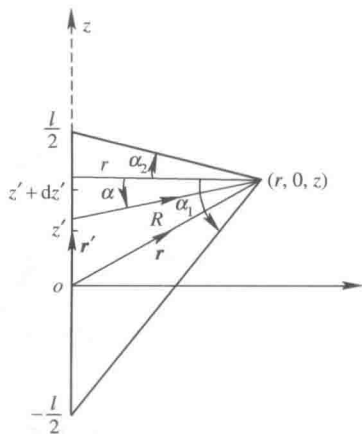


图 3-10 例 3-7 用图



$$dl' \times R = e_z dz' \times [re_r + (z - z')e_z] = e_\phi r dz' = -e_\phi r^2 \sec^2 \alpha d\alpha$$

所以

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dl' \times R}{R^3} = e_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\cos \alpha d\alpha \\ &= e_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{z + l/2}{\sqrt{r^2 + (z + l/2)^2}} \\ \sin \alpha_2 &= \frac{z - l/2}{\sqrt{r^2 + (z - l/2)^2}} \end{aligned}$$

对于无限长直导线 ( $l \rightarrow \infty$ ),  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$ , 其产生的磁场为

$$B = e_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

例 3-8 求载流的圆形导线回路在圆心处的磁感应强度(如图 3-11 所示)。

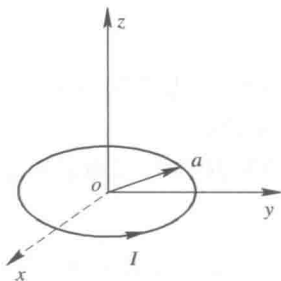


图 3-11 圆形导线

解: 根据题意, 源点在  $r'$  处, 并且  $r' = e_x a \cos \varphi + e_y a \sin \varphi$ ; 场点在  $r=0$ ; 这样就有:

$$R = r - r' = -e_x a \cos \varphi - e_y a \sin \varphi$$

$$R = |R| = a$$

$$I dl = e_\phi I a d\varphi$$

我们先求出  $I dl \times R$  的值。注意到

$$e_\phi = e_y \cos \varphi - e_x \sin \varphi$$

就有

$$I dl \times R = e_z I a^2 d\varphi$$

我们把上述各量代入由线电流产生的磁场公式

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I dl \times R}{R^3}$$

就有

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I dl \times R}{R^3} = e_z \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a^2 I}{a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi = e_z \frac{\mu_0 I}{2a}$$

附带说明一下, 在这个问题中, 如果仅仅限定在  $z=0$  的平面求磁场, 可以得到这时的

磁场仅仅存在  $z$  方向的分量, 并且, 在线圈内部( $r < a$ ), 磁场沿着正  $z$  方向, 在线圈外部( $r > a$ ), 磁场沿着负  $z$  方向。此时的磁场仅仅是一个变量  $r$  的函数, 它的详细计算要用到完全椭圆积分, 关于这一点, 我们放到磁偶极子以后再来分析。但在此, 我们说明一下  $z=0$  平面内磁场的变化趋势: 在圆心处, 磁场是一个常数。随着  $r$  的增加, 磁场也是增加的。当半径  $r$  从圆环内部趋近于圆环半径  $a$  时, 磁场趋于正无穷大, 并且是以  $1/(a-r)$  的形式趋于无穷大的。当半径  $r$  从圆环外部趋近于圆环半径  $a$  时, 磁场趋于负无穷大, 并且是以  $1/(r-a)$  的形式趋于无穷大的。这从极限情形很好理解, 当观察点在圆环线附近时, 可以把线圈看作一个载流直导线, 直导线的磁场在导线附近是趋于无穷大的。实际上, 这是我们没有考虑导线截面的缘故, 对于实际问题, 必须假定组成圆环线圈的导线不是无穷细, 而是有一个导线半径  $r_0$ , 这样就不会出现磁场为无穷大的情形。当半径  $r$  趋于无穷大时, 磁场趋于零, 并且是以  $1/r^3$  的形式趋于零。

### 3.3 恒定磁场的基本方程

#### 3.3.1 磁通连续性原理

毕奥—萨伐尔定律是恒定磁场的一个基本实验定律, 由它可以导出恒定磁场的其它重要性质。下面先讨论恒定磁场的通量特性。

磁感应强度在有向曲面上的通量简称为磁通量(或磁通), 单位是 Wb(韦伯), 用  $\Phi$  表示:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-32)$$

如  $S$  是一个闭曲面, 则

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-33)$$

现在我们以载流回路  $C$  产生的磁感应强度为例, 来计算恒定磁场在一个闭曲面上的通量。将式(3-29)代入式(3-33), 得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}'}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{S}}{R^3}$$

上式中,  $\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right)$ , 故可将其改写为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}'}{4\pi} \cdot \oint_S \left[ -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S} \right]$$

由矢量恒等式

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = -\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

则有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}'}{4\pi} \cdot \int_V \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV$$

而梯度场是无旋的:

$$\nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = 0$$

所以

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-34)$$

上式表明磁感应强度  $\mathbf{B}$  穿过任意曲面的通量恒为零, 这一性质叫作磁通连续性原理(尽管这里是以恒定磁场为例推导的, 但以后我们会学到磁通连续性原理对时变场也成立)。

使用散度定理, 得到

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$$

由于上式中积分区域  $V$  是任意的, 所以对空间的各点, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-35)$$

上式是磁通连续性原理的微分形式, 它表明磁感应强度  $\mathbf{B}$  是一个无源(指散度源)场。

### 3.3.2 安培环路定律

以上我们讨论了磁场的通量特性和散度特性, 现在研究它的环境特性和旋度特性。考虑载有电流  $I$  的回路  $C'$  产生的磁场  $\mathbf{B}$ , 研究任意一条闭曲线  $C$  上  $\mathbf{B}$  的环量。设  $P$  是  $C$  上的一点(如图 3-12 所示)。

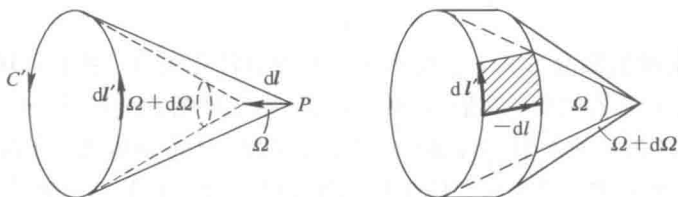


图 3-12 环路定律

先作磁感应强度  $\mathbf{B}$  与线元  $d\mathbf{l}$  的点积:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{-\mathbf{R}}{R^3} \cdot (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}')$$

假设回路  $C'$  对  $P$  点的立体角为  $\Omega$ , 同时  $P$  点位移  $d\mathbf{l}$  引起的立体角增量为  $d\Omega$ , 那么  $P$  点固定而回路  $C'$  位移  $d\mathbf{l}$  所引起的立体角增量也为  $d\Omega$ 。  $-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$  是  $d\mathbf{l}'$  位移  $-d\mathbf{l}$  所形成的有向面积。注意到  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , 这个立体角为  $d\Omega = \frac{(-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot (-\mathbf{R})}{R^3}$ 。 把其对回路  $C'$  积分, 就得到  $P$  点对回路  $C'$  移动  $d\mathbf{l}$  时所扫过的面积张的立体角, 记其为  $d\Omega$ , 则以上的磁场环量可以表示为

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\Omega$$

可以证明, 当载流回路  $C'$  和积分回路  $C$  相交链时, 有

$$\oint_C d\Omega = 4\pi$$

当载流回路  $C'$  和积分回路  $C$  不交链时, 有

$$\oint_C d\Omega = 0$$

这样当积分回路  $C$  和电流  $I$  相交链时, 可得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (3-36)$$

当穿过积分回路  $C$  的电流是几个电流时, 可以将式(3-36)改写为一般形式:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I \quad (3-37)$$

上式就是真空中的安培环路定律。它表明在真空中, 磁感应强度沿任意回路的环量等于真空磁导率乘以与该回路相交链的电流的代数和。电流的正负由积分回路的绕行方向与电流方向是否符合右手螺旋关系来确定, 如符合则取正, 不符合则为负。这个公式是安培环路定律的积分形式。根据斯托克斯定理, 可以导出安培环路定律的微分形式:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

由于

$$\sum I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

因而可将式(3-37)写为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

因积分区域  $S$  是任意的, 因而有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3-38)$$

上式是安培环路定律的微分形式, 它说明磁场的涡旋源是电流。我们可用此式从磁场求电流分布。对于对称分布的电流, 我们可以用安培环路定律的积分形式, 从电流求出磁场。

**例 3-9** 半径为  $a$  的无限长直导线, 载有电流  $I$ , 计算导体内、外的磁感应强度。

**解:** 在圆柱坐标系中计算, 取导体中轴线和  $z$  轴重合(同例 3-7 的图示)。由对称性知道, 磁场与  $z$  和  $\phi$  无关, 只是  $r$  的函数, 且只有  $\phi$  分量, 即磁感应线是圆心在导体中轴线上的圆。沿磁感应线取半径为  $r$  的积分路径  $C$ , 依安培环路定律得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

在导线内电流均匀分布, 导线外电流为零, 即

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi a^2} & r \leq a \\ \mathbf{0} & r > a \end{cases}$$

当  $r > a$  时, 积分回路包围的电流为  $I$ ; 当  $r \leq a$  时, 回路包围电流为  $I r^2 / a^2$ 。所以当  $r \leq a$  时:

$$B 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

当  $r > a$  时:

$$B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & r \leq a \\ \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > a \end{cases} \quad (3-39)$$

### 3.4 矢量磁位

从上节可知,磁感应强度的散度恒为零。由矢量恒等式我们得知,一个无源(散度源)场  $\mathbf{B}$  总能表示成为另一个矢量场的旋度,因此可以令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-40)$$

称式中的  $\mathbf{A}$  为矢量磁位(简称磁矢位),其单位是  $\text{T} \cdot \text{m}$ (特斯拉·米)或  $\text{Wb/m}$ (韦伯/米)。矢量磁位是一个辅助量。式(3-40)仅仅规定了磁矢位  $\mathbf{A}$  的旋度,而  $\mathbf{A}$  的散度可以任意假定。因为若  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 另一矢量  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$ , 其中  $\Psi$  是一个任意标量函数,则

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Psi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

即  $\mathbf{A}'$  和  $\mathbf{A}$  的旋度都为  $\mathbf{B}$ , 但它们具有不同的散度。指定一个磁矢位的散度,称为一种规范。在恒定磁场中,选取磁矢位的散度为零较为方便,即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

上式称为库仑规范。

将磁矢位代入式(3-38),得到

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

使用矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}$ , 并且代入库仑规范,有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3-41)$$

上式是磁矢位满足的微分方程,称为磁矢位的泊松方程。对无源区( $\mathbf{J}=0$ ),磁矢位满足矢量拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

式中,  $\nabla^2$  是矢量拉普拉斯算符。在任意坐标系中,其展开较复杂,但在直角坐标系中,其可以写成对各个分量分别运算,即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z$$

从而,可得到方程式(3-41)的分量形式:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

将这三个方程与静电场中电位的泊松方程对比,可以写出磁矢位的解:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x}{R} dV$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_y}{R} dV$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_z}{R} dV$$

将其写成矢量形式为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{R} dV \quad (3-42)$$

若磁场由面电流  $\mathbf{J}_s$  产生, 容易写出其磁矢位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_s}{R} dS \quad (3-43)$$

同理, 线电流产生的磁矢位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l}}{R} \quad (3-44)$$

注意, 以上三个计算磁矢位的公式, 均假定电流分布在有限区域且磁矢位的零点取在无穷远处(和静电位的积分公式类似)。

磁通的计算也可以通过磁矢位表示:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3-45)$$

其中,  $C$  是曲面  $S$  的边界。

**例 3-10** 求长度为  $l$  的载流直导线的磁矢位。

**解:** 取如图 3-13 所示的坐标系,  $\mathbf{A}$  只有  $z$  分量, 场点坐标是  $(r, \phi, z)$ 。

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(l/2 - z) + [(l/2 - z)^2 + r^2]^{1/2}}{-(l/2 + z) + [(-l/2 - z)^2 + r^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

当  $l \gg z$  时, 有

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{l/2 + [(l/2)^2 + r^2]^{1/2}}{-l/2 + [(-l/2)^2 + r^2]^{1/2}}$$

上式中, 若再取  $l \gg r$ , 则有

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( \frac{l}{r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r}$$

当  $l \rightarrow \infty$ , 上式为无穷大。这是因为当电流分布在无限区域时, 不能把无穷远处作为磁矢位的参考点, 而以上的计算均基于磁矢位的参考点在无穷远处。实际上, 当电流分布在无限区域时, 一般指定一个磁矢位的参考点, 就可以使磁矢位不为无穷大。当指定  $r = r_0$  处为磁矢位的零点时, 可以得出无穷长直导线的磁矢位为

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}$$

从上式, 用圆柱坐标的旋度公式可求出

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

**例 3-11** 用磁矢位重新计算载流直导线的磁场。

**解:** 坐标系如例 3-7 所示, 在导线内电流均匀分布, 导线外电流为零。

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi a^2} & r \leq a \\ \mathbf{0} & r > a \end{cases}$$

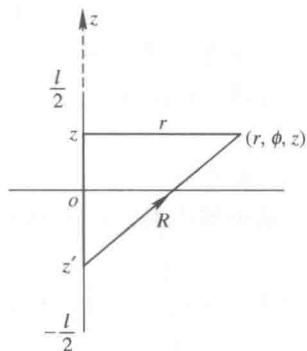


图 3-13 直导线磁矢位

从电流分布可以知道磁矢位仅仅有  $z$  分量, 而且它只是坐标  $r$  的函数, 即

$$\mathbf{A} = e_z A(r)$$

设在导线内磁矢位是  $A_1$ , 导线外磁矢位是  $A_2$ , 则由式(3-41), 得  
 $r < a$  时:

$$\nabla^2 A_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_1}{\partial r} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}$$

$r > a$  时:

$$\nabla^2 A_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) = 0$$

考虑到磁矢位只是  $r$  的函数, 以上两个偏微分方程就化为常微分方程。对其积分, 可以得出

$$A_1 = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} + C_1 \ln r + C_2$$

$$A_2 = C_3 \ln r + C_4$$

其中,  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  是待定常数。我们先确定常数  $C_1$ 。由于  $r=0$  处磁矢位不应是无穷大, 所以可以定出  $C_1=0$ , 其余的三个常数暂时不考虑。将磁矢位代入公式

$$\mathbf{B} = -e_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

可以求出导线内、外的磁场分别为

$$\mathbf{B}_1 = e_\phi \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

$$\mathbf{B}_2 = -e_\phi \frac{C_3}{r}$$

这里仍然有一个常数  $C_3$  待定。可以从分界面上沿圆周方向的磁感应强度连续(详细的论述见后面的恒定磁场边界条件一节)定出  $C_3$ :

$$C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

导体外部的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = e_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

通过以上几个例题可以看出, 引入磁矢位以后, 简化了计算。虽然磁矢位仍然是矢量, 但是它的计算要比直接计算磁感应强度容易。特别是对许多问题, 在给定的坐标系下, 磁矢位仅仅只有一个分量, 而磁感应强度却不止一个分量。此外, 如果用求解微分方程的方法计算磁矢位, 常常可以引进标量函数表示它, 从而把矢量方程简化为标量方程。一旦求出磁矢位, 再计算其旋度, 就较容易得出磁感应强度。

### 3.5 磁偶极子

我们先考虑一个载流  $I$ 、半径为  $a$  的圆形平面回路在远离回路的区域产生的磁场(如图 3-14 所示)。取载流回路位于  $xoy$  平面, 并且中心在原点。因为本问题的电流分布的对称

性, 所以磁矢位在球面坐标系只有  $A_\phi$  分量。 $A_\phi$  是  $r$  和  $\theta$  的函数, 与  $\phi$  无关。根据这一性质, 可以将场点选取在  $xoz$  平面。

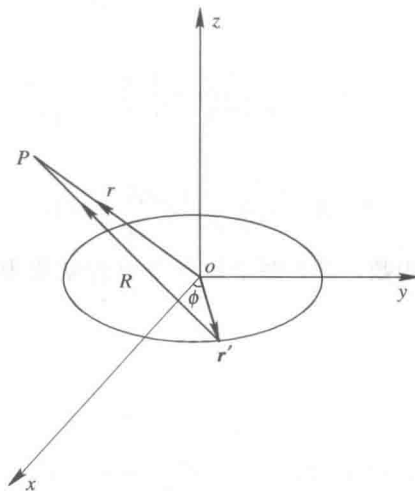


图 3-14 磁偶极子

在此平面里,  $A_\phi$  与直角坐标的  $A_y$  分量一致, 它是电流元矢量  $Idl'$  的  $y$  分量  $Ia d\phi \cos\phi$  所产生的磁矢位分量总和:

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Ia \cos\phi}{R} d\phi \quad (3-46)$$

式中:

$$R = (r^2 + a^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2} = r \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right]^{1/2}$$

$$|\mathbf{r}'| = a$$

如果  $r \gg a$ , 则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

从图 3-14 可见:

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{e}_x \sin\theta + \mathbf{e}_z \cos\theta)$$

$$\mathbf{r}' = a(\mathbf{e}_x \cos\phi + \mathbf{e}_y \sin\phi)$$

所以

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\phi \right)$$

将上式代入式(3-46), 积分后得出

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\pi a^2}{r^2} \sin\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta \quad (r \gg a) \quad (3-47)$$

式中,  $m = I\pi a^2$ , 是圆形回路磁矩的模值。一个载流回路的磁矩是一个矢量, 其方向与环路的法线方向一致, 大小等于电流乘以回路面积, 即其定义为

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}$$

式中,  $\mathbf{S}$  是回路的有向面积。注意, 这一定义并不局限于平面回路, 可以是三维空间的任意



闭曲线。这时,  $\mathbf{S} = \int_S d\mathbf{S}'$ ,  $d\mathbf{S}'$  是有向面积元, 积分区域是以电流环为周界的任意曲面, 这个任意性并不影响所得有向面积的矢量值。

我们可将式(3-47)改写为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (r \gg a) \quad (3-48)$$

对式(3-47)在球面坐标系中求旋度, 得出磁场:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \end{aligned} \quad (3-49)$$

这一磁场与电偶极子的电场强度相似, 所以将载有恒定电流的小回路称为磁偶极子。应注意, 对于任一载流回路, 不论其电流及形状如何, 只要其磁矩  $\mathbf{m}$  给定, 远区的磁场表达式均相同。在远区(观察点到导线的距离远大于回路的尺度), 磁偶极子的磁力线与电偶极子的电力线具有相同的分布。但是应注意, 在近区, 二者并不相同, 因为电力线从正电荷出发, 到负电荷终止, 而磁力线总是没有头尾的闭合曲线。磁偶极子的磁位和磁场, 在讨论介质的磁化问题时很重要。

位于点  $\mathbf{r}'$  的磁矩为  $\mathbf{m}$  的磁偶极子, 在点  $\mathbf{r}$  处产生的磁矢位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

位于外磁场  $\mathbf{B}$  中的磁偶极子  $\mathbf{m}$ , 会受到外磁场的作用力及其力矩。这里仅仅给出作用力及力矩的公式。作用力为

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

力矩为

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

### 3.6 磁介质中的场方程

前几节我们讨论了真空中恒定磁场的基本规律。当空间存在磁介质时, 磁介质在磁场的作用下要产生磁化。正如极化的电介质要产生电场一样, 磁化的磁介质也产生磁场, 它产生的磁场叠加在原来的磁场上, 引起磁场的改变。现在讨论磁介质内部恒定磁场的基本规律。

#### 3.6.1 磁化强度

在普通物理课程中, 我们学习过任何物质原子内部的电子总是沿轨道作公转运动, 同时作自旋运动。电子运动时所产生的效应与回路电流所产生的效应相同。物质分子内所有电子对外部所产生的磁效应总和可用一个等效回路电流表示, 这个等效回路电流称为分子

电流, 分子电流的磁矩叫作分子磁矩。

在外磁场的作用下, 电子的运动状态要产生变化, 这种现象称为物质的磁化。能被引起磁化的物质叫磁介质。磁介质分为三类: 抗磁性磁介质(如金、银、铜、石墨、锑、氯化钠等); 顺磁性磁介质(如氮气、硫酸亚铁等); 铁磁性磁介质(如铁、镍、钴等)。这三类磁介质在外磁场的作用下, 都要产生感应磁矩, 且物质内部的固有磁矩沿外磁场方向取向, 这种现象叫作物质的磁化。磁化介质可以看作真空中沿一定方向排列的磁偶极子的集合。为了定量描述介质磁化程度的强弱, 引入一个宏观物理量磁化强度  $\mathbf{M}$ , 其定义为介质内单位体积内的分子磁矩, 即

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V} \quad (3-50)$$

式中  $\mathbf{m}$  是分子磁矩, 求和对体积元  $\Delta V$  内的所有分子进行。磁化强度  $\mathbf{M}$  的单位是 A/m (安培/米)。如在磁化介质中的体积元  $\Delta V$  内, 每一个分子磁矩的大小和方向全相同(都为  $\mathbf{m}$ ), 单位体积内分子数是  $N$ , 则磁化强度为

$$\mathbf{M} = \frac{N\Delta V \mathbf{m}}{\Delta V} = N\mathbf{m} \quad (3-51)$$

### 3.6.2 磁化电流

磁介质被外磁场磁化以后, 就可以看作真空中的一系列磁偶极子。磁化介质产生的附加磁场实际上就是这些磁偶极子在真空中产生的磁场。磁化介质中由于分子磁矩的有序排列, 在介质内部要产生某一个方向的净电流, 在介质的表面也要产生宏观面电流。下面计算磁化电流密度。如图 3-15 所示, 设  $P$  为磁化介质外部的一点, 磁化介质内部  $\mathbf{r}'$  处体积元  $\Delta V'$  内的磁偶极矩为  $\mathbf{M}\Delta V'$ , 它在  $\mathbf{r}$  处产生的磁矢位为

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\Delta V' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

全部磁介质在  $\mathbf{r}$  处产生的磁矢位为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} dV' \end{aligned}$$

可以将上式改写为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R} dV'$$

再用恒等式

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = - \oint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

可将磁矢位的表示式变形为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}'}{R} dS'$$

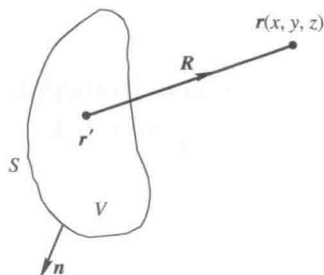


图 3-15 磁化介质的场

上式中,  $\mathbf{n}'$  是磁介质表面的单位外法向矢量, 第一项与体分布电流产生的磁矢位表达式相同, 第二项与面分布电流产生的磁矢位表达式相同。因此, 磁化介质所产生的磁矢位可以看作等效体电流和面电流在真空中共同产生的。等效体电流和面电流密度分别为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3-52)$$

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (3-53)$$

其中,  $\mathbf{n}$  是磁化介质表面的外法向。这个等效电流也叫作磁化电流(如图 3-16 所示), 或叫束缚电流。

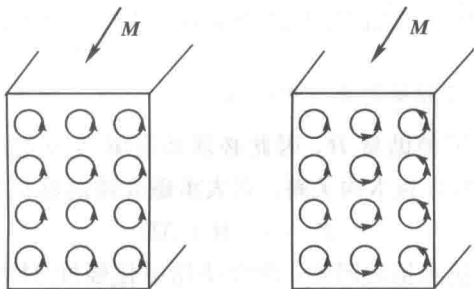


图 3-16 磁化电流示意图

**例 3-12** 半径为  $a$ 、高为  $L$  的磁化介质柱(如图 3-17 所示), 磁化强度为  $\mathbf{M}_0$  ( $\mathbf{M}_0$  为常矢量, 且与圆柱的轴线平行), 求磁化电流  $\mathbf{J}_m$  和磁化面电流  $\mathbf{J}_{mS}$ 。

**解:** 取圆柱坐标系的  $z$  轴和磁介质柱的中轴线重合, 磁介质的下底面位于  $z=0$  处, 上底面位于  $z=L$  处。此时,  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ , 由式(3-52)得磁化电流为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (M_0 \mathbf{e}_z) = \mathbf{0}$$

在界面  $z=0$  上,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ , 有

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = M_0 \mathbf{e}_z \times (-\mathbf{e}_z) = \mathbf{0}$$

在界面  $z=L$  上,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ , 有

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = M_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

在界面  $r=a$  上,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ , 有

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = M_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = M_0 \mathbf{e}_\phi$$

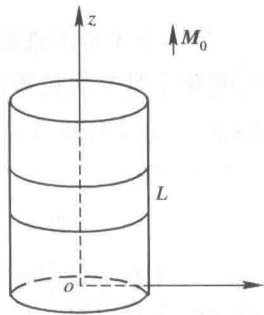


图 3-17 例 3-12 用图

### 3.6.3 磁场强度

在外磁场的作用下, 磁介质内部有磁化电流  $\mathbf{J}_m$ 。磁化电流  $\mathbf{J}_m$  和外加的电流  $\mathbf{J}$  都产生磁场, 这时应将真空中的安培环路定律修正为下面的形式:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_m) = \mu_0 \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \cdot d\mathbf{S}$$

将式(3-52)代入上式, 得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

将上式改写为

$$\oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I$$

令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (3-54)$$

其中  $\mathbf{H}$  称为磁场强度, 单位是 A/m(安培/米)。于是有

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (3-55)$$

与上式相应的微分形式是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3-56)$$

式(3-55)称为磁介质中积分形式的安培环路定律, 式(3-56)是其微分形式。

### 3.6.4 磁导率

由于在磁介质中引入了辅助量  $\mathbf{H}$ , 因此必须知道  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{H}$  之间的关系才能最后解出磁感应强度  $\mathbf{B}$ 。 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的关系称为本构关系, 它表示磁介质的磁化特性。将式(3-54)改写为

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (3-57)$$

由于历史上的原因以及方便测量的因素, 常常使用磁化强度  $\mathbf{M}$  与磁场强度  $\mathbf{H}$  之间的关系来表征磁介质的特性, 并按照  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  之间的不同关系, 将磁介质分为各向同性与各向异性、线性与非线性以及均匀与非均匀等类别。对于线性各向同性的均匀磁介质,  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  间的关系为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3-58)$$

式中  $\chi_m$  是一个无量纲常数, 称为磁化率。非线性磁介质的磁化率与磁场强度有关, 非均匀介质的磁化率是空间位置的函数, 各向异性介质的  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{H}$  的方向不在同一方向上。顺磁介质的  $\chi_m$  为正, 抗磁介质的  $\chi_m$  为负。这两类介质的  $\chi_m$  约为  $10^{-5}$  量级。将式(3-58)代入式(3-57), 得

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (3-59)$$

式中:  $\mu_r = 1 + \chi_m$ , 是介质的相对磁导率, 是一个无量纲数;  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , 是介质的磁导率, 单位和真空磁导率相同, 为 H/m(亨/米)。

铁磁材料的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的关系是非线性的, 并且  $\mathbf{B}$  不是  $\mathbf{H}$  的单值函数, 会出现磁滞现象, 其磁化率  $\chi_m$  的变化范围很大, 可以达到  $10^6$  量级。

### 3.6.5 磁介质中恒定磁场的基本方程

综上所述, 我们得到磁介质中描述磁场的基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3-60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-61)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3-62)$$

式(3-60)和式(3-61)是介质中恒定磁场方程的微分形式, 其相应的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3-63)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-64)$$

由式(3-61)可以看出,在介质中同样可以定义磁矢位  $\mathbf{A}$ ,使  $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 。在线性均匀各向同性介质中,如采用库仑规范,那么磁矢位的微分方程为

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} \quad (3-65)$$

**例 3-13** 同轴线的内导体半径为  $a$ ,外导体的内半径为  $b$ ,外半径为  $c$ ,如图 3-18 所示。设内、外导体分别流过反向的电流  $I$ ,两导体之间介质的磁导率为  $\mu$ ,求各区域的  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{M}$ 。

**解:**以后如无特别声明,对良导体(不包括铁等磁性物质)一般取其磁导率为  $\mu_0$ 。因同轴线为无限长,则其磁场沿轴线无变化,该磁场只有  $\phi$  分量,且其大小只是  $r$  的函数。分别在各区域使用介质中的安培环路定律  $\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ ,求出各区的磁场强度  $\mathbf{H}$ ,然后由  $\mathbf{H}$  求出  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{M}$ 。

当  $r\leq a$  时,电流  $I$  在导体内均匀分布,且流向  $+z$  方向。由安培环路定律得

$$\mathbf{H}=e_\phi\frac{Ir}{2\pi a^2} \quad (r\leq a)$$

考虑这一区域的磁导率为  $\mu_0$ ,可得

$$\mathbf{B}=e_\phi\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \quad (r\leq a)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{0} \quad (r\leq a)$$

当  $a<r\leq b$  时,与积分回路交链的电流为  $I$ ,该区磁导率为  $\mu$ ,可得

$$\mathbf{H}=e_\phi\frac{I}{2\pi r} \quad (a<r\leq b)$$

$$\mathbf{B}=e_\phi\frac{\mu I}{2\pi r} \quad (a<r\leq b)$$

$$\mathbf{M}=e_\phi\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{I}{2\pi r} \quad (a<r\leq b)$$

当  $b<r\leq c$  时,考虑到外导体电流均匀分布,可得出与积分回路交链的电流为

$$I'=I-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}I$$

则

$$\mathbf{H}=e_\phi\frac{I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \quad (b<r\leq c)$$

$$\mathbf{B}=e_\phi\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \quad (b<r\leq c)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{0} \quad (b<r\leq c)$$

当  $r>c$  时,这一区域的  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{M}$  为零。

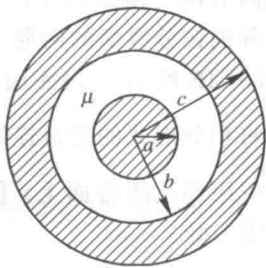


图 3-18 同轴线示意图

### 3.7 恒定磁场的边界条件

在不同磁介质的分界面上,磁场是不连续的, $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  在经过界面时会发生突变。场矢

量在不同磁介质的界面上的变化规律叫作边界条件。我们可以由恒定磁场基本方程的积分形式导出恒定磁场的边界条件。

先推导  $\mathbf{B}$  的法向分量的边界条件。在分界面上作一圆柱状小闭合面, 圆柱的顶面和底面分别在分界面的两侧, 且都与分界面平行(如图 3-19 所示)。设底面和顶面的面积均等于  $\Delta S$ 。

将积分形式的磁通连续性原理(即  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ) 应用到此闭合面上, 假设圆柱体的高度  $h$  趋于零, 得

$$-\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} \Delta S = 0$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (3-66)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3-67)$$

上式称为磁感应强度矢量法向分量的边界条件, 它说明磁感应强度的法向分量在两种磁介质的界面上是连续的。

再来推导  $\mathbf{H}$  的切向分量的边界条件。在分界面上作一小矩形回路, 回路的两边分别位于分界面两侧, 回路的高  $h \rightarrow 0$ , 令  $\mathbf{n}$  表示界面上  $\Delta l$  中点处的法向单位矢,  $\mathbf{l}^\circ$  表示该点的切向单位矢,  $\mathbf{b}$  为垂直于  $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{l}^\circ$  的单位矢(注意,  $\mathbf{b}$  也是界面的切向单位矢,  $\mathbf{b}$  和积分回路  $C$  垂直, 而  $\mathbf{l}^\circ$  位于积分回路  $C$  内), 如图 3-20 所示。将介质中积分形式的安培环路定律

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

应用在这一回路, 得

$$(\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l}^\circ - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l}^\circ) \Delta l = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

若界面上的电流可以看成面电流, 则

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{b} \Delta l$$

于是有

$$\mathbf{l}^\circ \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{b} \Delta l$$

考虑到  $\mathbf{l}^\circ = \mathbf{b} \times \mathbf{n}$ , 得

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{b}$$

使用矢量恒等式

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$$

可得

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \cdot \mathbf{b} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{b}$$

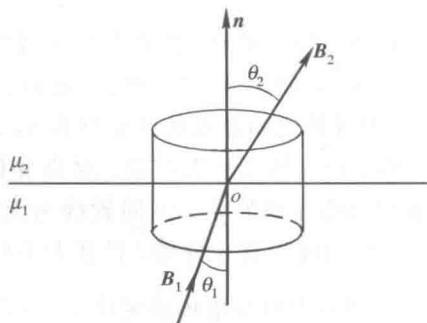


图 3-19  $\mathbf{B}$  的边界条件

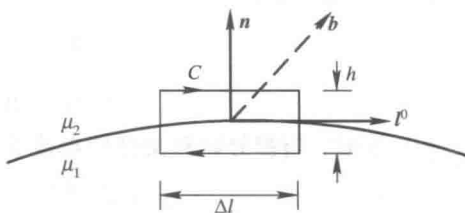


图 3-20  $\mathbf{H}$  的边界条件

上式中,  $\mathbf{b}$  是界面的切面内的任意矢量( $\mathbf{l}^\circ$ 也是切面内任意矢量),  $\mathbf{J}_s$  和  $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$  都位于切面内。因此由上式可得

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (3-68)$$

式(3-68)就是两种磁介质边界面上磁场强度  $\mathbf{H}$  的边界条件。它说明磁场强度的切向分量在界面两侧不连续。如果无面电流( $\mathbf{J}_s = 0$ ), 则这一边界条件变为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (3-69)$$

用下标  $t$  表示切向分量, 上式可以写成标量形式:

$$H_{2t} = H_{1t} \quad (3-70)$$

假设磁场  $\mathbf{B}_2$  与法向  $\mathbf{n}$  的夹角为  $\theta_2$ ,  $\mathbf{B}_1$  与  $\mathbf{n}$  的夹角为  $\theta_1$  (如图 3-19 所示), 则式(3-70)和式(3-66)可写成

$$\begin{aligned} H_2 \sin \theta_2 &= H_1 \sin \theta_1 \\ B_2 \cos \theta_2 &= B_1 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

上面两式相除, 并注意  $B_2 = \mu_2 H_2$ ,  $B_1 = \mu_1 H_1$ , 得

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3-71)$$

这表明, 磁力线在分界面上通常要改变方向。若介质 1 为铁磁材料, 介质 2 为空气, 此时  $\mu_2 \ll \mu_1$ , 因而  $\theta_2 \ll \theta_1$ , 由式(3-66)得  $B_2 \ll B_1$ 。

假如  $\mu_1 = 1000\mu_0$ ,  $\mu_2 = \mu_0$ , 在这种情况下, 当  $\theta_1 = 87^\circ$  时,  $\theta_2 = 1.09^\circ$ ,  $B_2/B_1 = 0.052$ 。由此可见, 铁磁材料内部的磁感应强度远大于外部的磁感应强度, 同时外部的磁力线几乎与铁磁材料表面垂直。

### 3.8 标量磁位

根据磁介质中恒定磁场的基本方程式(3-60)可知, 在无自由电流( $\mathbf{J} = 0$ )的区域里, 磁场强度  $\mathbf{H}$  是无旋的。此时, 磁场强度可以表示为一个标量函数的负梯度, 即

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad (3-72)$$

$\varphi_m$  称为磁场的标量位函数(简称为标量磁位或磁标位), 单位为 A(安培)。上式中的负号是为了与静电位对应而人为加入的。

在均匀介质中, 由式(3-60)和式(3-61)可得

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

将式(3-72)代入到上式中, 可得磁标位满足拉普拉斯方程, 即

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (3-73)$$

所以用微分方程求磁标位时, 也同静电位一样, 是求拉普拉斯方程的解。磁场的边界条件用磁标位表示时, 为

$$B_{2n} = B_{1n} \rightarrow \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} \quad (3-74)$$

$$H_{2t} = H_{1t} \rightarrow \varphi_{m2} = \varphi_{m1} \quad (3-75)$$

磁标位在求解永磁体的磁场问题时比较方便(因其内无自由电流)。永磁体的磁导率远

大于空气的磁导率,因而永磁体表面是一个等位(磁标位)面,这时可以用静电比拟法来计算永磁体的磁场。

以上我们讨论的是均匀磁介质中无自由电流时磁标位的微分方程。对非均匀介质,在无源区( $\mathbf{J}=0$ )引入磁荷的概念后,磁标位满足泊松方程,即

$$\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m \quad (3-76)$$

式中:

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3-77)$$

$\rho_m$  是等效磁荷体密度。此时边界条件式(3-75)不变,而式(3-74)要作相应的修改,详细内容请参看有关书籍。

### 3.9 互感和自感

在线性磁介质中,任一回路在空间产生的磁场与回路电流成正比,因而穿过任意的固定回路的磁通量  $\Phi$  也与电流成正比。如果回路由细导线绕成  $N$  匝,则总磁通量是各匝的磁通之和。称总磁通为磁链,用  $\Psi$  表示。对于密绕线圈,可以近似认为各匝的磁通相等,从而有  $\Psi = N\Phi$ 。

一个回路的自感定义为回路的磁链和回路电流之比,用  $L$  表示,即

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (3-78)$$

自感的单位是 H(亨利)。自感的大小取决于回路的尺寸、形状以及介质的磁导率。

我们用  $\Psi_{12}$  表示载流回路  $C_1$  的磁场在回路  $C_2$  上产生的磁链。显然  $\Psi_{12}$  与电流  $I_1$  成正比,这一比值称为互感,如图 3-21 所示,即

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} \quad (3-79a)$$

互感的单位与自感相同。同样,我们可以用载流回路  $C_2$  的磁场在回路  $C_1$  上产生的磁链  $\Psi_{21}$  与电流  $I_2$  的比来定义互感  $M_{21}$ ,即

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} \quad (3-79b)$$

互感的大小也取决于回路的尺寸、形状以及介质的磁导率和回路的匝数。

现在推导互感的计算公式。如图 3-21 所示,当导线的直径远小于回路的尺寸而且也远小于两个回路之间的最近距离时,两回路都可以用轴线的几何回路代替。设两个回路都只有一匝。当回路  $C_1$  载有电流  $I_1$  时,  $C_2$  上的磁链为

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_{12} \cdot d\mathbf{l}_2$$

式中,  $\mathbf{A}_{12}$  为电流  $I_1$  在  $C_2$  上的磁矢位,即

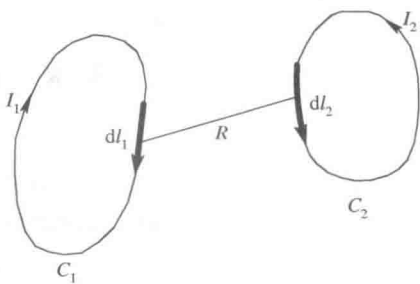


图 3-21 互感



$$A_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1}{R}$$

因而

$$\begin{aligned} \Psi_{12} &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \\ M_{12} &= \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \end{aligned} \quad (3-80)$$

由上式可以看出：

$$M_{12} = M_{21} = M$$

这说明互感具有互易性质。互感的计算公式(3-80)称为诺伊曼公式。互感  $M$  可以为正, 也可以为负, 取决于回路正向的选择。若  $I_1$  在  $C_2$  中的磁通为正, 则  $M > 0$ , 反之,  $M < 0$ 。

对于自感, 也能写成式(3-80)的形式:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-81)$$

式中  $d\mathbf{l}_1$  和  $d\mathbf{l}_2$  都是沿回路  $C$  的线元, 它们之间的距离为  $R$  (如图 3-22 所示)。当两个线元重合 ( $R=0$ ) 时, 积分值趋于无穷大, 这是由于忽略了回路导线的截面所致。为了用诺伊曼公式计算自感, 就必须考虑导线的横截面积。计及横截面的因素以后, 可以将自磁链分为外磁链  $\Psi_e$  和内磁链  $\Psi_i$  两部分, 相应的自感也分为外自感  $L_e$  和内自感  $L_i$ 。 $\Psi_e$  是通过导体外部与回路的全部电流交链的磁链; 而  $\Psi_i$  为通过导体内部, 因而只与部分电流交链的磁链。计算外磁链时, 可近似认为全部电流  $I$  集中在导体回路的轴线  $C_1$  上, 并将此电流的磁场与导体回路的内缘  $C_2$  所交链的磁链作为外磁链, 这样得出外自感为

$$L_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3-82)$$

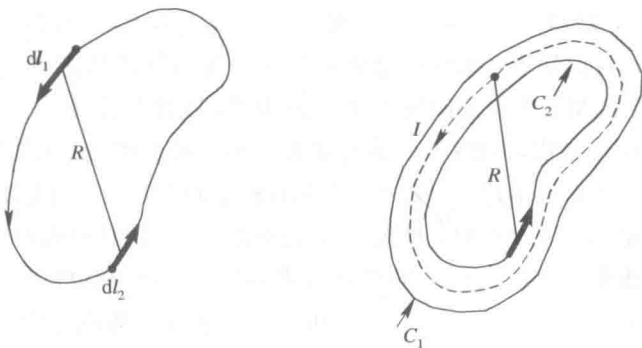


图 3-22 内自感

**例 3-14** 求无限长平行双导线(如图 3-23 所示)单位长外自感。

**解:** 设导线中电流为  $I$ 。由无限长导线的磁场公式, 可得两导线之间轴线所在的平面上的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$$

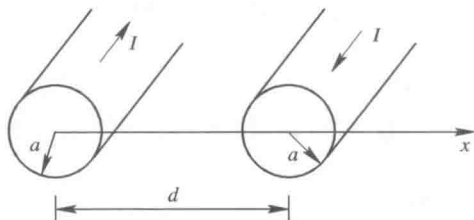


图 3-23 平行双导线

磁场的方向与导线回路平面垂直。单位长度上的外磁链为

$$\Psi = \int_a^{d-a} B dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

所以单位长外自感为

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

注意,虽然诺伊曼公式提供了计算回路互感的一般方法,但是实际应用起来常常导致十分繁难的积分。当由电流分布可较容易地求出磁场时,使用式(3-78)和式(3-79)求自感和互感较为方便。诺伊曼公式证明了两个回路互感的互易性,证明了电感与回路的几何结构有关,与介质的磁导率有关,而与电流无关。

### 3.10 磁 场 能 量

为简单起见,先计算两个分别载流  $I_1$  和  $I_2$  的电流回路系统所储存的磁场能量。假定回路的形状、相对位置不变,同时忽略焦耳热损耗。在建立磁场的过程中,两回路的电流分别为  $i_1(t)$  和  $i_2(t)$ ,最初,  $i_1=0$ ,  $i_2=0$ ,最终,  $i_1=I_1$ ,  $i_2=I_2$ 。在这一过程中,电源做的功转变成磁场能量。我们知道,系统的总能量只与系统最终的状态有关,与建立状态的方式无关。为计算这个能量,先假定回路 2 的电流为零,求出回路 1 中的电流  $i_1$  从零增加到  $I_1$  时,电源做的功  $W_1$ ;其次,回路 1 中的电流  $I_1$  不变,求出回路 2 中的电流从零增加到  $I_2$  时,电源做的功  $W_2$ 。从而得出这一过程中,电源对整个回路系统做的总功  $W_m=W_1+W_2$ 。

当保持回路 2 的电流  $i_2=0$  时,回路 1 中的电流  $i_1$  在  $dt$  时间内有一个增量  $di_1$ ,周围空间的磁场将发生改变,回路 1 和 2 的磁通分别有增量  $d\Psi_{11}$  和  $d\Psi_{12}$ ,相应地在两个回路中要产生感应电势  $\mathcal{E}_1=-d\Psi_{11}/dt$  和  $\mathcal{E}_2=-d\Psi_{12}/dt$ 。感应电势的方向总是阻止电流增加。因而,为使回路 1 中的电流得到增量  $di_1$ ,必须在回路 1 中外加电压  $U_1=-\mathcal{E}_1$ ;为使回路 2 电流为零,也必须在回路 2 中加上电压  $U_2=-\mathcal{E}_2$ 。所以在  $dt$  时间里,电源做功为

$$dW_1 = U_1 i_1 dt + U_2 i_2 dt = U_1 i_1 dt = -\mathcal{E}_1 i_1 dt = i_1 d\Psi_{11} = L_1 i_1 di_1$$

在回路的电流从零到  $I_1$  的过程中,电源做功为

$$W_1 = \int dW_1 = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

下面计算当回路 1 的电流  $I_1$  保持不变时,使回路 2 的电流从零增到  $I_2$ ,电源做的功  $W_2$ 。若在  $dt$  时间内,电流  $i_2$  有增量  $di_2$ ,这时回路 1 中的感应电势为  $\mathcal{E}_1=-d\Psi_{21}/dt$ ,回路

2 中的感应电势为  $\mathcal{E}_2 = -d\Psi_{22}/dt$ 。为克服感应电势, 必须在两个回路上加上与感应电势反向的电压。在  $dt$  时间内, 电源做功为

$$dW_2 = M_{21} I_1 di_2 + L_2 i_2 di_2$$

积分得回路 1 电流保持不变时, 电源做功总量为

$$W_2 = \int dW_2 = \int_0^{I_2} (M_{21} I_1 + L_2 i_2) di_2 = M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

最后得到电源对整个电流回路系统所做的总功为

$$W_m = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (3-83)$$

式中:  $L_1 I_1^2/2$  和  $L_2 I_2^2/2$  分别是回路  $C_1$  和  $C_2$  的自能;  $M_{21} I_1 I_2$  是两回路的相互作用能。上式可以用磁通来表示:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} (L_1 I_1 + M_{21} I_2) I_1 + \frac{1}{2} (M_{12} I_1 + L_2 I_2) I_2 \\ &= \frac{1}{2} (\Psi_{11} + \Psi_{21}) I_1 + \frac{1}{2} (\Psi_{12} + \Psi_{22}) I_2 \\ &= \frac{1}{2} \Psi_1 I_1 + \frac{1}{2} \Psi_2 I_2 \end{aligned} \quad (3-84)$$

式中:  $\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{21}$  是与回路  $C_1$  交链的总磁通;  $\Psi_2 = \Psi_{12} + \Psi_{22}$  是与回路  $C_2$  交链的总磁通 (均假设回路为一匝)。这个结果可推广到  $N$  个电流回路系统, 其磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Psi_i I_i \quad (3-85)$$

式中:

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^N \Psi_{ji} = \sum_{j=1}^N M_{ji} I_j \quad (3-86)$$

$\Psi_{ji}$  是回路  $j$  在回路  $i$  上的磁通;  $\Psi_i$  是回路  $i$  的总磁通。

将回路  $i$  上的总磁通  $\Psi_i$  用磁矢位表示:

$$\Psi_i = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (3-87)$$

式中的  $\mathbf{A}$  是  $N$  个回路在  $d\mathbf{l}_i$  处的总磁矢位。将式 (3-87) 代入式 (3-85) 得

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (3-88)$$

对于分布电流, 用  $I_i d\mathbf{l}_i = \mathbf{J} dV$  代入上式, 得

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (3-89)$$

上式的积分区域是有电流的空间, 可将积分区域扩展为全空间而不影响积分值。

类似于静电场的能量可以用电场矢量  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  表示, 磁场能量也可用磁场矢量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  表示, 并由此得出磁能密度的概念。将  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV - \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

注意, 上式中当积分区域  $V$  趋于无穷时, 面积分项为零 (理由同静电场能量里的类似)。于

是得到

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dV \quad (3-90)$$

磁场能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (3-91)$$

**例 3-15** 求无限长圆柱导体单位长度的内自感。

**解:** 设导体半径为  $a$ , 通过的电流为  $I$ , 则距离轴心  $r$  处的磁感应强度为

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

单位长度的磁场能量为

$$W_{mi} = \frac{1}{2} \int BH \, dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^a B^2 2\pi r \, dr \int_0^l dz = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

所以, 单位长度的内自感为

$$L_i = \frac{2W_{mi}}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

注意, 内自感与导线的直径无关。代入  $\mu_0$  的数值, 得单位长度的内自感为  $5 \times 10^{-8} \, \text{H}$ 。

### 3.11 磁 场 力

原则上讲, 一个回路在磁场中受到的力, 可以用安培定律来计算, 但是许多问题用虚位移法较为方便。用虚位移法求磁场力时, 假设某一个电流回路在磁场力的作用下发生了一个虚位移, 这时回路的互感要产生变化, 磁场能量也要产生变化, 然后根据能量守恒定律, 求出磁场力。

为了简单起见, 以下仅讨论两个回路的情形, 但得到的结果可以推广到一般情形。假设回路  $C_1$  在磁场力的作用下发生了一个小位移  $\Delta \mathbf{r}$ , 回路  $C_2$  不动。以下分磁链不变和电流不变两种情形讨论。

#### 1. 磁链不变

当磁链不变时, 各个回路中的感应电势为零, 所以电源不做功, 磁场力做的功必来自磁场能量的减少。如将回路  $C_1$  受到的磁场力记为  $\mathbf{F}$ , 它做的功为  $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} &= -\Delta W_m \\ F_r &= - \left. \frac{\partial W_m}{\partial r} \right|_\Psi \end{aligned} \quad (3-92)$$

写成矢量形式, 有

$$\mathbf{F} = - \nabla W_m \big|_\Psi \quad (3-93)$$

#### 2. 电流不变

当各个回路的电流不变时, 各回路的磁链要发生变化, 在各回路中会产生感应电势, 电源要做功。在回路  $\Delta \mathbf{r}$  产生位移时, 电源做的功为

$$\Delta W_b = I_1 \Delta \Psi_1 + I_2 \Delta \Psi_2$$

由式(3-85)得磁场能量的变化为

$$\Delta W_m = \frac{1}{2}(I_1 \Delta \Psi_1 + I_2 \Delta \Psi_2)$$

根据能量守恒定律, 电源做的功等于磁场能量的增量与磁场力对外做功之和, 即

$$\begin{aligned} \Delta W_b &= \Delta W_m + \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \\ \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} &= \Delta W_m \\ \mathbf{F} &= \nabla W_m \big|_I \end{aligned} \quad (3-94)$$

**例 3-16** 设两导体平面的长为  $l$ , 宽为  $b$ , 间隔为  $d$ , 上、下面分别有方向相反的面电流  $J_{s0}$  (如图 3-24 所示)。设  $b \gg d$ ,  $l \gg d$ , 求上面一片导体板面电流所受的力。

**解:** 考虑到间隔远小于其尺寸, 故可以将其看成两无限大面电流。由安培回路定律可以求出两导体板之间磁场为  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu_0 J_{s0}$ , 导体外磁场为零。当用虚位移法计算上面的导体板受力时, 假设两板间隔为一变量  $z$ 。磁场能为

$$W_m = \frac{1}{2} B H V = \frac{1}{2} \mu_0 J_{s0}^2 l b z$$

假定上导体板位移时电流不变, 由式(3-94)得

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_z \frac{\partial W_m}{\partial z} = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \mu_0 J_{s0}^2 l b$$

这个力为斥力。

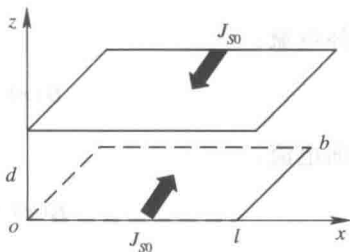


图 3-24 平行面电流磁力

### 小 结

(1) 恒定电流的电场和电荷分布不随时间变化, 其基本方程为

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases}$$

微分形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}$$

欧姆定律的微分形式:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

焦耳定律的微分形式:

$$\rho = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

均匀导体中电位满足拉普拉斯方程, 即

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

不同导体界面上的边界条件为

$$\begin{cases} J_{2n} = J_{1n} \\ E_{2t} = E_{1t} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \\ \varphi_2 = \varphi_1 \end{cases}$$

(2) 导体中的恒定电场和介质中的静电场两者的方程和边界条件有相似的形式。两个场的场量间有一一对应的关系。当二者边界条件相同时, 它们的解也有相同的形式。

(3) 均匀介质中线电流或分布电流产生的磁感应强度为

线电流:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

体电流:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

面电流:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

(4) 真空中恒定磁场的基本方程。

积分形式:

$$\begin{cases} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{cases}$$

微分形式:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

(5) 介质在磁场中要产生磁化, 用磁化强度  $\mathbf{M}$  描述磁化程度。磁场强度定义为  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ , 对于各向同性介质,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ 。在介质中安培环路定律为  $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ , 其微分形式是  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 。

(6) 由  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  引入磁矢位  $\mathbf{A}$ , 且  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。在选取  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  的前提下, 磁矢位  $\mathbf{A}$  满足泊松方程或拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

或

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

由线电流或分布电流可以通过积分计算磁矢位:

线电流:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_l \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

面电流:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

体电流:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

(7) 恒定磁场的边界条件:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

(8) 在线性介质中, 一个回路的磁链与引起这个磁链的电流成正比, 其比值为电感。电感分为自感和互感。电感仅仅与回路的形状、大小、相对位置及介质特性有关, 与磁链和电流无关。

(9) 磁场能量存在于场中, 能量为

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

$w_m$  称为磁场能量密度。

(10) 磁场力可以由虚位移法计算:

$$\mathbf{F} = - \nabla W_m |_{\Psi}$$

或

$$\mathbf{F} = \nabla W_m |_I$$

### 习 题 三

3-1 一个半径为  $a$  的球内均匀分布着总量为  $q$  的电荷, 若其以角速度  $\omega$  绕一直径匀速旋转, 求球内的电流密度。

3-2 球形电容器内外电极的半径分别为  $a$ 、 $b$ , 其间媒质的电导率为  $\sigma$ , 当外加电压为  $U_0$  时, 计算功率损耗并求电阻。

3-3 一个半径为  $a$  的导体球作为电极深埋地下, 土壤的电导率为  $\sigma$ , 略去地面的影响, 求电极的接地电阻。

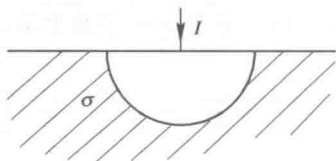
3-4 在无界非均匀导电媒质(电导率和介电常数均是坐标的函数)中, 若有恒定电流存在, 证明媒质中的自由电荷密度为

$$\rho = \mathbf{E} \cdot \left( \nabla \epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma} \nabla \sigma \right)$$

3-5 平板电容器间由两种媒质完全填充, 厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$ , 介电常数分别为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ , 电导率分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 求当外加电压  $U_0$  时, 分界面上的自由电荷面密度。

3-6 内、外导体半径分别为  $a$ 、 $c$  的同轴线, 其间填充两种漏电媒质, 电导率分别为  $\sigma_1$  ( $a < r < b$ ) 和  $\sigma_2$  ( $b < r < c$ ), 求单位长度的漏电阻。

3-7 一个半径为 10 cm 的半球形接地导体电



习题 3-7 图

极, 电极平面与地面重合, 如图所示。若土壤的电导率为  $0.01 \text{ S/m}$ , 求当电极通过的电流为  $100 \text{ A}$  时, 土壤损耗的功率。

3-8 一个正  $n$  边形线圈中通过的电流为  $I$ , 外接圆半径为  $a$ , 试证此线圈中心的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi a} \tan \frac{\pi}{n}$$

3-9 求载流为  $I$ 、半径为  $a$  的圆形导线中心的磁感应强度。

3-10 一个载流  $I_1$  的长直导线和一个载流  $I_2$  的圆环(半径为  $a$ )在同一平面内, 圆心与导线的距离是  $d$ , 证明两电流之间的相互作用力为  $\mu_0 I_1 I_2 \left( \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} - 1 \right)$ 。

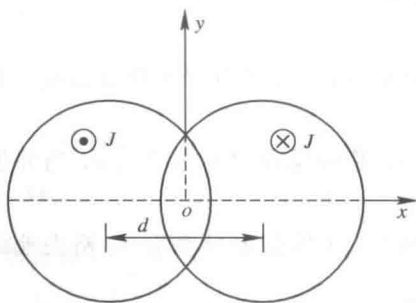
3-11 内、外半径分别为  $a$ 、 $b$  的无限长空心圆柱中均匀分布着轴向电流  $I$ , 求柱内、外的磁感应强度。

3-12 两个半径都为  $a$  的圆柱体, 轴间距为  $d$ ,  $d < 2a$  (如图所示)。除两柱重叠部分  $R$  外, 柱内有大小相等、方向相反的电流, 密度为  $J$ , 求区域  $R$  的  $\mathbf{B}$ 。

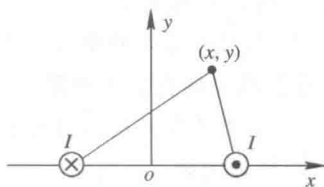
3-13 证明磁矢位  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{e}_x \cos y + \mathbf{e}_y \sin x$  和  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{e}_y (\sin x + x \sin y)$  给出相同的磁场  $\mathbf{B}$ , 并证明它们均来自相同的电流分布。它们是否均满足矢量泊松方程? 为什么?

3-14 半径为  $a$  的长圆柱面上有密度为  $\mathbf{J}_{s0}$  的面电流, 电流方向分别为沿圆周方向和沿轴线方向, 分别求两种情况下柱内、外的  $\mathbf{B}$ 。

3-15 一对无限长平行导线, 相距  $2a$ , 线上载有大小相等、方向相反的电流  $I$  (如图所示), 求磁矢位  $\mathbf{A}$ , 并求  $\mathbf{B}$ 。



习题 3-12 图



习题 3-15 图

3-16 由无限长载流直导线的  $\mathbf{B}$  求磁矢位  $\mathbf{A}$  (用  $\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , 并取  $r=r_0$  处为磁矢位的参考零点), 并验证  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

3-17 证明  $xoy$  平面上半径为  $a$ 、圆心在原点的圆电流环(电流为  $I$ )在  $z$  轴上的磁标位为

$$\varphi_m = \frac{I}{2} \left[ 1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$

3-18 一个长为  $L$ 、半径为  $a$  的圆柱状磁介质沿轴向方向均匀磁化(磁化强度为  $\mathbf{M}_0$ ), 求它的磁矩。若  $L=10 \text{ cm}$ ,  $a=2 \text{ cm}$ ,  $M_0=2 \text{ A/m}$ , 求出磁矩的值。



3-19 球心在原点、半径为  $a$  的磁化介质球中,  $\mathbf{M} = \mathbf{e}_z M_0 \frac{z^2}{a^2}$  ( $M_0$  为常数), 求磁化电流的体密度和面密度。

3-20 证明磁介质内部的磁化电流是传导电流的  $(\mu_r - 1)$  倍。

3-21 已知内、外半径分别为  $a$ 、 $b$  的无限长铁质圆柱壳(磁导率为  $\mu$ )沿轴向有恒定的传导电流  $I$ , 求磁感应强度和磁化电流。

3-22 设  $x < 0$  的半空间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质,  $x > 0$  的空间为真空, 线电流  $I$  沿  $z$  轴方向, 求磁感应强度和磁场强度。

3-23 已知在半径为  $a$  的无限长圆柱导体内有恒定电流  $I$  沿轴向方向。设导体的磁导率为  $\mu_1$ , 其外充满磁导率为  $\mu_2$  的均匀磁介质, 求导体内、外的磁场强度、磁感应强度、磁化电流分布。

3-24 试证长直导线和其共面的正三角形之间的互感为

$$M = \frac{\mu_0}{\pi \sqrt{3}} \left[ (a+b) \ln \left( 1 + \frac{1}{b} \right) - a \right]$$

其中  $a$  是三角形的高,  $b$  是三角形平行于长直导线的边至直导线的距离(且该边距离直导线最近)。

3-25 无限长的直导线附近有一矩形回路(二者不共面, 如图所示), 试证它们之间的互感为

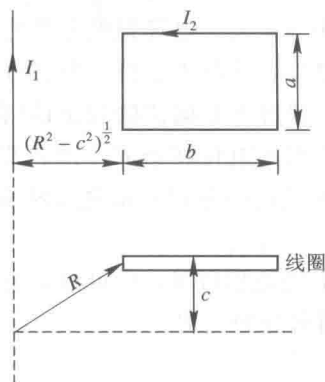
$$M = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{R}{[2b(R^2 - c^2)^{1/2} + b^2 + R^2]^{1/2}}$$

3-26 空气绝缘的同轴线, 内导体的半径为  $a$ , 外导体的内半径为  $b$ , 通过的电流为  $I$ 。设外导体壳的厚度很薄, 因而其储存的能量可以忽略不计。计算同轴线单位长度的储能, 并由此求单位长度的自感。

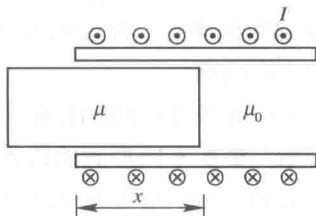
3-27 一个长直导线和一个圆环(半径为  $a$ )在同一平面内, 圆心与导线的距离是  $d$ , 证明它们之间的互感为

$$M = \mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2})$$

3-28 如图所示的长密绕螺线管(单位长度  $n$  匝), 通过的电流为  $I$ , 铁心的磁导率为  $\mu$ , 面积为  $S$ , 求作用在它上面的力。



习题 3-25 图



习题 3-28 图

## 第四章 静态场的解

当电荷或电流分布已知时,可以通过积分来计算电场和磁场。但实际上,我们通常要处理两种类型的静态场问题。一种是已知场源(电荷分布,电流分布)直接计算空间各点的场强和位函数,这类问题叫做分布型问题。另一种是已知空间某给定区域内的场源分布和该区域边界面上的位函数(或其法向导数),求场内位函数的分布,这类问题叫做边值型问题。

求解边值型问题的空间电场、磁场的分布可以化为求解给定边界条件下位函数的拉普拉斯方程或泊松方程,即求解边值问题。

拉普拉斯方程是一个二阶偏微分方程,可以用解析法、数值计算法、实验模拟法和图解法来求解。本章将讨论一些常用的解法,对数值方法中的有限差分法也作简单介绍,其主要内容有:

- 边值问题的唯一性定理
- 镜像法
- 分离变量法
- 复变函数法
- 格林函数法
- 有限差分法

### 4.1 边值问题的分类

静电场的计算通常是求场内任一点的电位。一旦电位确定,电场强度和其它物理量都可由电位求得。在无界空间,如果已知分布电荷的体密度,可以通过积分公式计算任意点的电位。但计算有限区域的电位时,必须使用所讨论区域边界上电位的指定值(称为边值)来确定积分常数;此外,当场域中有不同介质时,还要用到电位在边界上的边界条件。这些用来决定常数的条件,常统称为边界条件。我们把通过微分方程及相关边界条件描述的问题,称为边值问题。

实际上,边界条件(即边值)除了给定电位在边界上的数值以外,也可以是电位在边界上的法向导数。根据不同形式的边界条件,边值问题通常分为三类:

第一类边值问题:给定整个边界上的位函数值;

第二类边值问题:给定边界上每一点位函数的法向导数;

第三类边值问题:给定一部分边界上每一点的电位,同时给定另一部分边界上每一点

的电位法向导数。

给定导体上的总电量亦属于第二类边值问题。

## 4.2 唯一性定理

边值问题的求解就是偏微分方程的求解。对于偏微分方程，通常和常微分方程相似，要考虑其解的存在性、唯一性和稳定性。这里仅对静电边值问题的唯一性加以讨论。

### 4.2.1 格林公式

格林公式是场论中的一个重要公式，可以由散度定理导出。散度定理可以表示为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-1)$$

在上式中，令  $\mathbf{F} = \varphi \nabla \Psi$ ，则

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\varphi \nabla \Psi) = \varphi \nabla^2 \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi \quad (4-2)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_V (\varphi \nabla^2 \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \Psi) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS$$

即

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS \quad (4-3)$$

这就是格林第一恒等式。 $\mathbf{n}$  是面元的正法向矢量，即闭合面的外法向矢量。

将式(4-2)中的  $\varphi$  和  $\Psi$  交换，可得

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \varphi + \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_S \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (4-4)$$

式(4-3)和式(4-4)相减，可得

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (4-5)$$

该式称为格林第二恒等式。

### 4.2.2 唯一性定理

边值问题的唯一性定理十分重要，它表明，对任意的静电场，当空间各点的电荷分布与整个边界上的边界条件已知时，空间各部分的场就唯一地确定了。我们以泊松方程的第一类边值问题为例，对唯一性定理加以证明。我们用反证法证明唯一性定理。假设特定的边值问题有两个解，然后证明两者恒等。

设在区域  $V$  内， $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足泊松方程，即

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho(r)}{\epsilon}, \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho(r)}{\epsilon}$$

在  $V$  的边界  $S$  上， $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  满足同样的边界条件，即

$$\varphi_1|_S = f(r), \quad \varphi_2|_S = f(r)$$

令  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ，则在  $V$  内， $\nabla^2 \varphi = 0$ ，在边界面  $S$  上， $\varphi|_S = 0$ 。在格林第一恒等式中，令

$\Psi = \varphi$ , 则

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

由于  $\nabla^2 \varphi = 0$ , 所以有

$$\int_V |\nabla \varphi|^2 dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

在  $S$  上  $\varphi = 0$ , 上式右边为零, 因而有

$$\int_V |\nabla \varphi|^2 dV = 0$$

由于对任意函数  $\varphi$ ,  $|\nabla \varphi| \geq 0$ , 所以得  $\nabla \varphi = \mathbf{0}$ , 于是  $\varphi$  只能是常数, 再根据边界面上  $\varphi = 0$  以及电位是连续的, 可知在整个区域内  $\varphi \equiv 0$ , 即  $\varphi_1 = \varphi_2$ 。

关于第二、三类边值问题, 唯一性定理的证明和第一类边值问题类似, 对此可参阅有关参考书。

唯一性定理对某些求解边值问题的方法特别重要。有时可以通过猜测来确定问题的解, 只要此解满足拉普拉斯方程以及边界条件, 由唯一性定理可知, 这个解就是所求的唯一解。

## 4.3 镜像法

镜像法是解静电边值问题的一种特殊方法, 它主要用来求解分布在导体附近的电荷(点电荷、线电荷)产生的场。如在实际工程中, 要遇到水平架设的双导线传输线的电位、电场计算问题。当传输线离地面距离较小时, 要考虑地面的影响, 地面可以看作为一个无穷大的导体平面。由于传输线上所带的电荷靠近导体平面, 导体表面会出现感应电荷。此时地面上方的电场由原电荷和感应电荷共同产生。

镜像法是应用唯一性定理的典型范例。下面通过例题说明镜像法。

### 4.3.1 平面镜像法

**例 4-1** 求置于无限大接地平面导体上方, 距导体面为  $h$  处的点电荷  $q$  的电位。

**解:** 如图 4-1(a), 设  $z=0$  为导体面, 点电荷  $q$  位于  $(0, 0, h)$  处, 待求的是  $z>0$  中的电位。我们可以把上半空间的电位看作两部分之和, 即  $\varphi = \varphi_q + \varphi_s$ , 其中  $\varphi_q$ 、 $\varphi_s$  分别表示点电荷和导体面上的感应电荷产生的电位。我们不知道感应面电荷的分布, 因其分布与空间电场有关, 但我们知道, 在上半空间仅有点电荷  $q$ , 电位  $\varphi$  应满足泊松方程; 导体表面由所有电荷产生的总电位为零; 且在无穷远处, 总电位趋于零。即

当  $z>0$  时,  $\nabla^2 \varphi_s = 0$ ;

当  $z=0$  时,  $\varphi = 0$ ;

当  $z \rightarrow \infty$ 、 $|x| \rightarrow \infty$ 、 $|y| \rightarrow \infty$  时,  $\varphi \rightarrow 0$ 。

我们考虑图 4-1(b)所示的电荷分布。容易求得这一组电荷分布的电位为

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) \quad (4-6)$$

式中:

$$r_+ = [x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}, \quad r_- = [x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}$$

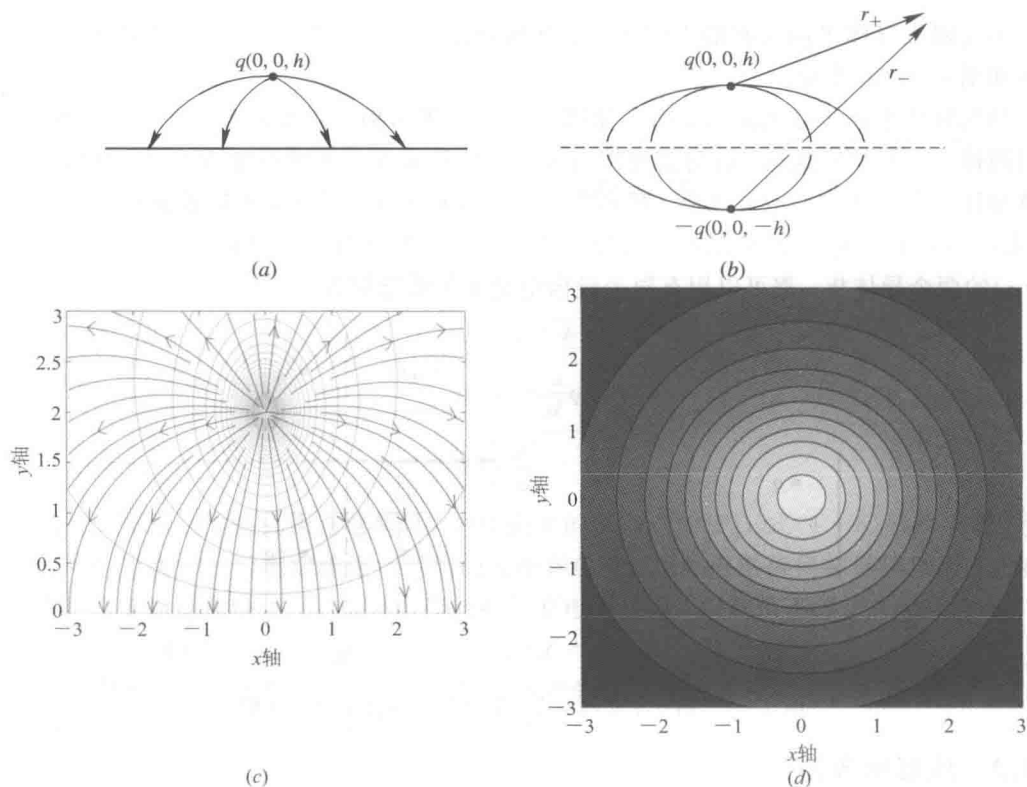


图 4-1 无限大导体平面上点电荷的分布

比较图 4-1(a)和图 4-1(b)后,可以看出,在  $z>0$  的区域,二者电荷分布相同,即在  $(0,0,h)$  点有一个点电荷  $q$ ,在区域的边界上有相同的边界条件(即在  $z=0$  的平面上电位为零,在半径趋于无穷大的半球面上电位为零)。根据边值问题的唯一性定理,可知二者在上半空间电位分布相同。也就是说,可以用图 4-1(b)中的点电荷  $-q$  等效图 4-1(a)中的感应面电荷。我们称图 4-1(b)所示问题是图 4-1(a)所示问题的等效镜像问题。位于  $(0,0,-h)$  的点电荷  $-q$  是原电荷  $q$  的镜像电荷。注意,在下半空间,图 4-1(a)和图 4-1(b)电荷分布不同,因而不能用式(4-6)表示原问题  $z<0$  处的电位。由式(4-6),可得  $z>0$  区域的电场:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \\ E_y &= \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \\ E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z-h}{r_+^3} - \frac{z+h}{r_-^3} \right) \end{aligned}$$

由式(2-68)可得导体表面的面电荷密度:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_z = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

导体表面总的感应电荷:

$$q_{in} = \int \rho_S dS = -\frac{qh}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = -q$$

由无限大导体平面引起的空间电位、电场分布如图 4-1(c) 所示, 导体表面感应电荷分布如图 4-1(d) 所示。

如果导体平面不是无限大, 而是像图 4-2(a) 所示相互正交的两个无限大接地平面, 我们同样可以运用镜像法, 此时需要用图 4-2(b) 所示的三个镜像电荷。用这些镜像电荷代替导体面上的感应面电荷以后, 观察图 4-2(a) 和图 4-2(b), 可以看到在待求区域内 (原电荷所在的区域), 两问题的电荷分布不变, 电位边值相同。实际上夹角为  $\pi/n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) 的两个导体板, 都可以用有限个镜像电荷来等效原问题。

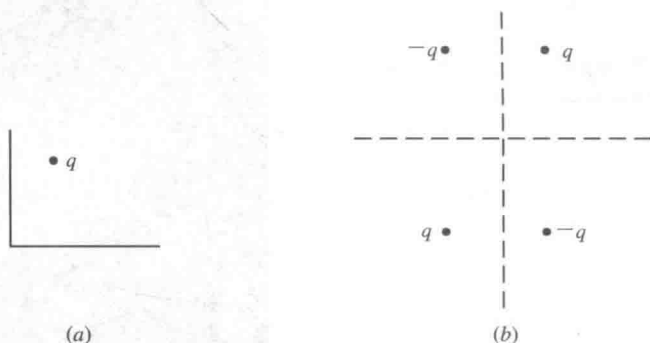


图 4-2 相互正交的两个无限大接地导体平面的镜像

### 4.3.2 球面镜像法

我们通过具体例题讨论球面镜像问题。

**例 4-2** 如图 4-3(a) 所示, 一个半径为  $a$  的接地导体球, 一点电荷  $q$  位于距球心  $d$  处, 求球外任一点的电位。

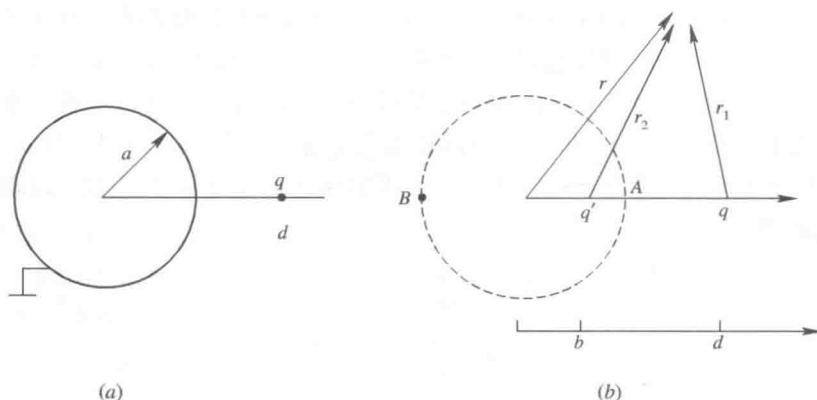


图 4-3 球面镜像

(a) 球面镜像原问题; (b) 等效问题

**解:** 我们先试探用一个镜像电荷  $q'$  等效球面上的感应面电荷在球外产生的电位和电场。从对称性考虑, 镜像电荷  $q'$  应置于球心与电荷  $q$  的连线上。设  $q'$  离球心距离为  $b$  ( $b < a$ ), 这样球外任一点的电位是由电荷  $q$  与镜像电荷  $q'$  产生电位的叠加, 即

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (4-7)$$

当计算球面上一点的电位时,有

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{10}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_{20}} = 0 \quad (4-8)$$

式中  $r_{10}$ 、 $r_{20}$  分别是  $q$ 、 $q'$  到球面上点  $P_0$  的距离。在上式中  $q'$  和  $b$  是待求量。取球面上的点分别位于离原电荷最远、最近处  $A$ 、 $B$  两点,可以得到确定  $q'$ 、 $b$  的两个方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{d-a} + \frac{q'}{a-b} &= 0 \\ \frac{q}{d+a} + \frac{q'}{a+b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} q' &= -\frac{a}{d}q \\ b &= \frac{a^2}{d} \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

解之得

可以验证,当取这样的镜像点电荷时,对球面上的任一点的  $P_0$ ,式(4-8)始终满足。也就是说,可以用式(4-9)确定镜像点电荷的大小和位置,用此点电荷代替导体球面上的感应面电荷。与平面镜像法相比,镜像电荷仍然与原电荷反号,但数值不等。

可以算出球面上总的感应电荷  $q_m = -qa/d = q'$ 。

如果导体球不接地且不带电,可用镜像法和叠加原理求球外的电位。此时球面必须是等位面,且导体球上的总感应电荷为零。应使用两个等效电荷:一个是  $q'$ ,其位置和大小由式(4-9)确定;另一个是  $q''$ , $q'' = -q'$ , $q''$  位于球心。

如果导体球不接地,且带电荷  $Q$ ,即  $q'$  位置和大小同上, $q''$  的位置也在原点,但  $q'' = Q - q'$ ,即  $q'' = Q + qa/d$ 。

**例 4-3** 空气中有两个半径相同(均等于  $a$ )的导体球相切,试用球面镜像法求该孤立导体系统的电容。

**解:** 如图 4-4 所示,设无穷远处的电位是零,导体面的电位为常数。以下我们用球面镜像法来确定导体所带的总电荷。先在两导体球的球心处各放相同的点电荷  $q$ 。此时,如果我们仅仅考虑右侧球心  $A$  处的单个电荷  $q$  在右面的球面上

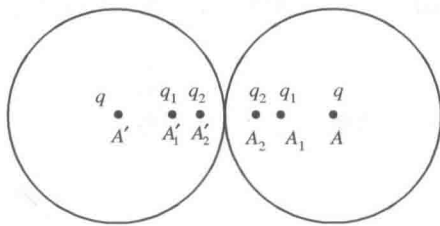


图 4-4 例 4-3 用图

产生的电位,则可知右面球面是等位面。但考虑到左面的电荷  $q$  对右面导体球面的影响,要维持其表面是一个等位面,必须在右侧导体球的内部再加上一个  $q_1$ ,它是左侧  $q$  在右面导体球上的镜像电荷,其位置与大小由镜像法确定。设其位于  $A_1$  处,则

$$AA_1 = \frac{a^2}{AA'} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$q_1 = -\frac{a}{2a}q = -\frac{1}{2}q$$

右侧的  $q$  在左面的导体球面也有一个镜像电荷,大小也是  $q_1$ ,位于  $A_1'$  处。由问题本身的对称性可知,左面的电荷总是与右侧分布对称。以下仅分析右面的。左面的  $q_1$  在右导体球上

也要成像, 这个镜像电荷记为  $q_2$ , 位于  $A_2$  处。

$$AA_2 = \frac{a^2}{AA_1} = \frac{a^2}{a/2 + a} = \frac{2a}{3}$$

$$q_2 = -\frac{a}{AA_1} q_1 = \frac{1}{3} q$$

以此类推, 有

$$q_3 = -\frac{1}{4} q, \quad q_4 = \frac{1}{5} q$$

因而, 导体系统的总电荷为

$$Q = 2(q + q_1 + q_2 + \cdots) = 2q \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \right) = 2q \ln 2$$

导体面的电位为

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

所以, 这个孤立导体系统的电容为

$$C = 8\pi\epsilon_0 a \ln 2$$

### 4.3.3 圆柱面镜像法

在讨论圆柱面的镜像问题之前, 先分析线电荷的平面镜像问题。这一结果可用于导体柱的镜像问题。

**例 4-4** 线密度为  $\rho_l$  的无限长线电荷平行置于接地无限大导体平面前, 二者相距  $d$ , 如图 4-5(a) 所示, 求电位及等位面方程。

**解:** 仿照点电荷的平面镜像法, 可知线电荷的镜像电荷为  $-\rho_l$ , 位于原电荷的对应点。取图 4-5(b) 的坐标系, 以原点为电位参考点, 得线电荷  $\rho_l$  电位:

$$\varphi_+ = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_+} \quad (4-10)$$

同理得镜像电荷  $-\rho_l$  的电位:

$$\varphi_- = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_-} \quad (4-11)$$

任一点  $(x, y)$  的总电位:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+}$$

用直角坐标表示为

$$\varphi(x, y) = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} \quad (4-12)$$

上式表示图 4-5(b) 中的二平行线电荷的电位, 其右半空间 ( $x > 0$ ) 中的电位就是图 4-5(a) 的电位。以下讨论式 (4-12) 所示电位在  $xoy$  平面的等位线方程及图形。等位线方程为

$$\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = m^2 \quad (4-13)$$

式中  $m$  是常数 (写成平方仅为了方便)。上式可化成



$$\left(x - \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}d\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2md}{m^2 - 1}\right)^2 \quad (4-14)$$

这个方程表示一族圆，圆心在 $(x_0, y_0)$ ，半径是 $R_0$ 。其中：

$$R_0 = \frac{2md}{|m^2 - 1|}, x_0 = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}d, y_0 = 0 \quad (4-15)$$

每一个给定的 $m(m > 0)$ 值，对应一个等位圆，此圆的电位为

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln m \quad (4-16)$$

图 4-5(c)画出了不同 $m$ 值的等位圆。右半空间( $x > 0$ )对应 $m > 1$ ，电位为正；左半空间( $x < 0$ )对应 $m < 1$ ，电位为负； $y$ 轴对应 $m = 1$ ，电位为零。 $m = 0$ 对应点 $(-d, 0)$ ， $m = \infty$ 对应点 $(d, 0)$ 。这一结果能计算与无限长圆柱导体有关的静电问题。

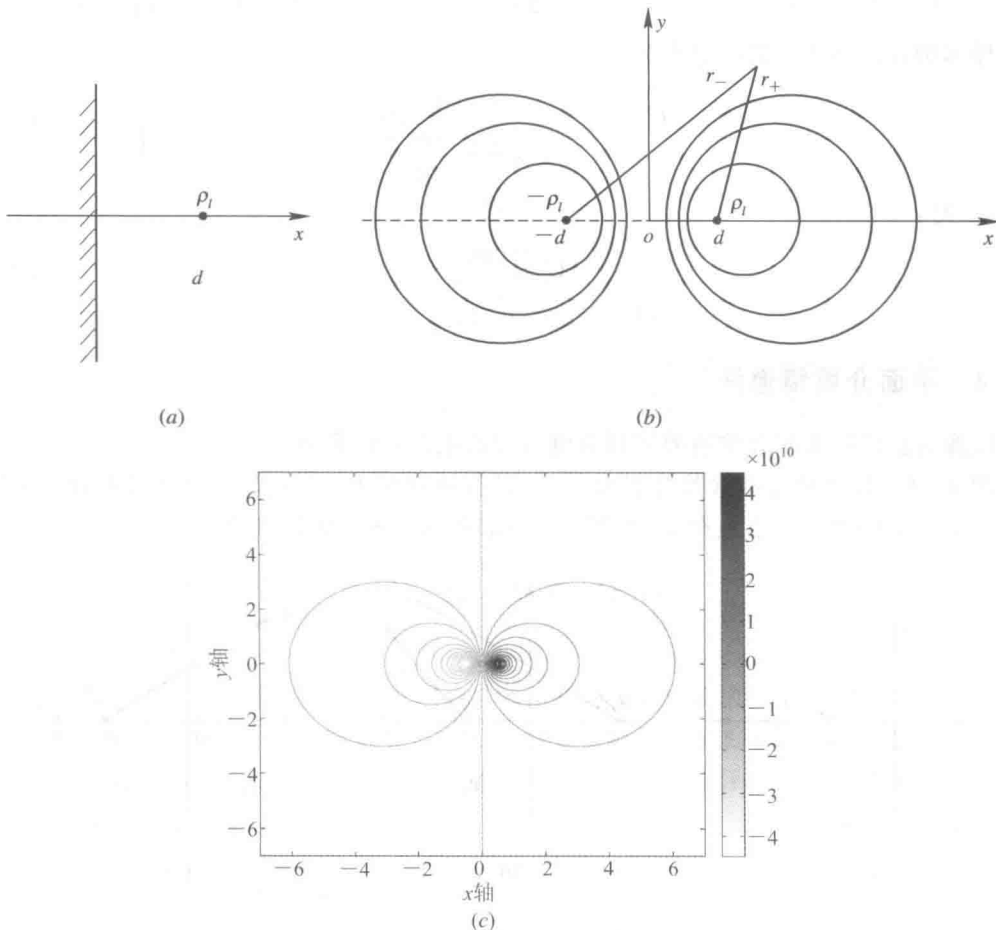


图 4-5 例 4-4 用图

(a) 导体平面与线电荷；(b) 线电荷与其镜像电荷的坐标关系；(c) 等位线

**例 4-5** 两平行圆柱形导体的半径都为 $a$ ，导体轴线之间的距离是 $2b$ ，如图 4-6 所示，求导体单位长的电容。

**解：**设两个导体圆柱单位长带电分别为 $\rho_l$ 和 $-\rho_l$ 。利用柱面镜像法，将导体柱面上的

电荷用线电荷  $\rho_l$  和  $-\rho_l$  代替, 线电荷相距原点均为  $d$ , 两个导体面的电位分别为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ 。依式(4-15), 有

$$\frac{2md}{m^2 - 1} = a$$

$$\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}d = b$$

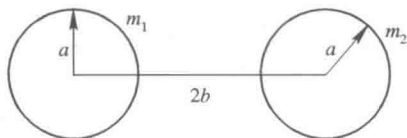


图 4-6 平行双导体

解之得

$$m_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

上式中的正、负号分别对应第一、第二个圆柱体。由式(4-16), 有

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} (\ln m_1 - \ln m_2) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

两个导体圆柱之间单位长的电容为

$$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}} \quad (4-17)$$

当  $b \gg a$  时:

$$C \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2b}{a}} \quad (4-18)$$

#### 4.3.4 平面介质镜像法

镜像法也可以求解介质边界附近有电荷时的电位, 如下例。

**例 4-6** 设两种介电常数分别为  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  的介质填充于  $x < 0$  及  $x > 0$  的半空间, 在介质 2 中点  $(d, 0, 0)$  处有一点电荷  $q$ , 如图 4-7(a) 所示, 求空间各点的电位。

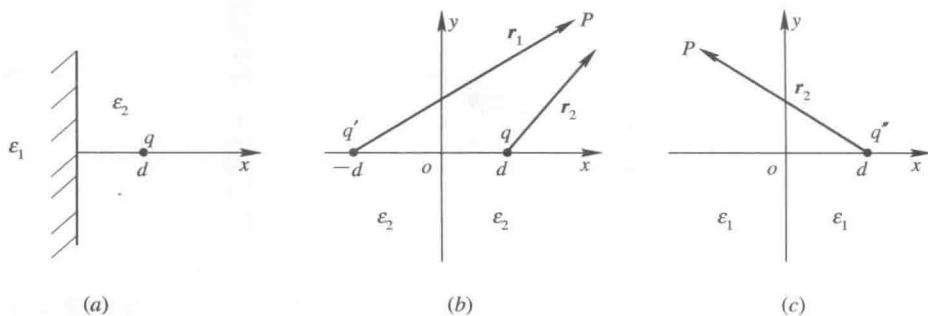


图 4-7 例 4-6 用图

(a) 介质镜像问题; (b) 区域 2 等效; (c) 区域 1 等效

**解:** 这个问题的右半空间有一个点电荷  $q$ , 左半空间没有电荷, 在界面上存在束缚面电荷。我们用镜像法求解, 把原问题分成  $x > 0$  和  $x < 0$  两个区域。在求  $x > 0$  区域(右半空间)的电位时, 假设全空间均填充介电常数  $\epsilon_2$  的介质, 在原电荷  $q$  的对称点  $(-d, 0, 0)$  放一镜像电荷  $q'$  来代替界面上的束缚电荷; 在求  $x < 0$  区域(左半空间)的电位时, 假设全空

间填充介电常数为  $\epsilon_1$  的介质, 原电荷不存在, 而在原电荷所在点  $(d, 0, 0)$  放一镜像电荷  $q''$  来代替原电荷及束缚电荷的共同影响。这样, 右半空间任一点的电位为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left( \frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1} \right) \quad (4-19)$$

左半空间任一点的电位为

$$\varphi_1 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_1 r_2} \quad (4-20)$$

其中  $q'$  和  $q''$  待定。

在界面  $(x=0)$  上, 由式(4-19)和式(4-20)所表示的电位, 应满足边界条件:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

将式(4-19)和式(4-20)代入, 得

$$q - q' = q'', \quad \frac{q + q'}{\epsilon_2} = \frac{q''}{\epsilon_1}$$

解之得到  $q'$  和  $q''$ :

$$\left. \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

最后, 将上式代入式(4-19)和式(4-20), 可得各区电位。

从以上例题可以看出, 采用镜像法求解静态场的边值问题时, 必须将原问题分成不同的区域求解, 对各个区域使用镜像电荷代替求解区域边界面上的面电荷。镜像电荷应放在待求区域以外。总之, 镜像法是一种等效方法, 这一方法的关键是找出镜像电荷的大小和位置。镜像法是应用唯一性定理的典型例证。

## 4.4 分离变量法

分离变量法是数学物理方法中应用最广的一种方法, 它要求所给的边界与一个适当的坐标系的坐标面相重合, 或分段重合; 其次在此坐标系中, 待求偏微分方程的解可表示成三个函数的乘积, 每一函数仅是一个坐标的函数。这样, 通过分离变量法就可以把偏微分方程化为常微分方程进行求解。

### 4.4.1 直角坐标系中的分离变量法

在直角坐标系中, 拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-22)$$

设  $\varphi$  可以表示为三个函数的乘积, 即

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (4-23)$$

其中  $X$  只是  $x$  的函数, 同时  $Y$  只是  $y$  的函数,  $Z$  只是  $z$  的函数。将上式代入式(4-22), 得

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

然后上式各项除以  $XYZ$ , 得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (4-24)$$

以上方程的第一项只是  $x$  的函数, 第二项只是  $y$  的函数, 第三项只是  $z$  的函数。要使这一方程对任一组  $(x, y, z)$  成立, 这三项必须分别为常数, 即

$$\frac{X''}{X} = \alpha^2 \quad (4-25)$$

$$\frac{Y''}{Y} = \beta^2 \quad (4-26)$$

$$\frac{Z''}{Z} = \gamma^2 \quad (4-27)$$

这样, 就将偏微分方程化为三个常微分方程。 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  是分离常数, 都是待定常数, 与边界条件有关。它们可以是实数, 也可以是虚数, 且由方程式(4-24)应有

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (4-28)$$

以上三个常微分方程即式(4-25)、式(4-26)和式(4-27)解的形式, 与边界条件有关(即与常数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  有关)。这里以式(4-25)为例说明  $X$  的形式与  $\alpha$  的关系。

当  $\alpha^2 = 0$  时, 则

$$X(x) = a_0 x + b_0 \quad (4-29)$$

当  $\alpha^2 < 0$  时, 令  $\alpha = jk_x$  ( $k_x$  为正实数), 则

$$X(x) = a_1 \sin k_x x + a_2 \cos k_x x \quad (4-30)$$

$$\text{或} \quad X(x) = b_1 e^{-jk_x x} + b_2 e^{jk_x x} \quad (4-31)$$

当  $\alpha^2 > 0$  时, 令  $\alpha = k_x$ , 则

$$X(x) = c_1 \operatorname{sh} k_x x + c_2 \operatorname{ch} k_x x \quad (4-32)$$

$$\text{或} \quad X(x) = d_1 e^{-k_x x} + d_2 e^{k_x x} \quad (4-33)$$

以上的  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  称为积分常数, 也由边界条件决定。 $Y(y)$  和  $Z(z)$  的解和  $X(x)$  类似。

在用分离变量法求解静态场的边值问题时, 常需要根据边界条件来确定分离常数是实数、虚数或零。若在某一个方向(如  $x$  方向)的边界条件是周期的, 则其解要选三角函数; 若在某一个方向的边界条件是非周期的, 则该方向的解要选双曲函数或者指数函数, 在有限区域选双曲函数, 无限区域选指数衰减函数; 若位函数与某一坐标无关, 则沿该方向的分离常数为零, 其解为常数。

下面通过例题说明分离变量法的应用。

**例 4-7** 横截面如图 4-8 所示的导体长槽, 上方有一块与槽相互绝缘的导体盖板, 截面尺寸为  $a \times b$ , 槽体的电位为零, 盖板的电位为  $U_0$ , 求此区域内的电位。

**解:** 本题的电位与  $z$  无关, 只是  $x$ 、 $y$  的函数, 即  $\varphi = \varphi(x, y)$ 。

在区域  $0 < x < a$ 、 $0 < y < b$  内, 有

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4-34)$$

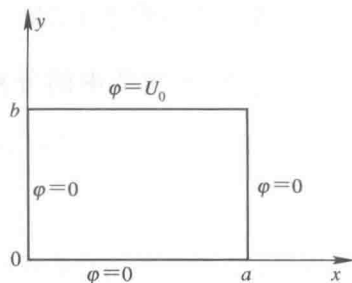


图 4-8 矩形截面导体槽

边界条件为

$$\textcircled{1} \quad x=0, \varphi(0, y)=0;$$

$$\textcircled{2} \quad x=a, \varphi(a, y)=0;$$

$$\textcircled{3} \quad y=0, \varphi(x, 0)=0;$$

$$\textcircled{4} \quad y=b, \varphi(x, b)=U_0.$$

设满足式(4-34)的解为  $\varphi(x, y)=X(x)Y(y)$ , 则  $X(x)$ 、 $Y(y)$  由方程式(4-25)和式(4-26)确定, 且  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 。我们由边界条件决定分离常数  $\alpha$ , 即决定  $X(x)$  的形式。边界条件①和②要求电位在  $x=0$ 、 $x=a$  处为零, 从式(4-30)~式(4-33)可见,  $X(x)$  的合理形式是三角函数(即  $\alpha^2 < 0$ ):

$$X(x) = a_1 \sin k_x x + a_2 \cos k_x x$$

将边界条件①代入上式, 得  $a_2=0$ , 再将边界条件②代入, 有

$$\sin k_x a = 0$$

即  $k_x a = n\pi$  或  $k_x = \frac{n\pi}{a}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), 这样得到  $X(x) = a_1 \sin \frac{n\pi x}{a}$ 。由于  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , 所以得到  $Y(y)$  的形式为指数函数或双曲函数, 即

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sh} k_x y + c_2 \operatorname{ch} k_x y$$

考虑到边界条件③, 有  $c_2=0$ ,  $Y(y) = c_1 \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ , 这样我们就得到基本乘积解  $X(x)Y(y)$ , 记作

$$\varphi_n = X_n(x)Y_n(y) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (4-35)$$

上式满足拉普拉斯方程式(4-34)和边界条件①、②、③, 其中  $c_n$  是待定常数( $c_n = a_1 c_1$ )。为了满足边界条件④, 取不同的  $n$  值对应的  $\varphi_n$  并叠加, 即

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (4-36)$$

由边界条件④, 有  $\varphi(x, b) = U_0$ , 即

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (4-37)$$

其中:

$$B_n = c_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

要从式(4-37)中解出  $B_n$ , 需要使用三角函数的正交归一性, 即

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} a/2 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (4-38)$$

将式(4-37)左右两边同乘以  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ , 并在区间  $(0, a)$  积分, 有

$$\int_0^a U_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx$$

使用公式(4-38), 有

$$\int_0^a U_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a B_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{B_n a}{2}$$

因而,得

$$B_n = \frac{2U_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2U_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4U_0}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (4-39)$$

所以,当  $n=1, 3, 5, \dots$  时,有

$$c_n = \frac{4U_0}{n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$$

当  $n=2, 4, 6, \dots$  时,有

$$c_n = 0$$

这样得到待求区域的电位为

$$\varphi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (4-40)$$

**例 4-8** 如图 4-9 所示,两块半无限大平行导体板的电位为零,与之垂直的底面电位为  $\varphi(x, 0)$ , 求此半无限槽中的电位。其中:

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

**解:** 和前题类似,这是一个二维拉普拉斯方程边值问题,  $\varphi = \varphi(x, y)$ , 边界条件为

- ①  $\varphi(0, y) = 0$ ;
- ②  $\varphi(a, y) = 0$ ;
- ③  $\varphi(x, \infty) = 0$ ;

$$\textcircled{4} \quad \varphi(x, 0) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}.$$

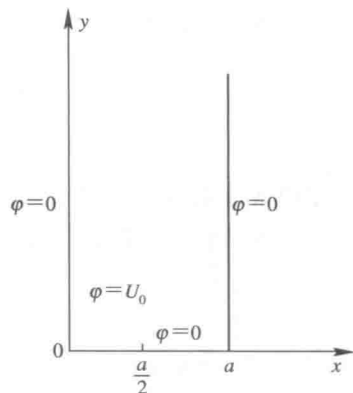


图 4-9 无限长槽的电位

由边界条件①和②知,基本解  $X_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ , 而基本解  $Y_n(y)$  只能取指数函数或双曲函数,但考虑到边界条件③,有  $Y_n = e^{-n\pi y/a}$ , 至此我们使用了边界条件①、②、③。为满足边界条件④,取级数

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi y/a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (4-41)$$

代入边界条件④,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

运用正弦函数的正交归一性,得

$$c_n \frac{a}{2} = \int_0^{a/2} U_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

化简得

$$c_n = \frac{2U_0}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \quad (4-42)$$

将式(4-42)代入式(4-41)即可得到待求电位。

由以上两例看出,用分离变量法解题时,应注意用一部分边界条件确定基本解的形式(即分离常数取实数还是虚数,以及分离常数的值),用剩余的一部分边界条件确定待定系数  $c_n$ 。

#### 4.4.2 圆柱坐标系中的分离变量法

电位的拉普拉斯方程在圆柱坐标系中(为了不与电荷体密度混淆,取坐标  $(r, \phi, z)$ )表示为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-43)$$

对于这个方程,仅分析电位与坐标变量  $z$  无关的情况。对于电位与三个坐标变量有关的情形,请读者参阅有关教材。

当电位与坐标变量  $z$  无关时,上式第三项为零,此时电位  $\varphi(r, \phi)$  满足二维拉普拉斯方程:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4-44)$$

运用分离变量法解之,令

$$\varphi = R(r)\Phi(\phi) \quad (4-45)$$

其中  $R$  只是  $r$  的函数,  $\Phi$  只是  $\phi$  的函数。将上式代入式(4-44),并且用  $R\Phi$  除以等式两边,得

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0$$

上式第一项只是  $r$  的函数,第二项只是  $\phi$  的函数。要其对任一点成立,必须每一项都是常数。令第一项等于  $n^2$ ,于是导出下面两个常微分方程:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0 \quad (4-46)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (4-47)$$

当  $n \neq 0$  时,上面两方程的解为

$$R = ar^n + br^{-n} \quad (4-48)$$

$$\Phi = c \cos n\phi + d \sin n\phi \quad (4-49)$$

其中  $a, b, c, d$  都是待定常数。通常对圆形区域的问题,  $\phi$  的变化范围为  $0 \sim 2\pi$ , 且有  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2n\pi)$ , 所以  $n$  必须是整数。为满足边界条件,要将式(4-48)和式(4-49)的基本解叠加,构成一般解(也称通解)为

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi) \quad (4-50)$$

当  $n=0$  时, 方程式(4-46)和式(4-47)的解为

$$\Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0 \quad (4-51)$$

$$R_0(r) = C_0 \ln r + D_0 \quad (4-52)$$

由此构成一个基本乘积解  $\varphi_0 = \Phi_0 R_0$ 。对于一般问题, 通解式(4-50)应加上  $\varphi_0$ 。但是如果讨论的是一个圆形区域内部(或外部)的问题, 依据解的物理意义可以知道  $\varphi_0$  为零(或者为一个常数), 如果是一个圆环区域的问题, 系数  $A_0=0, B_0=1$ 。以下通过例题熟悉圆柱坐标系分离变量法的应用。

**例 4-9** 将半径为  $a$  的无限长导体圆柱置于真空中的均匀电场  $E_0$  中, 柱轴与  $E_0$  垂直, 求任意点的电位。

**解:** 令圆柱的轴线与  $z$  轴重合,  $E_0$  的方向与  $x$  方向一致, 如图 4-10 所示。由于导体柱是一个等位体, 不妨令其为零, 即在柱内( $r < a$ ),  $\varphi_1=0$ , 柱外电位  $\varphi_2$  满足拉普拉斯方程。 $\varphi_2$  的形式就是圆柱坐标系拉普拉斯方程的通解。以下由边界条件确定待定系数。本例的边界条件为

①  $r \rightarrow \infty$ , 柱外电场  $E_2 \rightarrow E_0 e_x$ , 这样  $\varphi_2 \rightarrow -E_0 x$ , 即  $\varphi_0 \rightarrow -E_0 r \cos\phi$ 。

②  $r=a$ , 导体柱内、外电位连续, 即  $\varphi_2=0$ 。

除此之外, 电位关于轴对称, 即在通解中只取余弦项, 于是:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\phi \quad (r > a)$$

由边界条件①可知

$$A_1 = -E_0, \quad A_n = 0 \quad (n > 1)$$

这样, 得

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos\phi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{-n} \cos n\phi$$

由边界条件②, 有

$$-E_0 a \cos\phi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^{-n} \cos n\phi = 0$$

因这一表达式对任意的  $\phi$  成立, 所以

$$C_1 = E_0 a^2, \quad C_n = 0 \quad (n > 1)$$

于是, 有

$$\varphi_2 = E_0 \left( -r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\phi$$

**例 4-10** 若在电场强度为  $E_0$  的均匀静电场中放入一个半径为  $a$  的电介质圆柱, 柱的轴线与电场互相垂直, 介质柱的介电常数为  $\epsilon$ , 柱外为真空, 如图 4-11 所示, 求柱内、外的电场。

**解:** 设柱内电位为  $\varphi_1$ , 柱外电位为  $\varphi_2$ ,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  与  $z$  无关。取坐标原点为电位参考点, 边界条件为

①  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_2 = -E_0 r \cos\phi$ ;

②  $r=0$ ,  $\varphi_1=0$ ;

③  $r=a$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ ;

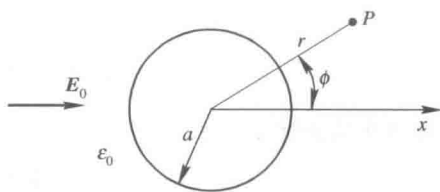


图 4-10 均匀场中导体柱

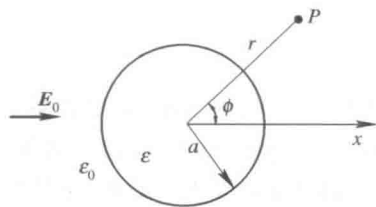


图 4-11 均匀场中介质柱



$$\textcircled{4} \quad r=a, \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}.$$

于是, 柱内、柱外电位的通解为

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi) \\ \varphi_2(r, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C'_n \cos n\phi + D'_n \sin n\phi)\end{aligned}$$

考虑本题的外加电场、极化面电荷均关于  $x$  轴对称, 柱内、柱外电位解只有余弦项, 即

$$B_n = D_n = B'_n = D'_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

由边界条件②, 有  $C_n = 0 \quad (n \geq 1)$ , 又由边界条件①, 得

$$A'_1 = -E_0, \quad A'_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

于是, 有

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n A_n \cos n\phi \\ \varphi_2(r, \phi) &= -E_0 r \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n r^{-n} \cos n\phi\end{aligned}$$

由边界条件③和④, 可得

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\phi = -E_0 a \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n a^{-n} \cos n\phi \\ \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} n A_n a^{n-1} \cos n\phi = -\epsilon_0 E_0 \cos \phi - \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} n C'_n a^{-n-1} \cos n\phi \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{2E_0}{\epsilon_r + 1}, \quad C'_1 = E_0 a^2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \\ A_n &= 0, \quad C'_n = 0 \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

其中,  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , 是介质圆柱的相对介电常数。于是柱内、外的电位为

$$\varphi_1 = -\frac{2}{\epsilon_r + 1} E_0 r \cos \phi, \quad \varphi_2 = -E_0 \left( 1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) r \cos \phi$$

由此得柱内、外的电场为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{2}{\epsilon_r + 1} E_0 (\mathbf{e}_r \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi) = \mathbf{e}_x \frac{2}{\epsilon_r + 1} E_0 \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_r \left( 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) E_0 \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \left( -1 + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) E_0 \sin \phi\end{aligned}$$

圆柱内的场是一个均匀场, 且比外加均匀场小, 柱外的场同电偶极子的场。

**例 4-11** 在一个半径为  $a$  的圆柱面上, 给定其电位分布:

$$\varphi = \begin{cases} U_0 & 0 < \phi < \pi \\ 0 & -\pi < \phi < 0 \end{cases}$$

求圆柱内、外的电位分布。

**解:** 本题的电位也是与坐标  $z$  无关。除了圆柱面上的已知电位以外, 根据问题本身的

物理含义,可以得出,圆柱外部的电位在无穷远处应该趋于零,圆柱内部的电位在圆柱中轴线上应该为有限值。依据这一点,可以判断出,在圆柱外,通解中的正幂项的系数为零,在圆柱内部,通解中的负幂项的系数同样为零。

于是,柱内电位的通解为

$$\varphi_1(r, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)$$

待定系数  $A_0$ 、 $A_n$ 、 $B_n$  可以由界面的电位来确定,即

$$\varphi_1(a, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) = \begin{cases} U_0 & 0 < \phi < \pi \\ 0 & -\pi < \phi < 0 \end{cases}$$

由傅里叶级数的有关知识,可得出

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(a, \phi) d\phi = \frac{U_0}{2}$$

$$a^n A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(a, \phi) \cos n\phi d\phi$$

$$A_n = \frac{a^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} U_0 \cos n\phi d\phi = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$a^n B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(a, \phi) \sin n\phi d\phi$$

$$B_n = \frac{a^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} U_0 \sin n\phi d\phi = \frac{a^{-n} U_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

即

$$B_n = \frac{2a^{-n} U_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

将这些系数代入上面的通解,得到圆柱内部的电位为

$$\varphi_1(r, \phi) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\phi$$

求解圆柱外部电位的方法与求解圆柱内部电位的方法一样,只不过其电位通解的形式不同,此问题留给读者自己去求解。

#### 4.4.3 球坐标系中的分离变量法

在求解具有球面边界的边值问题时,采用球坐标系较方便。球坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4-53)$$

这里只讨论轴对称场,即电位  $\varphi$  与坐标  $\phi$  无关的场。此时拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4-54)$$

令  $\varphi = R(r)\Theta(\theta)$ , 将其代入式(4-54), 并用  $\frac{r^2}{R\Theta}$  乘该式的两边, 得

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

上式的第一项只是  $r$  的函数, 第二项只是  $\theta$  的函数。要其对空间任意点成立, 必须使每一

项为常数。令第一项等于  $k$ ，于是有

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = k \quad (4-55)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -k \quad (4-56)$$

为了把式(4-56)化为标准形式，令

$$x = \cos \theta \quad (4-57)$$

代换后原方程变为

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + k\Theta = 0 \quad (4-58)$$

方程式(4-58)称为勒让德方程，它的解具有幂级数形式，且在  $-1 < x < 1$  收敛。如果选择  $k = n(n+1)$ ，其中  $n$  为正整数，则解的收敛域扩展为  $-1 \leq x \leq 1$ 。当  $k = n(n+1)$  时，勒让德方程的解为  $n$  阶勒让德多项式  $P_n(x)$ ：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (4-59)$$

前几个勒让德多项式为

$$\left. \begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1 \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4-60)$$

勒让德多项式也是正交函数系，正交关系为

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (4-61)$$

将  $k = n(n+1)$  代入  $R(r)$  的方程式(4-55)，解之得

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1} \quad (4-62)$$

其中  $A_n$ 、 $B_n$  是待定系数。取不同的  $n$  值对应的基本解进行叠加，得到球坐标系中二维拉普拉斯方程的通解为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta) \quad (4-63)$$

**例 4-12** 假设真空中在半径为  $a$  的球面上有面密度为  $\sigma_0 \cos \theta$  的表面电荷，其中  $\sigma_0$  是常数，求任意点的电位。

**解：**本题除了面电荷外，球内和球外再无电荷分布，虽然可以用静电场中的积分公式计算各点的电位，但使用分离变量法更方便。设球内、球外的电位分别是  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 。由题意知道，在无穷远处，电位为零；在球心处，电位为有限值。所以可以取球内、球外的电位形式如下：

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (4-64)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta) \quad (4-65)$$

球面上的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad r=a, \varphi_1=\varphi_2;$$

$$\textcircled{2} \quad r=a, -\epsilon_0 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = \rho_s = \sigma_0 \cos \theta.$$

将式(4-64)和式(4-65)代入边界条件,得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-n-1} P_n(\cos \theta) \quad (4-66)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a^{-n-2} P_n(\cos \theta) = \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\epsilon_0} \quad (4-67)$$

比较式(4-66)两边,得

$$B_n = A_n a^{2n+1} \quad (4-68)$$

将式(4-68)代入式(4-67),整理以后变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) = \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\epsilon_0}$$

使用勒让德多项式的唯一性,即将区间 $[-1, 1]$ 内的函数可以唯一地用勒让德多项式展开,并考虑 $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ ,得

$$A_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

$$A_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

于是我们得到

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq a)$$

## 4.5 复变函数法

复变函数法可用于求解复杂边界的二维边值问题,且在一般条件下,它的解具有比较简单的形式,并能方便地计算电容。

### 4.5.1 复电位

如果复变函数 $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ 是解析函数,则它的实部和虚部之间应满足柯希—黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4-69)$$

利用柯希—黎曼条件,可以证明解析函数的实部和虚部都满足二维拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4-70)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (4-71)$$

由于在无源区, 二维静电场的电位满足拉普拉斯方程, 可见二维静电场的电位可以用解析函数的实部或虚部表示。

我们又知道, 对解析函数  $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , 曲线簇  $u(x, y) = C_1$  和曲线簇  $v(x, y) = C_2$  处处相互正交。这个性质可以用下面的公式来表示:

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0$$

也就是说, 任意一个解析函数的实部  $u$  和虚部  $v$  均满足二维拉普拉斯方程, 并且  $u$  和  $v$  的等值线相互垂直。

由于二维静电问题的等位线和电力线互相垂直, 因而如果用虚部  $v(x, y)$  表示电位, 则实部的等值线  $u(x, y) = C_1$  就表示电通量线(亦是电力线), 此时称这一实部为通量函数, 称解析函数  $w(z)$  为复电位。同理, 如果用实部  $u(x, y)$  表示电位, 则虚部  $v(x, y)$  加上一个负号, 即用  $-v(x, y)$  表示通量函数, 称解析函数  $w(z)$  为复电位。

#### 4.5.2 用复电位解二维边值问题

我们先说明通量函数的含意。如前所述, 当取某一解析函数的虚部表示二维电场的电位时, 有

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

我们考虑一个在  $xoy$  平面上任意的一条曲线  $l$  为底, 在  $z$  方向单位长的曲面, 计算通过这一曲面的电通量  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y$$

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_z = (\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy) \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x dy - \mathbf{e}_y dx$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int (E_x dy - E_y dx) = \int \left( -\frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) = \int \left( \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = \int du$$

显然, 如果在  $xoy$  平面上指定  $A$  点作为计算通量的起点, 则  $B$  点的通量函数是指在  $AB$  间的一条曲线  $l$  和  $z$  方向单位长度构成的一个曲面上的电通量(如图 4-12)。若在图 4-13 中  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  两条等位线是电容器的两个极板表面(极板在  $z$  方向无限长), 则正极板单位长电荷是  $\epsilon_0(\Psi_B - \Psi_A)$ , 这样得到单位长电容为

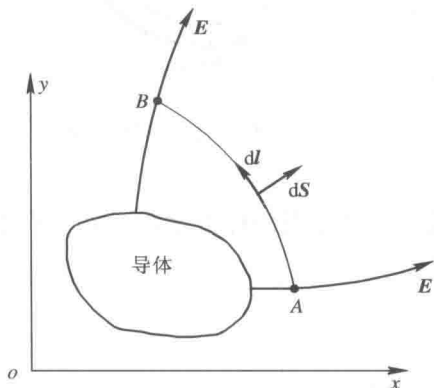


图 4-12 电通量函数

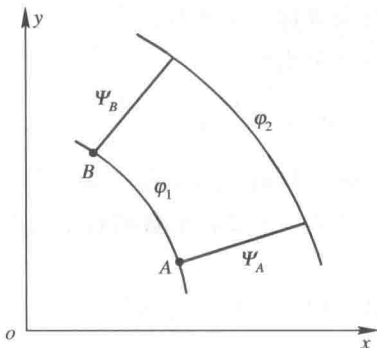


图 4-13 电容的计算

$$C = \epsilon_0 \frac{\Psi_B - \Psi_A}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (4-72)$$

综上所述,用复变函数法解二维边值问题的关键是要找一个解析函数。若其虚部表示电位函数,则其实部表示通量函数,即

$$w(x, y) = \Psi(x, y) + j\varphi(x, y) \quad (4-73)$$

同理,也可以用实部表示电位函数。此时其虚部是通量函数的相反值(原因请读者思考),即

$$w(x, y) = \varphi(x, y) - j\Psi(x, y) \quad (4-74)$$

在一般情况下,寻求相应的复电位函数并没有固定的方法,而且往往极为困难。所以通常采取相反的途径,就是先研究一些常用解析函数的实部和虚部的等值线分布。对于实际的边界形状,从以上函数中找出其实部(或虚部)的等值线与边界相重合的函数,再根据已知的边界条件确定该解析函数中的待定常数。对于一些形状较复杂的边界,常常需要进行两次或多次变换。

**例 4-13** 分析解析函数  $w = A \ln z$  所表示的场( $A$  为实常数)。

**解:** 用极坐标( $r, \phi$ )表示  $z$ , 则

$$w = A \ln(re^{j\phi}) = A \ln r + Aj\phi = u + jv$$

实部  $u$  的等值线是圆心在原点的圆,虚部的等值线是幅角  $\phi$  为常数的射线,如图 4-13 所示。如果用实部  $u$  表示电位,用虚部  $v$  表示电通量函数,对数函数可以表示同轴线的场,也可以表示无限长带电导线的场。对线电荷密度为  $\rho_l$  的无限长均匀线电荷,其穿过半径为  $r$ 、沿  $z$  方向单位长度的圆柱面的电通量为

$$\Delta v = A \Delta \phi = A(2\pi - 0) = 2\pi A = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$$

$$A = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}$$

于是,得到复电位为

$$\xi(z) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln z = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + j \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \theta$$

如果用虚部表示电位,它可以表示夹角为  $\alpha$  的两个半无限大导体板的电场。此时,可以求出图 4-14 所示问题的复电位为

$$\xi(z) = \frac{U}{\alpha} \ln z = \frac{U}{\alpha} \ln r + j \frac{U}{\alpha} \theta$$

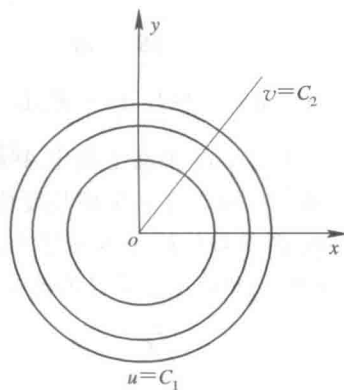


图 4-14 对数函数

在实际计算时,因  $u$  和  $v$  都是无量纲的量,故应乘以适当的标度常数,又为了便于确定电位参考点,还要在对数函数中加上另一常数,即

$$w = A \ln z + B \quad (4-75)$$

**例 4-14** 分析解析函数

$$w(z) = A \ln \frac{z+d}{z-d} \quad (4-76)$$

所表示的场,并用此求半径为  $a$  的导体圆柱与无限大导体板(导体圆柱与平板平行,轴线

距离导体平面为  $b$ ) 之间单位长的电容(如图 4-15 所示)。

**解:** 将  $z=x+jy$  代入式(4-76), 将函数  $w$  的实部与虚部分别写成  $x$ 、 $y$  的函数, 有

$$u(x, y) = A \frac{1}{2} \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} \quad (4-77)$$

$$v(x, y) = A \left( \arctan \frac{y}{x+d} - \arctan \frac{y}{x-d} \right) \quad (4-78)$$

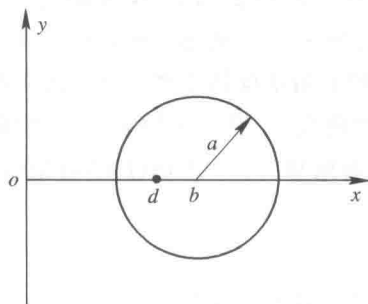


图 4-15 导体板与导体圆柱

当用实部  $u$  表示电位时, 等位线分布同例 4-5, 所以它可以表示两个平行的等量异号线电荷产生的

场, 也可以表示一个线电荷和无限大接地导体板之间的场, 同样也可以表示一个导体圆柱与导体板之间的场。下面用此解析函数法计算导体圆柱与导体板之间的电容。

利用例 4-5 给出的公式, 由已知  $a$  和  $b$ , 求出  $d$  的值:

$$d = (b^2 - a^2)^{1/2} \quad (4-79)$$

导体平面( $x=0$ )的电位为零。为了求导体圆柱的表面电位, 将式(4-79)代入式(4-77), 并注意导体圆柱面的方程为

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2$$

即

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2 + 2bx = 2bx - d^2$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} &= \frac{x^2 + y^2 + d^2 + 2dx}{x^2 + y^2 + d^2 - 2dx} = \frac{2bx + 2d^2}{2bx - d^2} \\ &= \frac{b+d}{b-d} = \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} \end{aligned}$$

这样就得到带正电的导体电位为

$$\varphi_2 = \frac{A}{2} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} = A \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

用式(4-78)计算出点  $x=0$ 、 $y=+\infty$  处的通量函数值为  $\pi A$ 。同理, 点  $x=0$ 、 $y=-\infty$  处的通量函数值为  $-\pi A$ 。通量值的差为  $2\pi A$ 。从式(4-72)计算出导体板与导体圆柱单位长电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}}$$

这一结论和例 4-5 是一致的(为何有一个系数 2, 请读者自行思考)。

### 4.5.3 保角变换

当  $w=f(z)$  变换为单值函数时, 对于  $Z$  平面上的一个点  $z_0$ , 在  $W$  平面就有一点  $w_0$  与之对应; 对于  $Z$  平面上一条曲线  $C$ ,  $W$  平面上也有一条曲线  $C'$  与之对应; 同样, 在  $Z$  平

面上的一个图形  $D$ , 在  $W$  平面有一个图形  $D'$  与之对应。这种对应关系称为映射, 或称为变换, 如图 4-16 所示。在这种变换中, 尽管图形的形状要产生变化, 但是相应的两条曲线之间的夹角却保持不变, 所以该变换也叫做保角变换。为了证明保角性, 设  $Z$  平面的  $z_0$  点上, 沿曲线  $C_1$  有一个增量  $dz_1$ , 沿曲线  $C_2$  有一个增量  $dz_2$ , 相应的在  $W$  平面  $w_0$  点, 沿曲线  $C'_1$  有增量  $dw_1$ , 沿曲线  $C'_2$  有增量  $dw_2$ , 于是

$$dw_1 = f'(z_0) dz_1$$

$$dw_2 = f'(z_0) dz_2$$

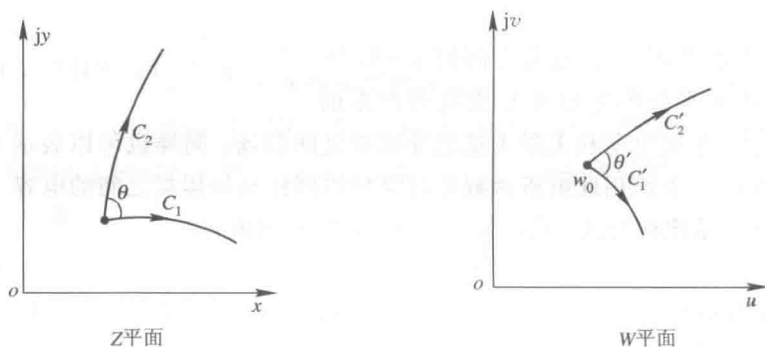


图 4-16 保角变换

当  $f'(z_0)$  不等于零时, 它们之间的幅角关系为

$$\arg dw_1 = \arg dz_1 + \arg f'(z_0)$$

$$\arg dw_2 = \arg dz_2 + \arg f'(z_0)$$

以上二式相减, 得

$$\arg dw_1 - \arg dw_2 = \arg dz_1 - \arg dz_2$$

即

$$\theta' = \theta$$

这样就证明了保角性。在变换前后, 图形的形状要产生旋转和伸缩, 但是两条曲线之间的夹角保持不变。使用保角变换法求解静态场问题的关键是选择适当的变换函数, 将  $Z$  平面上比较复杂的边界变换成  $W$  平面上较易求解的边界。

使用保角变换应注意以下几点:

(1) 如果变换以前势函数满足拉普拉斯方程, 则在变换以后势函数也满足拉普拉斯方程; 如果变换以前势函数满足泊松方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

则在变换以后, 势函数也满足以下的泊松方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = -\frac{\rho^*}{\epsilon}$$

上式中:

$$\rho^*(u, v) = |f'(z)|^{-2} \rho(x, y)$$

这表明, 二维平面场的电荷密度经过变换以后要发生变化, 但是电荷总量不变。其理由为



$$\int_S \rho^*(u, v) du dv = \int_S |f'(z)|^{-2} \rho(x, y) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy$$

而

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2$$

所以

$$\int_S \rho^*(u, v) du dv = \int_S \rho(x, y) dx dy$$

(2) 在变换前后,  $Z$  平面和  $W$  平面对应的电场强度要发生变化, 它们之间的关系为

$$E(x, y) = |f'(z)| E(u, v)$$

这是因为, 从  $Z$  平面变换到  $W$  平面时, 线元的长度要伸长  $|f'(z)|$  倍, 相应的电场强度要减小  $|f'(z)|$  倍。

(3) 变换前后, 两导体之间的电容量不变。这里的电容量是指单位长度的电容。因为变换前后两个导体之间的电位差不变, 二导体面上的电场和电荷密度发生了变化, 但是, 导体上的电荷总量不变。如取  $C_1$  为  $Z$  平面上的导体表面,  $C'_1$  为变换以后  $W$  平面上的导体表面, 则沿轴线方向单位长度的  $C_1$  上的总电荷为

$$Q = \int_{C_1} \epsilon E_n(z) dC_1$$

则沿轴线方向单位长度的  $C'_1$  上的总电荷为

$$Q' = \int_{C'_1} \epsilon E_n(w) dC'_1$$

因为

$$E_n(z) = \left| \frac{dw}{dz} \right| E_n(w), \quad dC_1 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^{-1} dC'_1$$

所以有

$$Q = Q'$$

可以使用这个性质方便地计算两个导体之间的电容量。

**例 4-15** 两个共焦椭圆柱面导体组成的电容器, 其外柱的长、短半轴分别是  $a_2$ 、 $b_2$ , 内柱的长、短半轴分别是  $a_1$ 、 $b_1$ , 如图 4-17 所示, 求单位长度的电容。

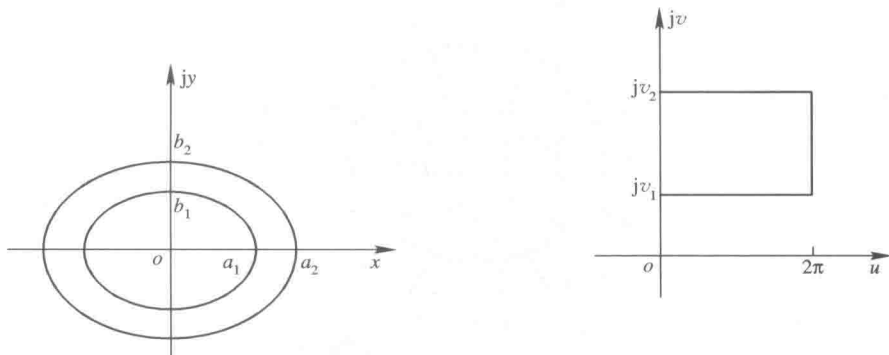


图 4-17 椭圆区域的变换

解: 先分析反余弦变换  $w = \arccos \frac{z}{k}$  所能表示的场( $k$  为常数, 为了简便起见, 取其为实常数)。

$$x + jy = k \cos(u + jv) = k \cos u \operatorname{ch} v - jk \sin u \operatorname{sh} v$$

即

$$x = k \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = -k \sin u \operatorname{sh} v$$

所以

$$\frac{x^2}{k^2 \operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{k^2 \operatorname{sh}^2 v} = 1$$

$$\frac{x^2}{k^2 \cos^2 u} - \frac{y^2}{k^2 \sin^2 u} = 1$$

可见,  $v$  为常数表示一族共焦点的椭圆, 焦点在  $(\pm k, 0)$ ,  $u$  为常数表示一族与椭圆簇正交的共焦点双曲线, 如图 4-18 所示(图中是  $k=1$  的情形)。它可以将  $Z$  平面上的椭圆或双曲线边界变换到  $W$  平面的直线边界(包括蜕变为一段线段的椭圆, 蜕变为两条射线的双曲线)。椭圆的长半轴为  $k \operatorname{ch} v$ , 短半轴为  $k \operatorname{sh} v$ 。对于本题, 选取  $v$  表示电势函数, 则在  $Z$  平面的两个椭圆导体之间的区域变换到  $W$  平面的矩形区域  $0 < u < 2\pi$ ,  $v_1 < v < v_2$ 。其中:

$$a_1 = k \operatorname{ch} v_1, \quad a_2 = k \operatorname{ch} v_2$$

$$k = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$$

单位长度电容为

$$C = \epsilon_0 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$$

注意到

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

可求出此椭圆电容器单位长度的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}}$$

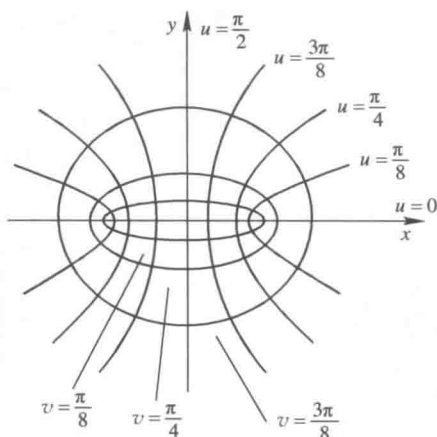


图 4-18  $z = \cos w$  的变换

## 4.6 格林函数法

格林函数法是数学物理方法中的基本方法之一,可以用于求解静态场中的拉普拉斯方程、泊松方程以及时变场中的亥姆霍兹方程。格林函数法的要点是先求出与待解问题具有相同边界形状的格林函数。格林函数是指单位点源在相同边界形状齐次边界条件下的位函数。知道格林函数后,通过积分就可以得到具有任意分布源的解。对于静电问题而言,就是说,可以从单位点电荷(对于求二维问题是单位线电荷,一维问题是单位面电荷)在特定边界上产生的位函数,通过积分求得同一边界的任意分布电荷产生的电位。本节以静电场的边值问题为例,说明格林函数法在求解泊松方程中的应用。

### 4.6.1 静电场边值问题的格林函数法表示式

假定已知某给定区域  $V$  内的电荷体密度  $\rho(\mathbf{r})$ , 则待求电位  $\varphi(\mathbf{r})$  满足泊松方程:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (4-80)$$

与方程式(4-80)相应的格林函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  满足下列方程:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} \quad (4-81)$$

方程式(4-81)实际上就是位于源点  $\mathbf{r}'$  处的单位正电荷在空间产生的电位所满足的方程,也就是说,格林函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  是位于源点  $\mathbf{r}'$  处的单位正电荷在空间  $\mathbf{r}$  处产生的电位。很显然,格林函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  仅仅是源点与场点间距离的函数,即是  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  的函数。我们将源点和场点互换,其间的距离不变,故而有

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

上式称为格林函数的对称性,也就是电磁场的互易性。

将式(4-80)左右乘以  $\varphi$ , 式(4-81)左右乘以  $G$ , 二者相减再积分,可得

$$\int_V (G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G) dV = - \int_V \frac{\rho G}{\epsilon} dV + \int_V \varphi(\mathbf{r}) \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} dV$$

使用格林第二恒等式(见附录),可得

$$\oint_S \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = - \int_V \frac{\rho G}{\epsilon} dV + \int_V \varphi(\mathbf{r}) \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} dV \quad (4-82)$$

当源点在区域  $V$  内时,有

$$\int_V \varphi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \varphi(\mathbf{r}')$$

因而,式(4-82)可以写为

$$\varphi(\mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \epsilon \oint_S \left[ G \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} - \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS$$

将上式的源点和场点互换,并且利用格林函数的对称性,得

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \epsilon \oint_S \left[ G \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS' \quad (4-83)$$

此式就是有限区域  $V$  内任意一点电位的格林函数表示式。它表明,一旦体积  $V$  中的电荷分布  $\rho$  以及有限体积  $V$  的边界面  $S$  上的边界条件  $\varphi(\mathbf{r}')$  和  $\partial\varphi/\partial n'$  为已知,则  $V$  内任意一点的电位即可以通过积分算出。

在式(4-83)中的格林函数是给定边界形状下一般边值问题的格林函数。为了简化计算,我们可以对格林函数附加上边界条件。与静电场边值问题一样,格林函数的边界条件也分为三类:

### 1. 第一类边值问题的格林函数

与第一类静电场边值问题相应的是第一类边值问题的格林函数,用  $G_1$  表示。它在体积  $V$  内和边界面  $S$  上满足的方程如下:

$$\nabla^2 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} \quad (4-84a)$$

$$G_1|_S = 0 \quad (4-84b)$$

即第一类边值问题的格林函数  $G_1$  在边界面  $S$  上满足齐次边界条件。将式(4-84b)代入式(4-83),得出第一类静电场边值问题的解为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \epsilon \oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \quad (4-85)$$

### 2. 第二类边值问题的格林函数

与第二类静电场边值问题相应的是第二类边值问题的格林函数,用  $G_2$  表示。为了简单,我们先选取它在体积  $V$  内和  $S$  上满足的方程如下:

$$\nabla^2 G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} \quad (4-86a)$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (4-86b)$$

式(4-86a)和式(4-86b)仅仅具有形式上简洁的特点,对于大多数问题,并不能用于计算。其原因是,假定了边界面上格林函数的法向导数为零,就意味着整个边界面上每一点的面电荷密度都为零,但是在求解区域内部,由于加了一个总电量为1库仑的点电荷,依照电荷守恒定律,整个边界面上的感应电荷总量应该是一1库仑。这个矛盾可以通过修改第二类边值情形下的格林函数定义来解决。一般是修改格林函数微分方程(4-86a),或者修改格林函数边界条件(4-86b)。比如采用第一种方法时,第二类边值的格林函数采用如下定义:

$$\nabla^2 G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 1/V}{\epsilon} \quad (4-87a)$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (4-87b)$$

式中,  $V$  是求解区域的体积,  $n$  是区域边界的外法向。在此条件下,第二类静电场边值问题的解为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \epsilon \oint_S G_2 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS' + \varphi_0 \quad (4-87c)$$

式中,  $\varphi_0$  是区域内电位的体积平均值,即

$$\varphi_0 = \frac{1}{V} \int_V \varphi(\mathbf{r}') dV'$$

若采用第二种方法, 保留方程(4-86a)不变, 而修改格林函数边界条件时, 格林函数定义为

$$\nabla^2 G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} \quad (4-87d)$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{S\epsilon} \quad (4-87e)$$

式中,  $S$  是待求解区域的总面积。在这种情况下, 待求电位同样用式(4-87)计算, 仅仅把上述公式中的  $\varphi_0$  理解为区域边界面  $S$  上的电位平均值, 即其计算公式为

$$\varphi_{01} = \frac{1}{S} \oint_S \varphi(\mathbf{r}') dS' \quad (4-87f)$$

应该注意, 在上述两种电位表达式中的常数项  $\varphi_0$  仅仅具有形式上的意义, 不论是面积平均值还是体积平均值, 并不影响计算结果。这是因为单纯的第二类边值问题, 电位的解并不是唯一的, 不同的解之间可以相差一个常数。对于第二类边值问题, 关心的仅仅是电场强度。当然, 如果涉及的问题是半无界空间以及类似问题时, 原来的定义公式保持不变。此时, 区域的体积和面积都是无穷大。前面讲到的两种选取方法, 其物理意义是, 除了在激励点(也就是源点  $\mathbf{r}'$ )都要加上单位正电荷外, 第一种处理方法等于在待求解区域再加上按体积均匀分布的单位负电荷; 而第二种方法是在边界面上加上按面积均匀分布的单位负电荷。就是因为第二类边值问题, 位函数解不是唯一的, 使得格林函数的求解变化多, 选择更灵活, 理论上说选择方案有无穷多种。比如可以在体积内加上二分之一一个单位负电荷, 然后在边界上加上二分之一一个单位负电荷; 再比如, 在边界面的一部分上加上均匀分布的单位负电荷, 在其余边界面上不加电荷。当然, 对于初学者, 只要掌握格林函数法的要点即可。

### 3. 第三类边值问题的格林函数

对于第三类静电场边值问题, 使用第三类边值问题的格林函数较为方便。第三类静电场边值问题的电位方程也由方程式(4-80)确定, 其边界条件由下式确定:

$$\left( \alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_S = f \quad (4-88)$$

其中:  $\alpha$ 、 $\beta$  为已知常数;  $f(\mathbf{r})$  为已知函数。与第三类静电场边值问题相应的第三类边值问题的格林函数  $G_3$  所满足的方程及边界条件如下:

$$\nabla^2 G_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} \quad (4-89a)$$

$$\left( \alpha G_3 + \beta \frac{\partial G_3}{\partial n} \right) \Big|_S = 0 \quad (4-89b)$$

将式(4-89b)代入式(4-83), 其可以简化为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_S \frac{f(\mathbf{r}') G_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\alpha} dS' \quad (4-90)$$

从以上推导过程可看出, 格林函数解法其实质是把泊松方程的求解转化为特定边界条件下点源激励时位函数的求解问题。点源激励下的位函数就是格林函数。格林函数所满足

的方程及边界条件都比同类型的泊松方程要简单。这里仅仅以第三类边值问题的格林函数为例比较一下。先看方程式(4-80)和式(4-89a), 尽管二者都是非齐次方程, 它们的左边一样, 而式(4-89a)的右边明显简单, 是一个点源激励。再比较边界条件式(4-88)和式(4-89b), 可以看出, 式(4-88)是一个非齐次边界条件, 而式(4-89b)是一个齐次边界条件。至于第一类、第二类边值问题, 其格林函数也具有同样的特点。简而言之, 格林函数法就是将非齐次边界条件下泊松方程的求解问题简化为齐次边界条件下点源激励的泊松方程的求解, 也就是格林函数的求解问题。而各类型的格林函数的计算, 要通过其它方法求得, 比如镜像法等。

另外, 若我们讨论的是拉普拉斯方程的求解问题, 仅仅需要取式(4-85)、式(4-87)和式(4-90)中的电荷体密度为零即可。

## 4.6.2 简单边界的格林函数

以下我们给出一些简单边界形状下第一类静电场边值问题的格林函数(为了书写简便, 略去下标, 用  $G$  表示)。

### 1. 无界空间的格林函数

我们可以用格林函数所满足的偏微分方程以及边界条件, 通过求解这一方程来得出格林函数。也可以由格林函数的物理含义来求解。我们在此使用后一种方法计算。要计算无界空间的格林函数, 就是计算无界空间中, 位于  $\mathbf{r}'$  处的单位点电荷, 以无穷远为电位参考点时, 在空间  $\mathbf{r}$  处的电位。这一电位为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4-91)$$

因此, 无界空间的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4-92)$$

由式(4-92)确定的是三维无界空间的格林函数。对于二维无界空间, 其格林函数可以通过计算位于源点  $(x', y')$  处的线密度为 1 的单位无限长线电荷在空间  $(x, y)$  处的电位来确定。由静电场一章的知识可知, 二维无界空间的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln R + C \quad (4-93)$$

式中:  $R = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}$ ;  $C$  是常数, 取决于电位参考点的选取。

### 2. 上半空间的格林函数

计算上半空间( $z > 0$ )的格林函数, 就是求位于上半空间  $\mathbf{r}'$  处的单位点电荷, 以  $z=0$  平面为电位零点时, 在上半空间任意一点  $\mathbf{r}$  处的电位。这个电位可以用平面镜像法求得, 因而, 上半空间的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4-94)$$

式中:

$$R_1 = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{1/2}$$

同理可得出二维半空间( $y>0$ )的格林函数。也使用镜像法,可以比较容易地算出位于 $(x', y')$ 处的单位线电荷,在以 $y=0$ 为电位参考点时,在 $(x, y)$ 处的电位。因而,二维半空间( $y>0$ )的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (4-95)$$

式中:

$$R_1 = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(x-x')^2 + (y+y')^2]^{1/2}$$

### 3. 球内、外空间的格林函数

我们可以由球面镜像法,求出球心在坐标原点、半径为 $a$ 的球外空间的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{a}{r'R_2} \right) \quad (4-96)$$

式中各量如图4-19所示: $a$ 是球的半径; $r=|\mathbf{r}|$ ;  $r'=|\mathbf{r}'|$ ;  $R_1$ 是 $\mathbf{r}'$ 到场点 $\mathbf{r}$ 的距离; $R_2$ 是 $\mathbf{r}'$ 的镜像点 $\mathbf{r}''$ 到场点 $\mathbf{r}$ 的距离。

$$R_1 = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{1/2}$$

$$R_2 = (r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos\gamma)^{1/2}$$

$$r'' = \frac{a^2}{r'}$$

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

同理,可以计算出球内空间的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{a}{r'R_2} \right) \quad (4-97)$$

式中各量如图4-20所示。

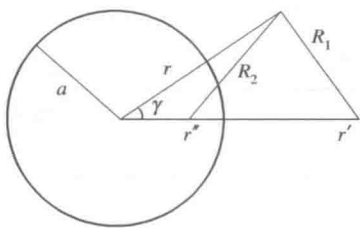


图 4-19 球外格林函数

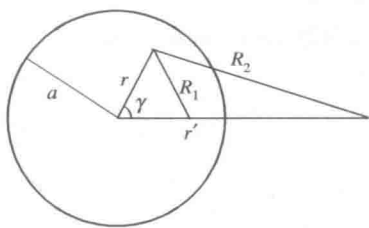


图 4-20 球内格林函数

### 4.6.3 格林函数的应用

由方程式(4-85)计算第一类静电场边值问题的解时,先要知道待求区域的第一类边值问题的格林函数 $G$ ,然后求出 $G$ 在边界面上的法向导数 $\partial G / \partial n'$ 的值,再代入式(4-85),积分后得到区域内的电位值。以下通过例题说明。

**例 4-16** 已知无限大导体平板由两个相互绝缘的半无限大导体平板组成(如图4-21所示),右半部的电位为 $U_0$ ,左半部的电位为零,求上半空间的电位。

解: 此题是拉普拉斯方程的第一类边值问题, 即体电荷为零。此时式(4-85)可以简化为

$$\varphi = -\varepsilon \oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' \quad (4-98)$$

由式(4-95)得知, 二维半无界空间的格林函数为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \{ \ln[(x-x')^2 + (y+y')^2] - \ln[(x-x')^2 + (y-y')^2] \} \end{aligned}$$

式中:

$$R_1 = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}, R_2 = [(x-x')^2 + (y+y')^2]^{1/2}$$

应注意, 公式(4-98)中的面积分在二维问题时要转化为线积分, 且  $n'$  是界面的外法向。于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n'} &= -\frac{\partial G}{\partial y'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{2(y+y')}{(x-x')^2 + (y+y')^2} - \frac{-2(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right] \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_S &= -\frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} \end{aligned}$$

代入式(4-98), 可得

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{y^2 + (x-x')^2} dx' = \frac{U_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{y} \right)$$

这一结果与用复变函数法得到的结果相一致。

**例 4-17** 一个间距为  $d$  的平板电容器, 极板间的体电荷密度是  $\rho_0$  ( $\rho_0$  为常数), 上、下板的电位分别是  $U_0$  和 0, 求格林函数。

解: 选取如图 4-22 所示的坐标系, 电位仅仅是坐标  $x$  的函数  $\varphi(x)$ 。

可以知道  $\varphi(x)$  满足的微分方程及其边界条件如下:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad (0 < x < d)$$

$$\varphi(0) = U_0, \quad \varphi(d) = 0$$

以上方程使用直接积分法可方便地求解。但是为了说明格林函数法的计算步骤,

这里用格林函数法求解。先写出和上述方程相应的格林函数满足的微分方程及其边界条件(使用格林函数是单位点源在齐次边界条件下的位函数这一性质, 一维点源就是面源, 即一维  $\delta$  函数)如下:

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} = -\frac{\delta(x-x')}{\varepsilon_0} \quad (0 < x < d) \quad (4-99)$$

$$G(0, x') = 0 \quad (0 < x' < d)$$

$$G(d, x') = 0 \quad (0 < x' < d)$$

对于格林函数  $G$  的微分方程, 分  $x < x'$  和  $x > x'$  两部分积分后, 得

$$G(x, x') = C_1 x + C_2 \quad (0 \leq x < x' < d)$$

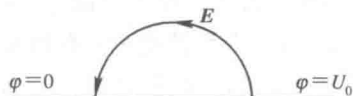


图 4-21 例 4-16 用图

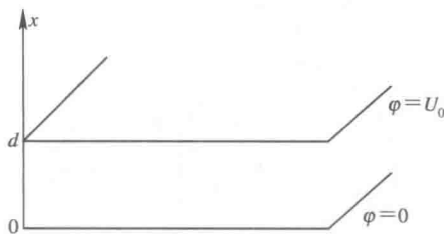


图 4-22 例 4-17 用图



$$G(x, x') = C_3 x + C_4 \quad (0 < x' < x \leq d)$$

代入上、下极板  $G$  的边界条件, 得

$$G_2 = 0, C_4 = -dC_3$$

即

$$G(x, x') = C_1 x \quad (0 \leq x < x' < d)$$

$$G(x, x') = -C_3(d-x) \quad (0 < x' < x \leq d)$$

式中还有两个待定常数要确定。可以使用  $G$  在  $x=x'$  连续, 得

$$C_1 x' = C_3(x' - d)$$

另外, 对方程式(4-99)左右在  $x=x'$  附近积分一次, 得

$$\left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=x'_+} - \left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=x'_-} = -\frac{1}{\epsilon_0}$$

即

$$C_3 - C_1 = -\frac{1}{\epsilon_0}$$

解  $C_1$  和  $C_3$  的联立方程, 得

$$C_1 = \frac{d-x'}{\epsilon_0 d}$$

$$C_3 = -\frac{x'}{\epsilon_0 d}$$

最后得到格林函数为

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{d-x'}{\epsilon_0 d} x & x < x' \\ \frac{x'}{\epsilon_0 d} (d-x) & x' > x \end{cases}$$

**例 4-18** 已知一个半径为  $a$  的圆柱形区域内体电荷密度为零, 界面上的电位为

$$\varphi(a, \phi) = \varphi(\phi)$$

用格林函数法求圆柱内部的电位  $\varphi(r, \phi)$ 。

**解:** 使用镜像法及格林函数的性质, 可以得出半径为  $a$  的圆柱内部静电问题的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2 r'}{R_1 a}$$

式中各量如图 4-23 所示:  $r = |\mathbf{r}|$ ;  $r' = |\mathbf{r}'|$ ;  $R_1$  是  $\mathbf{r}'$  到场点  $\mathbf{r}$  的距离;  $R_2$  是  $\mathbf{r}'$  的镜像点  $\mathbf{r}''$  到场点  $\mathbf{r}$  的距离。

$$R_1 = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}$$

$$R_2 = (r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos \gamma)^{1/2}$$

$$r'' = \frac{a^2}{r'}, \gamma = \phi - \phi'$$

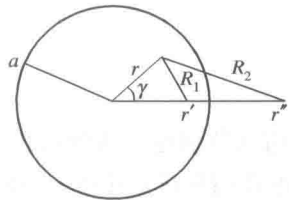


图 4-23 柱内区域格林函数

计算出界面上的  $\partial\varphi/\partial n'$ , 代入公式(4-98), 有

$$\varphi = -\epsilon \oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} dS' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\phi') \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \phi')} d\phi'$$

对于圆柱面上电位的具体形式, 代入上式积分后, 可求出圆柱内任意点的电位, 即使

对于不能得出解析解的情形,也可通过数值积分得到电位分布的数值解。

**例 4-19** 如果上题的圆柱面上的电位为  $\varphi(a, \phi) = U_0 \cos\phi$ , 求柱内的电位。

解:

$$\varphi(r) = \frac{U_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\phi' \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \phi')} d\phi' \quad (4-100)$$

首先证明恒等式  $\frac{1-k^2}{1-2k \cos\gamma + k^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n\gamma$  ( $|k| < 1$ )。证明过程如下。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n\gamma &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} k^n (e^{jn\gamma} + e^{-jn\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (ke^{j\gamma})^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (ke^{-j\gamma})^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{ke^{j\gamma}}{1 - ke^{j\gamma}} + \frac{1}{2} \frac{ke^{-j\gamma}}{1 - ke^{-j\gamma}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{k \cos\gamma + jk \sin\gamma}{1 - k \cos\gamma - jk \sin\gamma} + \frac{1}{2} \frac{k \cos\gamma - jk \sin\gamma}{1 - k \cos\gamma + jk \sin\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2k \cos\gamma - 2k^2}{1 - 2k \cos\gamma + k^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - k^2}{1 - 2k \cos\gamma + k^2} \end{aligned}$$

令  $k=r/a$ , 我们可以将式(4-100)改写为

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{U_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\phi' \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos(\phi - \phi')} d\phi' \\ &= \frac{U_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\phi' \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n(\phi - \phi') \right] d\phi' \\ &= \frac{U_0 r}{a} \cos\phi \end{aligned}$$

## 4.7 有限差分法

前几节讨论了求解拉普拉斯方程的解析法,但是对大多数实际问题往往边界形状复杂,很难用解析法求解,为此需使用数值计算法。目前已发展了许多有效的求解边值问题的数值方法。有限差分法是一种较易使用的数值方法。

用有限差分法计算时,选取所求区域有限个离散点,用差分方程代替各个点的偏微分方程。这样得到的任意一个点的差分方程是将该点的电位与其周围几个点相联系的代数方程。对于全部的待求点,就得到一个线性方程组。求解此线性方程组,即可求出待求区域内各点的电位。

本节简要说明有限差分法的基本原理(以二维拉普拉斯方程的第一类边值问题为例,其余各类问题可参阅有关的参考书)。

### 4.7.1 差分表示式

在  $xoy$  平面把所求解区域划分为若干相同的小正方形格子, 每个格子的边长都为  $h$ , 如图 4-24 所示。假设某顶点  $0$  上的电位是  $\varphi_0$ , 周围四个顶点的电位分别为  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $\varphi_3$  和  $\varphi_4$ 。将这几个点的电位用泰勒级数展开, 就有

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 h + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 h^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0 h^3 + K\end{aligned}\quad (4-101)$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \varphi_0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 h^2 \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0 h^3 + K\end{aligned}\quad (4-102)$$

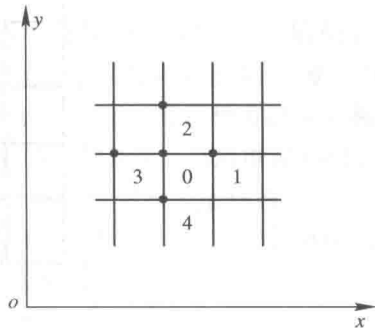


图 4-24 差分网格

当  $h$  很小时, 忽略四阶以上的高次项, 得

$$\varphi_1 + \varphi_3 = 2\varphi_0 + h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 \quad (4-103)$$

同理, 我们有

$$\varphi_2 + \varphi_4 = 2\varphi_0 + h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 \quad (4-104)$$

将式(4-103)与式(4-104)相加, 并考虑

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

可得

$$\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \quad (4-105)$$

上式表明, 任一点的电位等于它周围四个点电位的平均值。显然, 当  $h$  越小时, 计算就越精确。如果待求  $N$  个点的电位, 就需解含有  $N$  个方程的线性方程组。若点的数目较多, 用迭代法较为方便。

### 4.7.2 差分方程的数值解法

如前所述, 平面区域内有多少个节点, 就能得到多少个差分方程。当这些节点数目较大时, 使用迭代法求解差分方程组比较方便。

#### 1. 简单迭代法

用迭代法解二维电位分布时, 将包含边界在内的节点均以双下标  $(i, j)$  表示,  $i, j$  分别表示沿  $x, y$  方向的标号。次序是  $x$  方向从左到右,  $y$  方向从下到上, 如图 4-25 所示。我们用上标  $n$  表示某点电位的第  $n$  次的迭代值。由式(4-105)得出点  $(i, j)$  第  $n+1$  次电位的计算公式为

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n) \quad (4-106)$$

上式也叫简单迭代法, 它的收敛速度较慢。

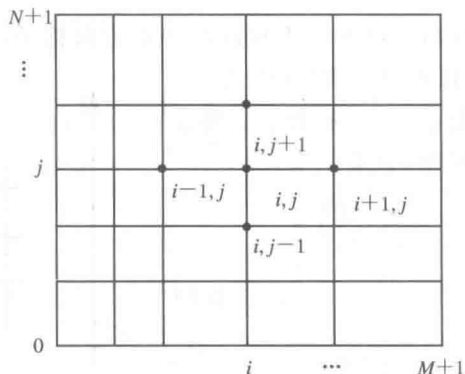


图 4-25 节点序号

计算时, 先任意指定各个节点的电位值, 作为零级近似(注意电位在某无源区域的极大、极小值总是出现在边界上, 理由请读者自行思考), 将零级近似值及其边界上的电位值代入式(4-106)求出一级近似值, 再由一级近似值求出二级近似值。依此类推, 直到连续两次迭代所得电位的差值在允许范围内时, 结束迭代。对于相邻两次迭代解之间的误差, 通常有两种取法: 一种是取最大绝对误差  $\max_{i,j} |\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}|$ ; 另一种是取算术平均误差

$\frac{1}{N} \sum_{i,j} |\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}|$ , 其中  $N$  是节点总数。

## 2. 塞德尔(Seidel)迭代法

通常为节约计算时间, 对简单迭代法要进行改进, 每当算出一个节点的高一次的近似值, 就立即用它参与其它节点的差分方程迭代, 这种迭代法叫做塞德尔迭代法。塞德尔迭代法的表达式为

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1}) \quad (4-107)$$

此式也称为异步迭代法。由于更新值的提前使用, 异步迭代法比简单迭代法收敛速度加快一倍左右, 存储量也小。

## 3. 超松弛迭代法

为了加快收敛速度, 常采用超松弛迭代法。计算时, 将某点的新老电位值之差乘以一个因子  $\alpha$  以后, 再加到该点的老电位值上, 作为这一点的新电位值  $\varphi_{i,j}^{n+1}$ 。超松弛迭代法的表达式为

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{ij}^n + \frac{\alpha}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} - 4\varphi_{ij}^n) \quad (4-108)$$

式中  $\alpha$  称为松弛因子, 其值介于 1 和 2 之间。当其值为 1 时, 超松弛迭代法就蜕变为塞德尔迭代法。

因子  $\alpha$  的选取一般只能依经验进行。但是对矩形区域, 当  $M$ 、 $N$  都很大时, 可以由如下公式计算最佳收敛因子  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = 2 - \pi \sqrt{\frac{2}{M^2} + \frac{2}{N^2}} \quad (4-109)$$

其中,  $M$ 、 $N$  分别是沿  $x$ 、 $y$  两个方向的内节点数。

对于其它形状的实际区域, 最佳收敛因子的表达式很复杂。实际计算中, 往往应用其近似值。通常采用以下几种方法处理。一是将区域等效为近似的矩形区域, 再依照上式计算  $\alpha_0$ ; 二是编制可以自动选择收敛因子的计算程序, 在起始迭代时取收敛因子为 1.5, 然后依迭代过程收敛速度的快慢使计算机按程序自动修正收敛因子; 第三种方法是, 起始迭代取收敛因子为 1, 以后逐渐增大, 并注意观察迭代过程的收敛速度, 当速度减小时, 停止增加收敛因子的值, 而在以后的迭代中, 用最后一个收敛因子的值作为最佳值。

**例 4-20** 设如图 4-26 所示的矩形截面的长导体槽, 宽为  $4h$ , 高为  $3h$ , 顶板与两侧绝缘, 顶板的电位为 10 V, 其余的电位为零, 求槽内各点的电位。

**解:** 将待求的区域分为 12 个边长为  $h$  的正方形网格, 含六个内点, 得出差分方程组:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(\varphi_2 + \varphi_3 + 10) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_4) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_5 + 10) \\ \varphi_4 &= \frac{1}{4}(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_6) \\ \varphi_5 &= \frac{1}{4}(\varphi_3 + \varphi_6 + 10) \\ \varphi_6 &= \frac{1}{4}(\varphi_4 + \varphi_5) \end{aligned}$$

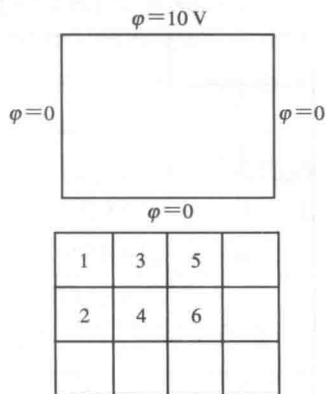


图 4-26 例 4-20 用图

解以上方程组, 得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{670}{161} \approx 4.1615 \text{ V} \\ \varphi_2 &= \frac{250}{161} \approx 1.5528 \text{ V} \\ \varphi_3 &= \frac{820}{161} \approx 5.0932 \text{ V} \\ \varphi_4 &= \frac{330}{161} \approx 2.0497 \text{ V} \\ \varphi_5 &= \frac{670}{161} \approx 4.1615 \text{ V} \\ \varphi_6 &= \frac{250}{161} \approx 1.5528 \text{ V} \end{aligned}$$

应注意, 以上结果是差分方程组的精确解, 但并不是待求格点电位的精确值, 这是因为差分方程组本身是原偏微分组的近似。以下用迭代法求解。简单迭代法、超松弛迭代法的结果分别列于表 4-1 和表 4-2。表 4-3 给出了松弛因子的影响。

表 4-1 简单迭代法

	1	2	3	4	5	6
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	2.5	0.0	2.5	0.0	2.5	0.0
2	3.125	0.625	3.75	0.625	3.125	0.625
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	4.1435	1.5363	5.0698	2.0242	4.1435	1.5363
11	4.1515	1.5419	5.0778	2.0356	4.1515	1.5419

表 4-2 超松弛迭代法( $\alpha=1.2$ )

	1	2	3	4	5	6
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	3.0	0.9	3.9	1.44	4.17	1.683
2	3.84	1.404	5.505	2.1546	4.1874	1.5660
3	4.1697	1.6165	5.1425	2.0666	4.1751	1.5593
4	4.1938	1.5548	5.1021	2.0516	4.1634	1.5526
5	4.1583	1.5520	5.0916	2.0485	4.1606	1.5522
6	4.1614	1.5526	5.0929	2.0496	4.1614	1.5529
7	4.161 35	1.552 76	5.093 13	2.049 71	4.161 52	1.552 80
精确值	4.161 491	1.552 795	5.093 168	2.049 689	4.161 491	1.552 795

表 4-3 松弛因子的影响

		1	2	3	4	5	6
7	A	4.161 35	1.552 73	5.093 08	2.049 65	4.161 46	1.552 78
	B	4.161 35	1.552 76	5.093 13	2.049 71	4.161 52	1.552 80
	C	4.161 64	1.553 08	5.093 78	2.049 68	4.161 59	1.552 38
8	A	4.161 46	1.552 78	5.093 15	2.049 68	4.161 49	1.552 79
	B	4.161 50	1.552 81	5.093 19	2.049 70	4.161 49	1.552 80
	C	4.161 74	1.552 79	5.093 10	2.049 53	4.161 30	1.552 81
9	A	4.161 49	1.552 79	5.093 17	2.049 69	4.161 49	1.552 80
	B	4.165 00	1.552 80	5.093 17	2.049 69	4.161 49	1.552 80
	C	4.161 39	1.552 71	5.093 05	2.049 67	4.161 51	1.552 79

注：A、B、C 分别取松弛因子 1.1、1.2、1.3。

## 小 结

(1) 静态场的许多问题可归结为给定边界条件下求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程的问题,也称为边值型问题。满足给定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的。

(2) 镜像法在待求解区域以外,用一些镜像电荷代替平面、圆柱面或球面上的感应电荷。它是一种等效方法。镜像法的主要步骤是确定镜像电荷的位置和大小。镜像法用于求解无限大导体(或介质)平面附近的点电荷、线电荷产生的场;位于无限长圆柱导体附近的平行线电荷产生的场;位于导体球附近的点电荷产生的场。

(3) 分离变量法是将一个多元函数表示成几个单变量函数的乘积,从而将偏微分方程分离为几个带分离常数的常微分方程的方法。用分离变量法求解边值型问题,首先要根据边界形状选择适当的坐标系;然后将偏微分方程在特定的坐标系下分离为几个常微分方程,并得出位函数的通解;最后由边界条件确定通解中的待定常数。

(4) 复变函数法是采用解析函数将一个平面内的复杂边界变换为另一个平面内的简单形状边界。由于解析函数的实部和虚部的等值线相互正交,因此可以分别选取实部或者虚部作为电位函数。使用复变函数法求解二维边值型问题的主要步骤是寻找变换函数。通常先研究、分析一些解析函数描绘的等值线图形,然后根据实际问题加以选用。

(5) 格林函数法将分布场源产生的位函数计算问题,简化为点源(也称单位场源)产生的位函数求解问题,再由点源的解求出分布源的解。点源在给定边界条件下的位函数就是格林函数。求解给定区域的格林函数可以用镜像法或者其它方法进行。

(6) 有限差分法应用差分原理将待求场域的空间离散化,把拉普拉斯方程化为各节点上的有限差分方程,并使用迭代法求解差分方程,从而可以求出节点上的位函数值。

## 习 题 四

4-1 一个点电荷  $Q$  与无穷大导体平面相距为  $d$ ,如果把它移动到无穷远处,需要做多少功?

4-2 一个点电荷放在直角导体内部(如图所示),求出所有镜像电荷的位置和大小。

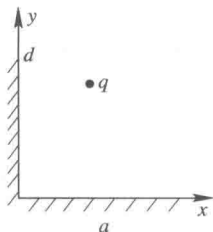
4-3 证明:一个点电荷  $q$  和一个带有电荷  $Q$  的半径为  $R$  的导体球之间的作用力为

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q + Rq/D}{D^2} - \frac{DRq}{(D^2 - R^2)^2} \right]$$

其中  $D$  是  $q$  到球心的距离( $D > R$ )。

4-4 两个点电荷  $+Q$  和  $-Q$  位于一个半径为  $a$  的接地导体球的直径的延长线上,分别距离球心  $D$  和  $-D$ 。

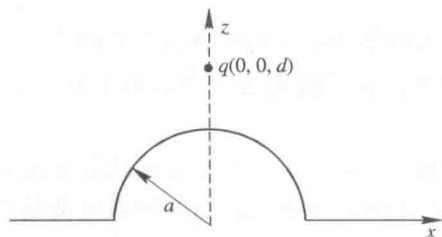
(1) 证明:镜像电荷构成一电偶极子,位于球心,偶极矩为  $2a^3 Q/D^2$ 。



习题 4-2 图

(2) 令  $Q$  和  $D$  分别趋于无穷, 同时保持  $Q/D^2$  不变, 计算球外的电场。

4-5 接地无限大导体平板上有一个半径为  $a$  的半球形突起, 在点  $(0, 0, d)$  处有一个点电荷  $q$  (如图所示), 求导体上方的电位。



习题 4-5 图

4-6 求截面为矩形的无限长区域  $(0 < x < a, 0 < y < b)$  的电位, 其四壁的电位为

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0$$

$$\varphi(0, y) = 0$$

$$\varphi(a, y) = \begin{cases} \frac{U_0 y}{b} & 0 < y \leq \frac{b}{2} \\ U_0 \left(1 - \frac{y}{b}\right) & \frac{b}{2} < y < b \end{cases}$$

4-7 一个截面如图所示的长槽, 向  $y$  方向无限延伸, 两侧的电位是零, 槽内  $y \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ , 底部的电位为

$$\varphi(x, 0) = U_0$$

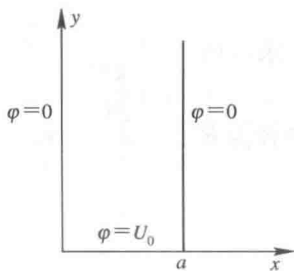
求槽内的电位。

4-8 若上题的底部的电位为

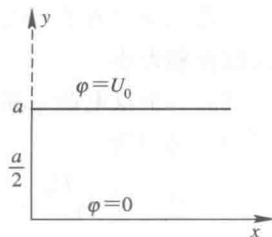
$$\varphi(x, 0) = U_0 \sin \frac{3\pi x}{a}$$

重新求槽内的电位。

4-9 一个矩形导体槽由两部分构成, 如图所示, 两个导体板的电位分别是  $U_0$  和零, 求槽内的电位。



习题 4-7 图



习题 4-9 图

4-10 将一个半径为  $a$  的无限长导体管平分成两半, 两部分之间互相绝缘, 上半  $(0 < \phi < \pi)$  接电压  $U_0$ , 下半  $(\pi < \phi < 2\pi)$  电位为零, 求管内的电位。



4-11 半径为  $a$  的无穷长的圆柱面上, 有密度为  $\rho_s = \rho_{s0} \cos\phi$  的面电荷, 求柱面内、外的电位。

4-12 将一个半径为  $a$  的导体球置于均匀电场  $E_0$  中, 求球外的电位、电场。

4-13 将半径为  $a$ 、介电常数为  $\epsilon$  的无限长介质圆柱放置于均匀电场  $E_0$  中, 设  $E_0$  沿  $x$  方向, 柱的轴沿  $z$  轴, 柱外为空气, 求任意点的电位、电场。

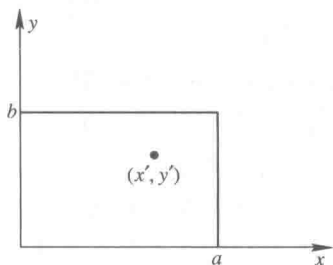
4-14 在均匀电场中, 放置一个半径为  $a$  的介质球, 若电场的方向沿  $z$  轴, 求介质球内、外的电位、电场(介质球的介电常数为  $\epsilon$ , 球外为空气)。

4-15 已知球面( $r=a$ )上的电位为  $\varphi = U_0 \cos\theta$ , 求球外的电位。

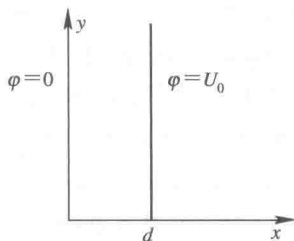
4-16 求无限长矩形区域( $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ )第一类边值问题的格林函数(即矩形槽的四周电位为零, 槽内有一与槽平行的单位线源, 求槽内电位, 如图所示)。

4-17 推导无限长圆柱区域内(半径为  $a$ )第一类边值问题的格林函数。

4-18 两个无限大导体平板间距离为  $d$ , 其间有体密度  $\rho = \rho_0 \left(\frac{x}{d}\right)$  的电荷, 极板的电位如图所示, 用格林函数法求极板之间的电位。



习题 4-16 图

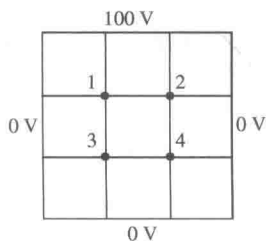


习题 4-18 图

4-19 分析复变函数  $w = z^2$  能够表示的静电场。

4-20 分析复变函数  $w = \arccos z$  能够表示哪些情形的静电场。

4-21 用有限差分法求图示区域中各个节点的电位。



习题 4-21 图

## 第五章 时变电磁场

在研究静态场的过程中,我们得出结论:电荷产生静电场,运动电荷或者恒定电流产生静磁场。静电场是保守场,因为静电场的旋度为零。静磁场是连续的,因为其散度是零。即使不存在静磁场,静电场也能够存在,反之亦然。电场和磁场是独立地存在着的静态场,因而可以分开研究。

在这一章我们证明时变磁场能够产生时变电场,将时变磁场产生的电场称为感应电场(an induced electric field),也将强调感应电场不是保守场这一事实。事实上,感应电场沿封闭回路的线积分被称为感应电动势(electro-motive force)。我们也将发现时变电场(a time-varying electric field)产生时变磁场(a time-varying magnetic field)。简单叙述,如果在一个区域中存在时变电场(时变磁场),那么该区域中也存在时变磁场(时变电场)。时变场中,电场和磁场不再互相独立,时变电场和时变磁场互相激发,互相转化,构成了统一的时变电磁场(time-varying electromagnetic fields)。描述电场与磁场关系的方程组称为麦克斯韦方程(Maxwell's equations),因为 James Clerk Maxwell 用公式简洁地表达了时变电场与时变磁场的关系。显然,麦克斯韦方程组的公式化,也是高斯、法拉第和安培(Gauss, Faraday and Ampère)著名研究成果的发展。

我们通过阐明作为实验事实的法拉第电磁感应定律,开始我们的研究。本章主要介绍时变电磁场的下列内容:

- 法拉第电磁感应定律
- 位移电流和全电流连续性原理
- 描述宏观电磁现象的麦克斯韦方程组
- 时变电磁场的边界条件
- 电磁场的能量——电磁能量
- 正弦电磁场
- 波动方程
- 时变场中的位函数

### 5.1 法拉第电磁感应定律

静态电场和磁场的场源分别是静止的电荷和恒定电流(等速运动的电荷)。它们是相互

独立的,二者的基本方程之间并无联系。然而,随时间变化的电场和磁场是相互联系的。1831年英国科学家法拉第(M. Faraday)最早发现了时变电场和磁场间的这一深刻联系,即时变磁场产生时变电场。如果在磁场中有导线构成的闭合回路 $l$ ,当穿过由回路 $l$ 所限定的曲面 $S$ 的磁通发生变化时,回路中就要产生感应电动势,从而引起感应电流。法拉第定律给出了感应电动势与磁通时变率之间的正比关系。感应电动势的实际方向可由楞次(H. E. Lenz)定律说明:感应电动势在导电回路中引起的感应电流的方向是使它所产生的磁场阻止回路中磁通的变化。法拉第定律和楞次定律的结合就是法拉第电磁感应定律,其数学表达式为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-1)$$

式中: $\mathcal{E}$ 为感应电动势; $\Phi$ 为穿过曲面 $S$ 和回路 $l$ 铰链的磁通。磁通 $\Phi$ 的正方向与感应电动势 $\mathcal{E}$ 的正方向成右手螺旋关系,如图5-1所示。此外,式(5-1)中的 $\Phi$ 是所谓全磁通(亦称磁链)。当回路线圈不止一匝时,例如一个 $N$ 匝线圈,可以把它看成是由 $N$ 个一匝线圈串联而成的,其感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \Phi_i \right) \quad (5-2)$$

如果定义非保守感应场 $\mathbf{E}_{ind}$ 沿闭合路径 $l$ 的积分为 $l$ 中的感应电动势,那么式(5-1)可改写为

$$\oint_l \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5-3)$$

如果空间同时还存在由静止电荷产生的保守电场 $\mathbf{E}_c$ ,则总电场 $\mathbf{E}$ 为两者之和,即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{ind}$ 。由于

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l}$$

所以式(5-3)也可改写为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-4)$$

由于式(5-4)中没有包含回路本身的特性,所以可将式(5-4)中的 $l$ 看成是任意闭合路径,而不一定是导电回路。式(5-4)就是推广了的法拉第电磁感应定律,它是用场量表示的法拉第电磁感应定律的积分形式,适用于所有情况。引起与闭合回路铰链的磁通发生变化的原因可以是磁感应强度 $\mathbf{B}$ 随时间的变化,也可以是闭合回路 $l$ 自身的运动(大小、形状、位置的变化)。

首先考虑静止回路中的感应电动势。所谓静止回路是指回路相对磁场没有机械运动,只是磁场随时间发生变化,于是式(5-4)变为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-5)$$

利用矢量斯托克斯(Stokes)定理,上式可写为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-6)$$

上式对任意面积均成立,所以

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-7)$$

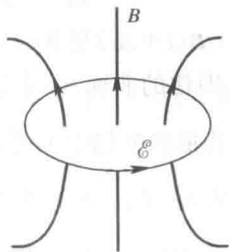


图 5-1 法拉第电磁感应定律

式(5-7)是法拉第电磁感应定律的微分形式,它表明随时间变化的磁场将激发电场。时变电场是一有旋场,随时间变化的磁场是该时变电场的源。通常称该电场为感应电场,以区别于由静止电荷产生的库仑场。感应电场是旋涡场,而库仑场是无旋场即保守场。

接着考察运动系统的感应电动势。不失一般性,设回路相对磁场有机械运动,且磁感应强度也随时间变化。设回路  $l$  以速度  $\mathbf{v}$  在  $\Delta t$  时间内从  $l_a$  的位置移到  $l_b$  的位置,  $l$  由  $l_a$  的位置运动到  $l_b$  的位置时扫过的体积  $V$  的侧面积是  $S_c$ , 如图 5-2 所示。穿过该回路的磁通量的变化率为

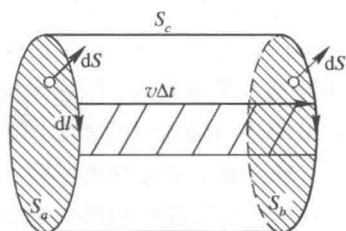


图 5-2 磁场中的运动回路

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{S_b} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_a} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (5-8)$$

式中:  $\mathbf{B}(t + \Delta t)$  是在时间  $t + \Delta t$  时刻由  $l_b$  围住的曲面  $S_b$  上的磁感应强度;  $\mathbf{B}(t)$  是在  $t$  时刻由  $l_a$  围住的曲面  $S_a$  上的磁感应强度。

若把静磁场中的磁通连续性原理  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  推广到时变场,那么在时刻  $t + \Delta t$  通过封闭面  $S = S_a + S_b + S_c$  的磁通量为零,因此

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_b} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_a} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_c} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5-9)$$

将  $\mathbf{B}(t + \Delta t)$  展开成泰勒级数,有

$$\mathbf{B}(t + \Delta t) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t + \dots \quad (5-10)$$

从而

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_a} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_a} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} + \Delta t \int_{S_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \dots \\ \int_{S_c} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_c} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} + \Delta t \int_{S_c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

由于侧面积  $S_c$  上的面积元  $d\mathbf{S} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$ , 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,有

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} &= \Delta t \int_{l_a} \mathbf{B}(t) \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) + \Delta t^2 \int_{l_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) + \dots \\ &= -\Delta t \int_{l_a} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} + \Delta t^2 \int_{l_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) + \dots \end{aligned} \quad (5-12)$$

将式(5-12)、(5-11)代入式(5-9),求得

$$\int_{S_b} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_a} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = \Delta t \left[ \int_{S_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{l_a} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \right] + \Delta t \text{ 的高次项} \quad (5-13)$$

因此,  $l$  由  $l_a$  的位置运动到  $l_b$  的位置时,穿过该回路的磁通量的时变率为

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$$

这样运动回路中的感应电动势可表示为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_l \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5-14)$$

式(5-14)中  $\mathbf{E}'$  是和回路一起运动的观察者所看到的场。此式表明运动回路中的感应电动势由两部分组成：一部分是由时变磁场引起的(称为感生电动势)；另一部分是由回路运动引起的(称为动生电动势)。式(5-14)可改写为

$$\oint_l (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-15)$$

设静止观察者所看到的电场强度为  $\mathbf{E}$ ，那么  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。因此，在运动回路中，有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-16)$$

或

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-17)$$

式(5-16)和式(5-17)分别是法拉第电磁感应定律的积分形式和微分形式。至此，我们已经知道电场的源有两种：静止电荷和时变磁场。

## 5.2 位移电流

法拉第电磁感应定律表明：时变磁场能激发电场。那么，时变电场能不能激发磁场呢？回答是肯定的。法拉第在 1843 年实验证实电荷守恒定律在任何时刻都成立。电荷守恒定律的数学描述就是电流连续性方程：

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (5-18)$$

式中  $\mathbf{J}$  是电流体密度，它的方向就是它所在点上的正电荷流动的方向，它的大小就是在垂直于电流流动方向的单位面积上每单位时间内通过的电荷量(单位是  $\text{A}/\text{m}^2$ )。因此，式(5-18)表明：每单位时间内流出包围体积  $V$  的闭曲面  $S$  的电荷量等于  $S$  面内每单位时间所减少的电荷量  $-dQ/dt$ 。利用散度定理(也称为高斯公式)

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

将式(5-18)用体积分表示，对静止体积有

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho dV = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

上式对任意体积  $V$  均成立，故有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5-19)$$

上式是电流连续性方程的微分形式。

静态场中的安培环路定律之积分形式和微分形式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-20a)$$

和

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5-20b)$$

此外, 对于任意矢量  $\mathbf{A}$ , 其旋度的散度恒为零, 即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

因此, 对式(5-20b)两边取散度后有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (5-21)$$

比较式(5-19)和式(5-21)可见, 前者和后者相矛盾。麦克斯韦首先注意到了这一矛盾, 于 1862 年提出位移电流概念, 并认为位移电流和电荷恒速运动形成的电流以同一方式激发磁场。也就是把  $\partial\rho/\partial t$  加到式(5-21)的右边, 以使式(5-21)与式(5-19)相容:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

在承认

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_V \rho dV, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

也适用于时变场的前提下, 则有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

由上式可得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5-22)$$

式(5-22)与式(5-20b)的不同是引入了因子  $\partial \mathbf{D}/\partial t$ , 它的量纲是  $\text{A}/\text{m}^2$ , 即此因子具有电流密度的量纲, 故称之为位移电流密度  $\mathbf{J}_d$ , 即

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5-23)$$

由于

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

所以位移电流

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (5-24)$$

上式说明, 在一般介质中位移电流由两部分构成: 一部分是由电场随时间的变化所引起的, 它在真空中同样存在, 它并不代表任何形式的电荷运动, 只是在产生磁效应方面和一般意义下的电流等效; 另一部分是由于极化强度的变化所引起的, 可称为极化电流, 它代表束缚于原子中的电荷运动。式(5-22)的重要意义在于: 除传导电流外, 时变电场也激发磁场, 它称为安培—麦克斯韦全电流定律(推广的安培环路定律)。对式(5-22)应用斯托克斯定律, 便得到其积分形式:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5-25)$$

该式表明, 磁场强度沿任意闭合路径的积分等于该路径所包围曲面上的全电流。

位移电流的引入扩大了电流的概念。平常所说的电流是电荷作有规则的运动形成的。在导体中, 它就是自由电子的定向运动形成的传导电流。设导电媒质的电导率为  $\sigma(\text{S}/\text{m})$ , 其传导电流密度就是  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ 。在真空或气体中, 带电粒子的定向运动也形成电流, 称为运

流电流。设电荷运动速度为  $\mathbf{v}$ ，其运流电流密度为  $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$ 。位移电流并不代表电荷的运动，这与传导电流及运流电流不同。传导电流、运流电流和位移电流之和称为全电流，即

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d \quad (5-26)$$

可见式(5-22)中的  $\mathbf{J}$  应包括  $\mathbf{J}_c$  和  $\mathbf{J}_v$ 。但是， $\mathbf{J}_c$  和  $\mathbf{J}_v$  分别存在于不同媒质中。对于固体导电媒质( $\sigma \neq 0$ )，此时只有传导电流，没有运流电流，所以  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c$ ， $\mathbf{J}_v = 0$ 。对式(5-22)取散度知

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) = 0$$

对任意封闭曲面  $S$  有

$$\oint_S (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_d) dV = 0$$

即

$$I_c + I_v + I_d = 0 \quad (5-27)$$

式(5-27)表明，穿过任意封闭面的各类电流之和恒为零，这就是全电流连续性原理。将其应用于只有传导电流的回路中，可知节点处传导电流的代数和为零(流出的电流取正号，流入的电流取负号)，这就是基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)电流定律： $\sum I = 0$ 。

为了直观地说明位移电流的概念以及全电流连续性原理，参看图 5-3 所示的电路。电容器  $C$  通过导线连接到交流电源  $U_s(t)$ ，设

$$U_s(t) = U_0 \cos \omega t$$

显然导线中的传导电流

$$I_c = \int_{S_c} \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_c} \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

式中  $S_c$  为导线横截面， $d\mathbf{S}$  的方向为电流流过导线的方向。

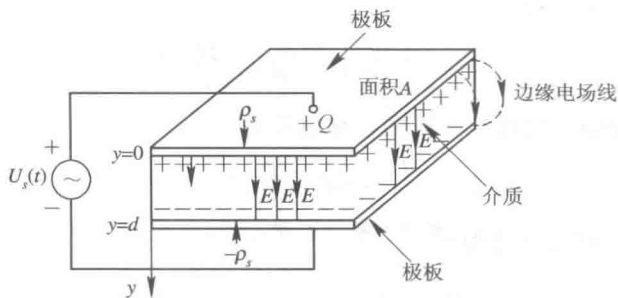


图 5-3 交流电源与平行板电容相连构成的回路

电容器极板上有电荷  $Q = CU_s$ ， $C$  为电容器的电容量。对于平行板电容器，电容  $C = \frac{\epsilon A}{d}$ ，其中  $A$  为极板面积， $d$  为两平板间距， $\epsilon$  为两平行极板间填充介质的介电常数， $U_s$  为电容器两极板间的电压。 $Q$  随时间的变化率即极板上的电流：

$$I_q = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_s}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_0 \cos \omega t) = -CU_0 \omega \sin \omega t$$

这里我们假定导线的电导率  $\sigma$  很大(比如理想导体)，这样导线上的电压降可以忽略，极板两端的电压等于源电压。由源、导线、电容器构成的电流回路，其上通过的电流应连

续,导线中的电流要等于极板上的电流  $I_q$ ,那么电容器中的电流是什么呢?位移电流的引入可解释回路电流连续性的问题。两极板上加电压  $U_s$  后,在电容器空间所产生的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_y \frac{E_s}{d} = \mathbf{a}_y \frac{U_0}{d} \cos \omega t$$

$\mathbf{E}$  的大小为  $E_s/d$ , 方向在  $\mathbf{a}_y$  方向,总的位移电流  $I_d$  为

$$\begin{aligned} I_d &= \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{a}_y \frac{\epsilon U_0}{d} \cos \omega t \right) \cdot (\mathbf{a}_y dS) \\ &= -\frac{\epsilon A}{d} U_0 \omega \sin \omega t = -CU_0 \omega \sin \omega t \end{aligned}$$

因为  $d\mathbf{S}$  方向为极板法线方向,故  $d\mathbf{S} = \mathbf{a}_y dS$ ,  $C$  为平行板电容器的电容。显然这个电流  $I_d$  与极板上的电流  $I_q$  刚好相等。

**例 5-1** 计算铜中的位移电流密度和传导电流密度的比值。设铜中的电场为  $E_0 \sin \omega t$ , 铜的电导率  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\epsilon \approx \epsilon_0$ 。

**解:** 铜中的传导电流大小为

$$J_c = \sigma E = \sigma E_0 \sin \omega t$$

铜中的位移电流大小为

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \omega E_0 \cos \omega t$$

因此,位移电流密度与传导电流密度的振幅比值为

$$\frac{J_d}{J_c} = \frac{\omega \epsilon}{\sigma} = \frac{2\pi f \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{5.8 \times 10^7} = 9.6 \times 10^{-19} f$$

**例 5-2** 证明通过任意封闭曲面的传导电流和位移电流的总量为零。

**解:** 根据麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

可知,通过任意封闭曲面的传导电流和位移电流为

$$\oint_S \left( \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

上式右边应用散度定理可以写为

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV = 0$$

而左边的面积分为

$$\oint_S \left( \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = I_c + I_d = I$$

故通过任意封闭曲面的传导电流和位移电流的总量  $I$  为零。

**例 5-3** 在坐标原点附近区域内,传导电流密度为

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r 10r^{-1.5} \quad (\text{A/m}^2)$$

试求:

(1) 通过半径  $r=1 \text{ mm}$  的球面的电流值;

(2) 在  $r=1 \text{ mm}$  的球面上电荷密度的增加率;



(3) 在  $r=1\text{ mm}$  的球内总电荷的增加率。

解: (1) 根据电流密度的定义有

$$\begin{aligned} I &= \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 10r^{-1.5} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \Big|_{r=1\text{ mm}} \\ &= 40\pi r^{0.5} \Big|_{r=1\text{ mm}} = 3.9738\text{ A} \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \cdot 10r^{-1.5}) = 5r^{-2.5}$$

由电流连续性方程式(5-19), 得

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{r=1\text{ mm}} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \Big|_{r=1\text{ mm}} = -1.58 \times 10^8 \text{ (A/m}^2\text{)}$$

(3) 在  $r=1\text{ mm}$  的球内总电荷的增加率:

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -3.97\text{ A}$$

例 5-4 在无源的自由空间中, 已知磁场强度为

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y 2.63 \times 10^{-6} \cos(3 \times 10^9 t - 10z) \text{ (A/m)}$$

求位移电流密度  $\mathbf{J}_d$ 。

解: 无源的自由空间中传导电流为零, 即  $\mathbf{J}=0$ , 式(5-22)变为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\mathbf{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\mathbf{e}_x 2.63 \times 10^{-4} \sin(3 \times 10^9 t - 10z) \text{ (A/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

## 5.3 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是在对宏观电磁现象的实验规律进行分析总结的基础上, 经过扩充和推广而得到的。它揭示了电场与磁场之间, 以及电磁场与电荷、电流之间的相互关系, 是一切宏观电磁现象所遵循的普遍规律。它有深刻而丰富的物理含义, 是电磁运动规律最简洁的数学语言描述。所以, 麦克斯韦方程组是电磁场的基本方程, 它在电磁学中的地位等同于力学中的牛顿定律, 是我们分析研究电磁问题的基本出发点。

### 5.3.1 麦克斯韦方程组

依据前两节的分析结果, 现在可以写出描述宏观电磁场现象基本特性的一组微分方程及其名称如下:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{全电流定律} \quad (5-28a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{法拉第电磁感应定律} \quad (5-28b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{磁通连续性原理} \quad (5-28c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{高斯定理} \quad (5-28d)$$

称其为麦克斯韦方程组的微分形式。它们建立在库仑、安培、法拉第所提供的实验事实和麦克斯韦假设的位移电流概念的基础上,也把任何时刻在空间任一点上的电场和磁场的时空关系与同一时空点的场源联系在一起。方程组(5-28)所对应的积分形式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5-29a)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-29b)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5-29c)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dV \quad (5-29d)$$

从麦克斯韦方程组可见:

(1) 麦克斯韦方程式(5-28a)和(5-29a)是修正后的安培环路定律,表明电流和时变电场能激发磁场。麦克斯韦方程式(5-28b)和(5-29b)是法拉第电磁感应定律,表明时变磁场产生电场这一重要事实。这两个方程是麦克斯韦方程的核心,说明时变电场和时变磁场互相激发,时变电磁场可以脱离场源独立存在,在空间形成电磁波。麦克斯韦导出了电磁场的波动方程,并发现这种电磁波的传播速度与已测出的光速是一样的。他进而推断,光也是一种电磁波,并预言可能存在与可见光不同的其它电磁波。这一著名预见后来在1887年为德国物理学家赫兹(H. R. Hertz)的实验所证实,并导致马可尼(G. Marconi)在1895年和波波夫(A. C. Popov)在1896年成功地进行了无线电报传送实验,从而开创了人类应用无线电波的新纪元。

(2) 麦克斯韦方程式(5-28c)、(5-29c)表示磁通连续性,即空间的磁力线既没有起点也没有终点。从物理意义上说,是空间不存在自由磁荷的结果,或者严格地说在人类研究所达到的区域中至今还没有发现自由磁荷。麦克斯韦方程式(5-28d)、(5-29d)是电场的高斯定理,现在它对时变电荷与静止电荷都成立。它表明电场是有通量源的场。

(3) 时变场中电场的散度和旋度都不为零,所以电力线起始于正电荷终止于负电荷;而磁场的散度恒为零,旋度不为零,所以磁力线是与电流交链的闭合曲线,并且磁力线与电力线两者还互相交链。但是,在远离场源的无源区域中,电场和磁场的散度都为零,这时电力线和磁力线将自行闭合,相互交链,在空间形成电磁波。

(4) 一般情况下,时变电磁场的场矢量和源既是空间坐标的函数,又是时间的函数。若场矢量不随时间变化(不是时间的函数),那么式(5-28)、式(5-29)退化为静态场方程。

(5) 在线性媒质中,麦克斯韦方程组是线性方程组,可以应用叠加原理。

应该指出,麦克斯韦方程组中的四个方程并不都是独立的。例如对方程式(5-28b)两边取散度:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

由于上式左边恒等于零, 所以得

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

如果我们假设过去或将来某一时刻,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  在空间每一点上都为零, 则  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  在任何时刻处处为零, 所以有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

即式(5-28c), 因此只能认为有三个独立的方程: 式(5-28a)、式(5-28b)和式(5-28d)。同理, 如果将方程式(5-28a)两边取散度, 代入方程式(5-28d), 那么可以导出:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

这就是电流连续性方程。由此可见, 电流连续性方程包含在麦克斯韦方程组中, 并且可以认为麦克斯韦方程组中的两个旋度方程式(5-28a)、式(5-28b)以及电流连续性方程是一组独立方程。我们进一步分析可以看到, 三个独立方程中有两个旋度方程和一个散度方程, 其中旋度方程是矢量方程, 而每一个矢量方程可以等价为三个标量方程, 再加上一个标量的散度方程, 则共有七个独立的标量方程。

由麦克斯韦方程组推导出电流连续性方程, 一方面表明麦克斯韦方程组的普遍性广泛到电荷守恒定律也被包含在内; 另一方面也表明场源  $\mathbf{J}$  和  $\rho$  是不完全独立的, 随意给定的  $\mathbf{J}$  和  $\rho$  有可能导致麦克斯韦方程组内部矛盾而无解。因此, 在实际的工程问题中, 尤其是无初值的时谐场情况, 常在给定场源  $\mathbf{J}$  条件下求解电磁场, 如正弦波的辐射问题。反过来, 只给定场源  $\rho$  则不行, 因为给定场源  $\rho$  用电流连续性方程只能确定  $\nabla \cdot \mathbf{J}$ , 而依据矢量场唯一性定理, 仅知道  $\mathbf{J}$  的散度并不能唯一确定  $\mathbf{J}$ , 因此也不能唯一地解出电磁场。

### 5.3.2 麦克斯韦方程的辅助方程——本构关系

在麦克斯韦方程组式(5-28a)~式(5-28d)中, 没有限定  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  之间的关系, 称为非限定形式。但是, 麦克斯韦方程中有  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{J}$  五个矢量和一个标量  $\rho$ , 每个矢量各有三个分量, 也就是说总共有 16 个标量, 而独立的标量方程只有七个。因此, 仅由方程式(5-28a)~式(5-28d)还不能完全确定四个场矢量  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$ , 我们还需要知道  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  之间的关系。为求解这一组方程, 我们必须另外再提供九个独立的标量方程。这九个标量方程就是描述电磁媒质与场矢量之间关系的本构关系, 它们作为辅助方程与麦克斯韦方程一起构成一个自身一致的方程组。

一般而言, 表征媒质宏观电磁特性的本构关系为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (5-30)$$

对于各向同性的线性媒质, 式(5-30)可以写为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

式中  $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$  是描述媒质宏观电磁特性的一组参数, 分别称为媒质的介电常数、磁导率和电导率。在真空(或空气)中,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ 。 $\sigma = 0$  的媒质称为理想介质,  $\sigma \rightarrow \infty$  的媒质称为理想导体,  $\sigma$  介于两者之间的媒质统称为导电媒质。有关线性、各向同性、均匀、色散媒质的定义如下: 若媒质参数与场强大小无关, 称为线性媒质; 若媒质参数与场强方向无关, 称为各向同性媒质; 若媒质参数与位置无关, 称为均匀媒质; 若媒质参数与场强频率无关, 称为非色散媒质, 否则称为色散媒质。此外, 线性、均匀、各向同性的媒质也称为简单媒质。

### 5.3.3 洛伦兹力

麦克斯韦方程组说明了场源  $\mathbf{J}$  和  $\rho$  如何激发电磁场, 即电磁场如何受电流和电荷的作用。然而, 在实际的电磁场问题中, 电流密度  $\mathbf{J}$  和电荷密度  $\rho$  往往也不能事先给定, 它们也受到电磁场的反作用。因此, 还需要另外的基本方程来描述这种反作用。这个基本方程就是洛伦兹力公式。

电荷(运动或静止)激发电磁场, 电磁场反过来对电荷有作用力。当空间同时存在电场和磁场时, 以恒速  $\mathbf{v}$  运动的点电荷  $q$  所受的力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

如果电荷是连续分布的, 其密度为  $\rho$ , 则电荷系统所受的电磁场力密度为

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

上式称为洛伦兹力公式。近代物理学实验证实了洛伦兹力公式对任意运动速度的带电粒子都是适应的。麦克斯韦方程和洛伦兹力公式, 正确反映了电磁场的运动规律以及场与带电物质的相互作用规律, 构成了经典电磁理论的基础。

**例 5-5** 证明均匀导电媒质内部, 不会有永久的自由电荷分布。

**解:** 将  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$  代入电流连续性方程, 考虑到媒质均匀, 有

$$\nabla \cdot (\sigma\mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

由于

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \rho, \quad \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

将后式代入前式可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \rho = 0$$

所以任意瞬间的电荷密度为

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} \cdot t}$$

式中  $\rho_0$  是  $t=0$  时的电荷密度。式中的  $\epsilon/\sigma = \tau$  具有时间的量纲, 称为导电媒质的弛豫时间或时常数。它是电荷密度减少到其初始值的  $1/e$  所需的时间。由上式可见, 电荷按指数规律减少, 最终流至并分布于导体的外表面。

**例 5-6** 已知在无源的自由空间中:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

其中  $E_0$ 、 $\beta$  为常数, 求  $\mathbf{H}$ 。

**解:** 所谓无源, 就是所研究区域内没有场源(电流和电荷), 即  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ,  $\rho = 0$ 。

将  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega t - \beta z) = \mathbf{e}_x E_x$  代入麦克斯韦方程式(5-28b), 可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\mathbf{e}_y E_0 \beta \sin(\omega t - \beta z) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_y H_y + \mathbf{e}_z H_z)$$

由上式可以写出：

$$H_x = 0, H_z = 0$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = E_0 \beta \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0 \beta}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \frac{E_0 \beta}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - \beta z)$$

## 5.4 时变电磁场的边界条件

麦克斯韦方程的微分形式只适用于场矢量的各个分量处处可微的区域。实际问题所涉及的场域中，往往有几种不同的媒质。媒质分界面两侧，各媒质的电磁参数不同。分界面上有束缚面电荷、面电流，还可能有自由面电荷、面电流。在这些面电荷、面电流的影响下，场矢量越过分界面时可能不连续，这时必须用边界条件来确定分界面上电磁场的特性。边界条件是描述场矢量越过分界面时场矢量变化规律的一组场方程，它是将麦克斯韦方程的积分形式应用于媒质的分界面，当方程中各种积分区域无限缩小且趋于分界面上的一个点时，所得方程的极限形式。

取两种相邻媒质分界面的任一横截面，如图 5-4 所示。设  $\mathbf{n}$  是分界面上任意点处的法向单位矢量； $\mathbf{F}$  表示该点的某一场矢量（例如  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\cdots$ ），它可以分解为沿  $\mathbf{n}$  方向和垂直于  $\mathbf{n}$  方向的两个分量。因为矢量恒等式

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})$$

所以

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \quad (5-32)$$

上式第一项沿  $\mathbf{n}$  方向，称为法向分量；第二项垂直于  $\mathbf{n}$  方向，切于分界面，称为切向分量。下面分别讨论场矢量的法向分量和切向分量越过分界面时的变化规律。

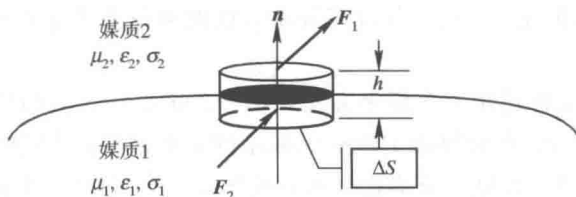


图 5-4 法向分量边界条件

### 5.4.1 一般情况

法向分量的边界条件可由麦克斯韦方程式(5-29c)、(5-29d)导出。参看图 5-4, 设  $\mathbf{n}$  自媒质 1 指向媒质 2。在分界面上取一很小的截面为  $\Delta S$ 、高为  $h$  的扁圆柱体封闭面, 圆柱体上下底面分别位于分界面两侧且紧贴分界面( $h \rightarrow 0$ )。将式(5-29d)用于此圆柱体, 计算穿出圆柱体表面的电通量时, 考虑到  $\Delta S$  很小, 可以认为底面上的电位移矢量是均匀的, 并以  $\mathbf{D}_1$ 、 $\mathbf{D}_2$  分别表示媒质 1 及媒质 2 中圆柱体底面上的电位移矢量; 同时, 因为  $h \rightarrow 0$ , 而电位移矢量有限, 所以圆柱体侧面上的积分可以不计。从而得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta S \mathbf{n} + \mathbf{D}_1 \cdot (-\Delta S \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \Delta S$$

如果分界面的薄层内有自由电荷, 则圆柱面内包围的总电荷为

$$Q = \int_V \rho \, dV = \lim_{h \rightarrow 0} \rho h \Delta S = \rho_s \Delta S$$

由上面两式, 得电位移矢量的法向分量边界条件的矢量形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (5-32a)$$

或者标量形式为

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (5-32b)$$

若分界面上没有自由面电荷, 则有

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (5-33)$$

然而  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , 所以

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (5-34)$$

综上所述, 如果分界面上有自由面电荷, 那么电位移矢量  $\mathbf{D}$  的法向分量  $D_n$  越过分界面时不连续, 有一等于面电荷密度  $\rho_s$  的突变。如  $\rho_s = 0$ , 则法向分量  $D_n$  连续; 但是, 分界面两侧的电场强度矢量的法向分量  $E_n$  不连续。

同理, 将式  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  用于图 5-4 的圆柱体, 计算穿过圆柱体封闭面的磁通量, 可以得到磁感应强度矢量的法向分量的矢量形式的边界条件为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (5-35a)$$

或者标量形式的边界条件:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5-35b)$$

由于  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , 因此

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (5-36)$$

由式可见, 越过分界面时磁感应强度矢量的法向分量  $B_n$  连续, 磁场强度矢量的法向分量  $H_n$  不连续。值得注意的是, 在具有相同磁导率  $\mu$  的两种电介质交界面上, 其磁场强度的法向分量  $H_n$  连续。

切向分量的边界条件可由麦克斯韦方程式(5-29a)、(5-29b)导出。取相邻媒质的任一截面, 如图 5-5 所示。在分界面上取一无限小的矩形回路, 其宽度为  $\Delta l$ , 上下两底边分别位于分界面两侧并且均紧贴于分界面, 侧边长度  $h \rightarrow 0$ 。设  $\mathbf{n}$  (由媒质 1 指向媒质 2)、 $\mathbf{l}$  分别是  $\Delta l$  中点处分界面的法向单位矢量和切向单位矢量,  $\mathbf{b}$  是垂直于  $\mathbf{n}$  且与矩形回路成右手螺旋关系的单位矢量, 三者的关系为

$$l = b \times n \quad (5-37)$$

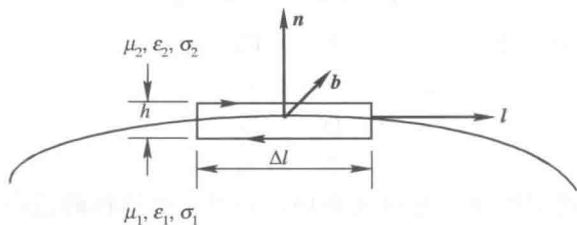


图 5-5 切向分量边界条件

将麦克斯韦方程

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

用于图 5-5 所示的矩形回路。因  $h \rightarrow 0$ ，如分界面处磁场强度  $\mathbf{H}$  有限，则  $\mathbf{H}$  在回路侧边上的积分可以不计；同时因  $\Delta l$  很小，所以

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \mathbf{H}_2 \cdot \Delta l + \mathbf{H}_1 \cdot (-\Delta l) = l \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l \\ &= \mathbf{b} \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l \end{aligned}$$

上式中  $\mathbf{H}_1$ 、 $\mathbf{H}_2$  分别表示媒质 1 与媒质 2 中的磁场强度矢量，并且使用了式(5-37)。因为  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  有限而  $h \rightarrow 0$ ，所以

$$\int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{b} h \Delta l = 0$$

如果分界面的薄层内有自由电流，则在回路所围的面积上，有

$$\int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{b} h \Delta l = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{b} \Delta l$$

综合以上三式得

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{b}$$

$\mathbf{b}$  是任意单位矢量，且  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$  与  $\mathbf{J}_s$  共面(均切于分界面)，所以

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (5-38a)$$

依据式(5-32)，上式可以写为

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{n}$$

式(5-38a)的标量形式为

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s \quad (5-38b)$$

如果分界面处没有自由面电流，那么有

$$H_{1t} = H_{2t}$$

由上式可以获得

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

综上所述：如分界面处有自由面电流，那么越过分界面时，磁场强度的切向分量不连续，否则磁场强度的切向分量连续；但是磁感应强度的切向分量不连续。也应注意，在具有相同导磁率的电介质交界面上，其磁感应强度的切向分量  $B_t$  连续。

同理，将麦克斯韦方程式(5-29b)用于图 5-5，可得电场强度的切向分量的边界条件

的矢量形式和标量形式如下:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (5-39a)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (5-39b)$$

由式(5-39b)可得

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

由上可见, 电场强度的切向分量越过分界面时连续, 电位移的切向分量越过分界面时不连续。

必须指出, 对于无初值的时变场, 从切向分量的边界条件和边界上的电流连续性方程可以导出法向分量的边界条件, 从这个意义上讲分界面上的边界条件不是独立的。可以证明, 在无初值的时变场条件下, 只要电场强度和磁场强度的切向分量边界条件满足式(5-38a)和式(5-39a), 那么磁感应强度和电位移的法向分量边界条件式(5-35a)和式(5-32a)必然成立。上面列出的一般形式的时变电磁场边界条件中, 自由面电流密度和自由面电荷密度满足边界上的电流连续性方程:

$$\nabla_t \cdot \mathbf{J}_s + (J_{1n} - J_{2n}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (5-40)$$

式中 $\nabla_t$ 表示对与分界面平行的坐标量求二维微分。

#### 5.4.2 两种特殊情况

下面我们讨论两种重要的特殊情况: 两种理想介质的边界——理想介质的边界和理想导体的边界。

理想介质是指 $\sigma=0$ 的情况, 即无欧姆损耗的简单媒质。在两种理想介质的分界面上没有自由面电流和自由面电荷存在, 即 $\mathbf{J}_s=\mathbf{0}$ ,  $\rho_s=0$ 。从而得相应的边界条件如下:

矢量形式的边界条件为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$$

它们相应的标量形式为

$$H_{2t} - H_{1t} = 0$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 0$$

理想导体是指 $\sigma \rightarrow \infty$ , 所以在理想导体内部不存在电场。此外, 在时变条件下, 理想导体内部也不存在磁场。故在时变条件下, 理想导体内部不存在电磁场, 即所有场量为零。设 $\mathbf{n}$ 是理想导体的外法向矢量,  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 为理想导体外部的电磁场, 那么理想导体表面的边界条件为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s$$

由此可见,电力线垂直于理想导体表面,磁力线平行于理想导体表面。

**例 5-7** 设  $z=0$  的平面为空气与理想导体的分界面,  $z<0$  一侧为理想导体,分界面处的磁场强度为

$$\mathbf{H}(x, y, 0, t) = \mathbf{e}_x H_0 \sin ax \cos(\omega t - ay)$$

试求理想导体表面上的电流分布、电荷分布以及分界面处的电场强度。

**解:** 根据理想导体分界面上的边界条件,可求得理想导体表面上的电流分布为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x H_0 \sin ax \cos(\omega t - ay) \\ &= \mathbf{e}_y H_0 \sin ax \cos(\omega t - ay) \end{aligned}$$

由分界面上的电流连续性方程式(5-40),有

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} [H_0 \sin ax \cos(\omega t - ay)] = a H_0 \sin ax \sin(\omega t - ay) \\ \rho_s &= \frac{a H_0}{\omega} \sin ax \cos(\omega t - ay) + c(x, y) \end{aligned}$$

假设  $t=0$  时,  $\rho_s=0$ , 由边界条件  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}=\rho_s$  以及  $\mathbf{n}$  的方向可得

$$\mathbf{D}(x, y, 0, t) = \mathbf{e}_z \frac{a H_0}{\omega} \sin ax [\cos(\omega t - ay) - \cos ay]$$

$$\mathbf{E}(x, y, 0, t) = \mathbf{e}_z \frac{a H_0}{\varepsilon_0 \omega} \sin ax [\cos(\omega t - ay) - \cos ay]$$

**例 5-8** 证明在无初值的时谐场条件下,法向分量的边界条件已含于切向分量的边界条件之中,即只有两个切向分量的边界条件是独立的。因此,在解电磁场边值问题时只需代入两个切向分量的边界条件就可以解决问题。

**解:** 在分界面两侧的媒质中,有

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t}$$

将矢量微分算符和场矢量都分解为切向分量和法向分量,即令

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n, \quad \nabla = \nabla_t + \nabla_n$$

于是有

$$(\nabla_t + \nabla_n) \times (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_n)$$

$$(\nabla_t \times \mathbf{E}_t)_n + (\nabla_t \times \mathbf{E}_n)_t + (\nabla_n \times \mathbf{E}_t)_t + (\nabla_n \times \mathbf{E}_n) = -\frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t}$$

由上式可见:

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -\frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t}, \quad \nabla_n \times \mathbf{E}_n = \mathbf{0}, \quad \nabla_n \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times \mathbf{E}_n = -\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t}$$

对于媒质 1 和媒质 2 有

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_{1t} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{1n}}{\partial t}, \quad \nabla_t \times \mathbf{E}_{2t} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{2n}}{\partial t}$$

上面两式相减得

$$\nabla_t \times (\mathbf{E}_{1t} - \mathbf{E}_{2t}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_{1n} - \mathbf{B}_{2n})$$

代入切向分量的边界条件:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad \text{即 } E_{1t} = E_{2t}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_{1n} - \mathbf{B}_{2n}) = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)] = 0$$

对于时谐场情况, 存在代换  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ , 于是有

$$j\omega[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)] = 0$$

由于  $\omega \neq 0$ , 故有

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad \text{即 } B_{1n} = B_{2n}$$

同理, 将式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

中的场量和矢性微分算符分解成切向分量和法向分量, 并且展开取其中的法向分量, 由于

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = \frac{\partial \mathbf{D}_n}{\partial t} + \mathbf{J}_n$$

此式对分界面两侧的媒质区域都成立, 故有

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_{1t} = \frac{\partial \mathbf{D}_{1n}}{\partial t} + \mathbf{J}_{1n}, \quad \nabla_t \times \mathbf{H}_{2t} = \frac{\partial \mathbf{D}_{2n}}{\partial t} + \mathbf{J}_{2n}$$

将两式相减并用

$$\mathbf{H}_{1t} = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_{2t} = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n}$$

代入, 得

$$\nabla_t \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n}] = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n}) + (\mathbf{J}_{1n} - \mathbf{J}_{2n})$$

再将切向分量的边界条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s$$

代入, 得

$$\nabla_t \times (\mathbf{J}_s \times \mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n}) + (\mathbf{J}_{1n} - \mathbf{J}_{2n})$$

即

$$\mathbf{J}_s(\nabla_t \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla_t \cdot \mathbf{J}_s) - \mathbf{n}(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)$$

考虑到

$$\nabla_t \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_t \cdot \mathbf{J}_s + (\mathbf{J}_{1n} - \mathbf{J}_{2n}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (\text{分界面处的电流连续性方程})$$

因此有

$$\mathbf{n} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)], \quad \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) - \rho_s] = 0$$

对于时谐场情况, 存在代换  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ , 于是有  $j\omega[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) - \rho_s] = 0$ 。由于  $\omega \neq 0$ , 故  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$  成立。

**例 5-9** 设区域 I ( $z < 0$ ) 的媒质参数  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\mu_{r1} = 1$ ,  $\sigma_1 = 0$ ; 区域 II ( $z > 0$ ) 的媒质参

数  $\epsilon_{r2}=5$ ,  $\mu_{r2}=2$ ,  $\sigma_2=0$ 。区域 I 中的电场强度为

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x [60 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) + 20 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \text{ (V/m)}$$

区域 II 中的电场强度为

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_x A \cos(15 \times 10^8 t - 5z) \text{ (V/m)}$$

试求:

- (1) 常数  $A$ ;
- (2) 磁场强度  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$ ;
- (3) 证明在  $z=0$  处  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$  满足边界条件。

解: (1) 在无耗媒质的分界面  $z=0$  处, 有

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x [60 \cos(15 \times 10^8 t) + 20 \cos(15 \times 10^8 t)]$$

$$= \mathbf{e}_x 80 \cos(15 \times 10^8 t)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_x A \cos(15 \times 10^8 t)$$

由于  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  恰好为切向电场, 根据边界条件式(5-39b), 得

$$A = 80 \text{ V/m}$$

- (2) 根据麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}$$

有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{E}_1 = +\mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_1}{\partial z} \\ &= +\mathbf{e}_y \frac{1}{\mu_0} [300 \sin(15 \times 10^8 t - 5z) - 100 \sin(15 \times 10^8 t + 5z)] \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_y [0.1592 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) - 0.0531 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \text{ (A/m)}$$

同理, 可得

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_y [0.1061 \cos(15 \times 10^8 t - 5z)] \text{ (A/m)}$$

- (3) 将  $z=0$  代入(2)中得  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$ :

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_y [0.106 \cos(15 \times 10^8 t)], \mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_y [0.106 \cos(15 \times 10^8 t)]$$

这里  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$  正好是分界面上的切向分量, 两者相等。由于分界面上  $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$ , 故  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$  满足边界条件。

## 5.5 时变电磁场的能量与能流

电磁场是一种物质, 并且具有能量。例如, 人们日常生活中使用的微波炉正是利用微波所携带的能量给食品加热的。赫兹的辐射实验证明了电磁场是能量的携带者。时变电场、磁场都要随时间变化, 空间各点的电场能量密度、磁场能量密度也要随时间变化。所以, 电磁能量按一定的分布形式储存于空间, 并随着电磁场的运动变化在空间传输, 形成电磁能流。表达时变电磁场中能量守恒与转换关系的定理称为坡印廷定理(The Poynting

Theorem), 该定理由英国物理学家坡印廷(John H. Poynting)在 1884 年最初提出, 它可由麦克斯韦方程直接导出。

假设电磁场存在于有耗的导电媒质中, 媒质的电导率为  $\sigma$ , 电场会在此有耗导电媒质中引起传导电流  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 。根据焦耳定律, 在体积  $V$  内由传导电流引起的功率损耗为

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV \quad (5-41)$$

这部分功率损耗表示转化为焦耳热能的能量损失。由能量守恒定律可知, 体积  $V$  内电磁能量必有一相应的减少, 或者体积  $V$  外有相应的能量补充以达到能量平衡。为了定量描述这一能量平衡关系, 我们进行如下推导。由麦克斯韦方程式(5-28a)得

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

代入式(5-41)得

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_V \left[ \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dV \quad (5-42)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

及麦克斯韦方程式(5-28b), 得

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

将上式代入式(5-42)得

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = - \int_V \left[ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] dV$$

利用散度定理上式可改写为

$$- \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \right) dV \quad (5-43)$$

这就是适合一般媒质的坡印廷定理。

利用矢量函数求导公式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

对于各向同性的线性媒质, 即  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , 可知

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right)$$

同理:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right)$$

将它们代入式(5-43), 并设体积  $V$  的边界对时间不变, 则对时间的微分和对空间的积分可交换次序。所以, 对于各向同性的线性媒质, 坡印廷定理表示如下:

$$\begin{aligned} - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV \end{aligned} \quad (5-44)$$

为了说明式(5-44)的物理意义, 我们首先假设储存在时变电磁场中的电磁能量密度

的表示形式和静态场的相同, 即  $w = w_e + w_m$ 。其中,  $w_e = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})$  为电场能量密度,  $w_m = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$  为磁场能量密度, 它们的单位都是  $\text{J/m}^3$ 。另外, 引入一个新矢量:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5-45)$$

称为坡印廷矢量, 单位是  $\text{W/m}^2$ 。据此, 坡印廷定理可以写为

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (5-46)$$

上式右边第一项表示体积  $V$  中电磁能量随时间的增加率, 第二项表示体积  $V$  中的热损耗功率(单位时间内以热能形式损耗在体积  $V$  中的能量)。根据能量守恒定理, 上式左边一项  $-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$  必定代表单位时间内穿过体积  $V$  的表面  $S$  流入体积  $V$  内的电磁能量。因此, 面积分  $\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$  表示单位时间内流出包围体积  $V$  的表面  $S$  的总电磁能量。由此可见, 坡印廷矢量  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  可解释为通过  $S$  面上单位面积的电磁功率。在空间任一点上, 坡印廷矢量的方向表示该点功率流的方向, 而其数值表示通过与能量流动方向垂直的单位面积的功率。所以, 坡印廷矢量也称为电磁功率流密度或能流密度矢量。

需要指出, 认为坡印廷矢量代表电磁功率流密度的推断并不严格。虽然坡印廷定理肯定了  $\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$  具有确定的意义(流出封闭面的总能流), 然而这并不等于说在有电场和磁场的地方,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  就一定代表该处有电磁能量的流动。因为在坡印廷定理中, 真正表示空间任一点能量密度变化的是  $\nabla \cdot \mathbf{S}$  而不是坡印廷矢量本身。

在静电场和静磁场情况下, 由于电流为零( $\mathbf{J} = 0$ )以及  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = 0$ , 所以坡印廷定理只剩一项  $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。由坡印廷定理可知, 此式表示在场中任何一点, 单位时间流出包围体积  $V$  表面的总能量为零, 即没有电磁能量流动。由此可见, 在静电场和静磁场情况下,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  并不代表电磁功率流密度。

在恒定电流的电场和磁场情况下,  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = 0$ , 所以由坡印廷定理可知,  $\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ 。因此, 在恒定电流场中,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  可以代表通过单位面积的电磁功率流。它说明, 在无源区域中, 通过  $S$  面流入  $V$  内的电磁功率等于  $V$  内的损耗功率。

在时变电磁场中,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  代表瞬时功率流密度, 它通过任意截面积的面积分  $P = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$  代表瞬时功率。

应用坡印廷定理可以解释许多电磁现象, 下面举例说明。

**例 5-10** 试求一段半径为  $b$ , 电导率为  $\sigma$ , 载有直流电流  $I$  的长直导线表面上的坡印廷矢量, 并验证坡印廷定理。

**解:** 如图 5-6, 一段长度为  $l$  的长直导线, 其轴线与圆柱坐标系的  $z$  轴重合, 直流电

流将均匀分布在导线的横截面上,于是有

$$\mathbf{J} = e_z \frac{I}{\pi b^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = e_z \frac{I}{\pi b^2 \sigma}$$

在导线表面,有

$$\mathbf{H} = e_\phi \frac{I}{2\pi b}$$

因此,导线表面上的坡印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -e_r \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}$$

它的方向处处沿径向的相反方向指向导线的表面。将坡印廷矢量沿导线段表面积分,有

$$\begin{aligned} -\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} &= -\oint_S \mathbf{S} \cdot e_r dS \\ &= \left( \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} \right) 2\pi b l = I^2 \left( \frac{l}{\sigma\pi b^2} \right) = I^2 R \end{aligned}$$

式中  $R$  为导线段的电阻。上式表明,从导线表面流入的电磁能流等于导线内部欧姆热损耗功率。这验证了坡印廷定理。

**例 5-11** 设同轴线的内导体半径为  $a$ , 外导体内半径为  $b$ , 内、外导体间为空气, 内、外导体均为理想导体, 载有直流电流  $I$ , 内、外导体间的电压为  $U$ , 求同轴线的传输功率和能流密度矢量。

**解:** 分别根据高斯定理和安培环路定律, 可以求出同轴线内、外导体间的电场和磁场:

$$\mathbf{E} = \frac{U}{r \ln \frac{b}{a}} e_r, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} e_\phi \quad (a < r < b)$$

内、外导体间任意横截面上的能流密度矢量:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{b}{a}} e_z$$

上式说明电磁能量沿  $z$  轴方向流动, 由电源向负载传输。通过同轴线内、外导体间任一横截面的功率为

$$P = \int_{S'} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}' = \int_a^b \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{b}{a}} \cdot 2\pi r dr = UI$$

这一结果与电路理论中熟知的结果一致。然而这个结果是在不包括导体本身在内的横截面上积分得到的, 说明功率全部是从内、外导体之间的空间通过的, 导体本身并不传输能量, 导体的作用只是引导电磁能量。这只能用电磁场的观点来理解, 用电路理论无法加以解释。

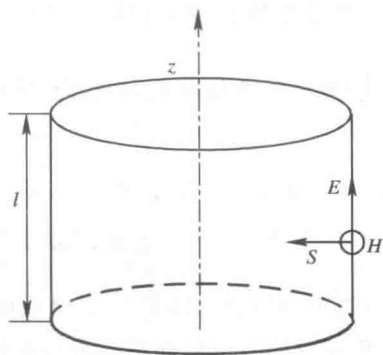


图 5-6 坡印廷定理验证

## 5.6 正弦电磁场

在时变电磁场中, 场量和场源除了是空间的函数, 还是时间的函数。前面讨论的时变电磁场, 对随时间是如何变化未加任何限制, 适用于任何时间变化规律。但是, 其中有一

种特殊情况在工程技术中经常遇到,这就是本节要讨论的正弦电磁场。正弦电磁场也称为时谐电磁场,是指任意点的场矢量的每一坐标分量随时间以相同的频率作正弦或余弦变化。之所以要讨论正弦电磁场,是因为当场源是单频正弦时间函数时,由于麦克斯韦方程组是线性偏微分方程组,所以场源所激励的场强矢量的各个分量,在正弦稳态的条件下,仍是同频率的正弦时间函数,据此建立的时变电磁场可得到显著的简化。根据傅里叶变换理论,任何周期性的或非周期性的时变电磁场都可分解成许多不同频率的正弦电磁场的叠加或积分。在工程技术中激励源多为正弦激励,因此,研究正弦电磁场正是研究一切时变电磁场的基础。

### 5.6.1 正弦电磁场的复数表示法

时变电磁场的任一坐标分量随时间作正弦变化时,其振幅和初相也都是空间坐标的函数。以电场强度为例,在直角坐标系中:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}_x E_x(x, y, z, t) + \mathbf{e}_y E_y(x, y, z, t) + \mathbf{e}_z E_z(x, y, z, t)$$

式中电场强度的各个坐标分量为

$$E_x(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z) \cos[\omega t + \phi_x(x, y, z)]$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_{ym}(x, y, z) \cos[\omega t + \phi_y(x, y, z)]$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_{zm}(x, y, z) \cos[\omega t + \phi_z(x, y, z)]$$

上式中  $E_{xm}$ 、 $E_{ym}$ 、 $E_{zm}$  分别为各坐标分量的振幅值;  $\phi_x$ 、 $\phi_y$ 、 $\phi_z$  分别为各坐标分量的初相角;  $\omega$  是角频率。

与电路理论中的处理相似,利用复数或相量来描述正弦电磁场场量,可使数学运算简化;对时间变量  $t$  进行降阶(把微积分方程变为代数方程)减元(消去各项的共同时间因子  $e^{j\omega t}$ )。例如:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}[E_{xm}(x, y, z)e^{j[\omega t + \phi_x(x, y, z)]}] \\ &= \operatorname{Re}[E_{xm}e^{j\phi_x}e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[\dot{E}_{xm}e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (5-47)$$

式中  $\dot{E}_{xm} = E_{xm}e^{j\phi_x}$  称为复振幅,它仅是空间坐标的函数,与时间  $t$  完全无关。因为它包含场量的初相位,故也称为相量。 $E_x$  为实数,而  $\dot{E}_{xm}$  是复数,但是只要将其乘以因子  $e^{j\omega t}$  并且取其实部便可得到前者。这样,如下关系成立:

$$E_x(x, y, z, t) \leftrightarrow \dot{E}_{xm}(x, y, z) = E_{xm}(x, y, z)e^{j\phi_x(x, y, z)} \quad (5-48)$$

因此,我们也把  $\dot{E}_{xm} = E_{xm}e^{j\phi_x}$  称为  $E_x(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z) \cos[\omega t + \phi_x(x, y, z)]$  的复数形式。按照式(5-47),给定函数  $E_x(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z) \cos[\omega t + \phi_x(x, y, z)]$ , 有唯一的复数  $\dot{E}_{xm} = E_{xm}e^{j\phi_x}$  与之对应;反之亦然。

由于

$$\frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial t} = -E_{xm}(x, y, z) \cdot \omega \cdot \sin[\omega t + \phi_x(x, y, z)] = \operatorname{Re}[j\omega \dot{E}_{xm}e^{j\omega t}]$$

所以,采用复数表示时,正弦量对时间  $t$  的偏导数等价于该正弦量的复数形式乘以  $j\omega$ , 即

$$\frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \dot{E}_{xm}(x, y, z)$$

同理,电场强度矢量也可用复数表示为

$$\begin{aligned} E(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}[(e_x E_{xm} e^{j\phi_x} + e_y E_{ym} e^{j\phi_y} + e_z E_{zm} e^{j\phi_z}) e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[(e_x \dot{E}_{xm} + e_y \dot{E}_{ym} + e_z \dot{E}_{zm}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (5-49)$$

式中  $\dot{\mathbf{E}} = e_x \dot{E}_{xm} + e_y \dot{E}_{ym} + e_z \dot{E}_{zm}$  称为电场强度的复振幅矢量或复矢量, 它只是空间坐标的函数, 与时间  $t$  无关。这样我们就把时间  $t$  和空间  $x, y, z$  的四维  $(x, y, z, t)$  矢量函数简化成了空间  $(x, y, z)$  的三维函数, 即

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = e_x \dot{E}_{xm} + e_y \dot{E}_{ym} + e_z \dot{E}_{zm}$$

相反, 若由场量的复数形式获得其瞬时值, 只要将其复振幅矢量乘以  $e^{j\omega t}$  并取实部, 便得到其相应的瞬时值:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{j\omega t}]$$

**例 5-12** 将下列用复数形式表示的场矢量变换成瞬时值, 或作相反的变换。

$$(1) \dot{\mathbf{E}} = e_x \dot{E}_0$$

$$(2) \dot{\mathbf{E}} = e_x j E_0 e^{-jkz}$$

$$(3) \mathbf{E} = e_x E_0 \cos(\omega t - kz) + e_y 2E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\text{解: } (1) \mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[e_x E_0 e^{j\phi_x} e^{j\omega t}] = e_x E_0 \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$(2) \mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[e_x E_0 e^{j(\frac{\pi}{2} - kz)} e^{j\omega t}] = e_x E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3) \mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[e_x E_0 e^{j(\omega t - kz)} - e_y 2E_0 e^{j(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})}]$$

$$\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = (e_x - e_y 2j) E_0 e^{-jkz}$$

**例 5-13** 将下列场矢量的复数形式写为瞬时值形式。

$$(1) \mathbf{E} = e_z E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-jk_z z}$$

$$(2) \mathbf{E} = e_x j 2E_0 \sin\theta \cos(k_x \cos\theta) e^{-jk_z \sin\theta}$$

**解:** (1) 根据式(5-47), 可得瞬时值形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{Re}[e_z E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-jk_z z} e^{j\omega t}] \\ &= e_z E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t - k_z z) \end{aligned}$$

(2) 瞬时值形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{Re}[e_x 2E_0 \sin\theta \cos(k_x \cos\theta) e^{-jk_z \sin\theta} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}] \\ &= e_x 2E_0 \sin\theta \cos(k_x \cos\theta) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - k_z \sin\theta\right) \\ &= -e_x 2E_0 \sin\theta \cos(k_x \cos\theta) \sin(\omega t - k_z \sin\theta) \end{aligned}$$

## 5.6.2 麦克斯韦方程的复数形式

在复数运算中, 对复数的微分和积分运算是分别对其实部和虚部进行的, 并不改变其实部和虚部的性质, 故

$$L(\operatorname{Re} \dot{a}) = \operatorname{Re}(L \dot{a})$$

式中  $L$  为实线性算子, 例如  $\partial/\partial t$ 、 $\nabla$ 、 $\int$ 、 $\cdots$ 、 $dt$  等。因此

$$\nabla \times \mathbf{H}(t) = \mathbf{J}(t) + \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{J}} e^{j\omega t}] + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}]$$



考虑到复数运算有

$$\operatorname{Re}[\nabla \times \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{J}} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[j\omega \dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}]$$

$$\operatorname{Re}[\nabla \times \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} - \dot{\mathbf{J}} e^{j\omega t} - j\omega \dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}] = 0$$

$$\operatorname{Re}[(\nabla \times \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{J}} - j\omega \dot{\mathbf{D}}) e^{j\omega t}] = 0$$

故对  $t$  任意时, 有

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \quad (5-50a)$$

同理, 可得式(5-28b)~式(5-28d)对应的复数形式:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \quad (5-50b)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (5-50c)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} \quad (5-50d)$$

以及电流连续性方程的复数形式:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{J}} = -j\omega \dot{\rho} \quad (5-51)$$

显然, 为了把用瞬时值表示的麦克斯韦方程的微分形式写成复数形式, 只要把场量和场源的瞬时值换成对应矢量的复数形式, 把微分形式方程中的  $\partial/\partial t$  换成  $j\omega$  即可。并且不难看出, 当用复数形式表示后, 麦克斯韦方程中的场量和场源由四维  $(x, y, z, t)$  函数变成了三维  $(x, y, z)$  函数, 变量的维数减少了一个, 且偏微分方程变成了代数方程, 使问题更便于求解。

麦克斯韦方程的积分形式、各向同性线性媒质的本构方程和边界条件等对应的复数形式表示留给读者推导。为了以后书写方便, 表示复量的符号“ $\cdot$ ”均省去。

### 5.6.3 复坡印廷矢量

坡印廷矢量  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t)$  表示瞬时电磁功率流密度, 它没有指定电场强度和磁场强度随时间变化的方式。对于正弦电磁场, 电场强度和磁场强度的每一坐标分量都随时间作周期性的简谐变化, 这时, 每一点处的瞬时电磁功率流密度的时间平均值更具有实际意义。下面我们就来讨论这个问题。

对正弦电磁场, 当场矢量用复数表示时:

$$\mathbf{E}(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{E} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}]$$

$$\mathbf{H}(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{H} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{H}^* e^{-j\omega t}]$$

从而坡印廷矢量瞬时值可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}] \times \frac{1}{2}[\mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{H}^* e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}[\mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{j2\omega t} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^* e^{-j2\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{j2\omega t}] \end{aligned}$$

它在一个周期  $T = 2\pi/\omega$  内的平均值为

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) dt = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right] = \operatorname{Re}[\mathbf{S}]$$

式中:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (5-52)$$

$\mathbf{S}$  称为复坡印廷矢量, 它与时间  $t$  无关, 表示复功率流密度, 其实部为平均功率流密度(有功功率流密度), 虚部为无功功率流密度。特别需要注意的是式中的电场强度和磁场强度是复振幅值而不是有效值;  $\mathbf{E}^*$ 、 $\mathbf{H}^*$  是  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的共轭复数,  $\mathbf{S}_{av}$  称为平均能流密度矢量或平均坡印廷矢量。

类似地可得到电场能量密度、磁场能量密度和导电损耗功率密度的表示式:

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{E}(t) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*] + \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} e^{j2\omega t}] \quad (5-53)$$

$$w_m(t) = \frac{1}{2} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{H}(t) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*] + \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} e^{j2\omega t}] \quad (5-54)$$

$$p(t) = \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{E}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} e^{j2\omega t}] \quad (5-55)$$

上面各式中, 右边第一项是各对应量的时间平均值, 它们都仅是空间坐标的函数。单位体积电场和磁场储能、导电损耗功率密度在一周期  $T$  内的时间平均值为

$$w_{av,e} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*], \quad w_{av,m} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*], \quad p_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*]$$

#### 5.6.4 复介电常数与复磁导率

媒质在电磁场作用下呈现三种状态: 极化、磁化和传导, 它们可用一组宏观电磁参数表征, 即介电常数、磁导率和电导率。在静态场中这些参数都是实常数; 而在时变电磁场作用下, 反映媒质电磁特性的宏观参数与场的时间变化有关, 对正弦电磁场即与频率有关。研究表明: 一般情况下(特别在高频场作用下), 描述媒质色散特性的宏观参数为复数, 其实部和虚部都是频率的函数, 且虚部总是负数, 即

$$\epsilon_c = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega), \quad \mu_c = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega), \quad \sigma_c = \sigma'(\omega) - j\sigma''(\omega)$$

式中  $\epsilon_c$ 、 $\mu_c$  分别称为复介电常数和复磁导率。必须指出, 金属导体的电导率在直到红外线的整个射频范围内均可看作实数, 且与频率无关。这些复数宏观电磁参数表明, 同一媒质在不同频率的场作用下, 可以呈现不同的媒质特性。

下面讨论介质的复数电磁参数的虚部所反映的能量损耗。电导率  $\sigma \neq 0$  的介质, 电磁波的电场在其中产生的传导电流密度为  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ , 从而引起功率损耗, 使电磁波的幅度衰减, 其单位体积的导电功率损耗时间平均值为

$$p = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E}^*] = \frac{1}{2} \sigma E_m^2$$

如仅考虑介质中复介电常数  $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$  的虚部所反映的能量损耗, 则介质中位移电流密度为

$$\mathbf{J}_d = j\omega \epsilon_c \mathbf{E} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'') \mathbf{E} = j\omega \epsilon' \mathbf{E} + \omega \epsilon'' \mathbf{E}$$

其中与  $\mathbf{E}$  同相的位移电流分量也引起功率损耗。介质单位体积极化功率损耗的时间平均值可以表示为

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{J}_d \cdot \mathbf{E}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathrm{j}\omega(\epsilon' - \mathrm{j}\epsilon'')\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\omega\epsilon''E_m^2 + \mathrm{j}\omega\epsilon'E_m^2] = \frac{1}{2} \omega\epsilon''E_m^2
 \end{aligned}$$

其中  $E_m$  为振幅值。由上式可见, 单位体积的极化损耗功率与  $\epsilon''(\omega)$  成正比; 同样,  $\mu''(\omega)$  反映介质的磁化损耗, 且与磁化损耗功率成正比。

复介电常数和复磁导率的幅角称为损耗角, 分别用  $\delta_\epsilon$  和  $\delta_\mu$  表示, 且把

$$\tan\delta_\epsilon = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}, \quad \tan\delta_\mu = \frac{\mu''}{\mu'}$$

称为损耗角正切。由给定频率上的损耗角正切的大小, 可以说明媒质在这个频率上的损耗大小。

对于具有复介电常数的导电媒质, 考虑到传导电流  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , 式(5-28a)变为

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma\mathbf{E} + \mathrm{j}\omega(\epsilon' - \mathrm{j}\epsilon'')\mathbf{E} = (\sigma + \omega\epsilon'')\mathbf{E} + \mathrm{j}\omega\epsilon'\mathbf{E} \\
 &= \mathrm{j}\omega\left[\epsilon' - \mathrm{j}\left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)\right]\mathbf{E} = \mathrm{j}\omega\epsilon_c\mathbf{E}
 \end{aligned} \quad (5-56)$$

上式表明, 导电媒质中的传导电流和位移电流可以用一个等效的位移电流代替; 导电媒质的电导率和介电常数的总效应可用一个等效复介电常数表示, 即

$$\epsilon_c = \epsilon' - \mathrm{j}\left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right) \quad (5-57)$$

式(5-57)表明  $\epsilon''$  与  $\sigma/\omega$  的能量损耗作用等效, 且  $\sigma/\omega$  代表媒质的导电损耗。引入等效复介电常数的概念后, 电导率变成等效复介电常数的虚数部分, 因此可以把导体也视为一种等效的有耗电介质。引入复介电常数和复磁导率后, 有耗媒质和理想介质中的麦克斯韦方程组在形式上就完全相同了, 因此可以采用同一种方法分析有耗媒质和理想介质中的电磁波特性, 只需用  $\epsilon_c$  和  $\mu_c$  分别代替理想介质情况下的  $\epsilon$  和  $\mu$ 。

### 5.6.5 复坡印廷定理

下面我们来研究场量用复数表示时坡印廷定理的表示式——复坡印廷定理。利用矢量恒等式  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ , 可知

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) = \frac{1}{2} \mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*)$$

将式(5-50a)和式(5-50b)代入上式得

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) = \frac{1}{2} \mathbf{H}^* \cdot (-\mathrm{j}\omega\mathbf{B}) - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{J}^* - \mathrm{j}\omega\mathbf{D}^*)$$

整理上式有

$$-\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* + \mathrm{j}2\omega \left( \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right)$$

这个公式表明了作为点函数的功率密度关系。对其两端取体积分, 并应用散度定理得

$$\begin{aligned}
 -\oint_S \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \mathrm{j}2\omega \int_V \left( \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right) \mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \mathrm{d}V
 \end{aligned} \quad (5-58)$$

这就是用复矢量表示的坡印廷定理, 称为复坡印廷定理。

设宏观电磁参数  $\sigma$  为实数, 磁导率和介电常数为复数, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* &= \frac{1}{2}\sigma E^2 \\ \frac{j\omega}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* &= \frac{j\omega}{2}(\mu' - j\mu'')\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \frac{1}{2}\omega\mu''H^2 + \frac{1}{2}j\omega\mu'H^2 \\ -\frac{j\omega}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* &= -\frac{j\omega}{2}(\epsilon' + j\epsilon'')\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2}\omega\epsilon''E^2 - \frac{1}{2}j\omega\epsilon'E^2\end{aligned}$$

将以上各式代入式(5-58), 得

$$\begin{aligned}-\oint_S \left( \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot d\mathbf{S} \\ = \int_V \left( \frac{1}{2}\sigma E^2 + \frac{1}{2}\omega\epsilon''E^2 + \frac{1}{2}\omega\mu''H^2 \right) dV + j2\omega \int_V \left( \frac{1}{4}\mu'H^2 - \frac{1}{4}\epsilon'E^2 \right) dV \\ = \int_V (p_{av,e} + p_{av,e} + p_{av,m}) dV + j2\omega \int_V (\omega_{av,m} - \omega_{av,e}) dV\end{aligned}\quad (5-59)$$

式中:  $p_{av,e}$ 、 $p_{av,e}$ 、 $p_{av,m}$  分别是单位体积内的导电损耗功率、极化损耗功率和磁化损耗功率的时间平均值;  $\omega_{av,e}$  和  $\omega_{av,m}$  分别是电场和磁场能量密度的时间平均值。

**例 5-14** 已知无源( $\rho=0$ ,  $\mathbf{J}=\mathbf{0}$ )的自由空间中, 时变电磁场的电场强度复矢量

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{e}_y E_0 e^{-jkz} \quad (\text{V/m})$$

式中,  $k$ 、 $E_0$  为常数。求:

- (1) 磁场强度复矢量;
- (2) 坡印廷矢量的瞬时值;
- (3) 平均坡印廷矢量。

**解:** (1) 由  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$  得

$$\mathbf{H}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \times (\mathbf{e}_y E_0 e^{-jkz}) = -\mathbf{e}_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{-jkz}$$

(2) 电场、磁场的瞬时值为

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(z) e^{j\omega t}] = \mathbf{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \text{Re}[\mathbf{H}(z) e^{j\omega t}] = -\mathbf{e}_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz)$$

所以, 坡印廷矢量的瞬时值为

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)$$

(3) 平均坡印廷矢量:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{av} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z)] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \mathbf{e}_y E_0 e^{-jkz} \times \left( -\mathbf{e}_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{-jkz} \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \mathbf{e}_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \right] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\end{aligned}$$

### 5.6.6 时变电磁场的唯一性定理

当我们用麦克斯韦方程组求解某一具体电磁场问题时, 首先要明确的一个问题是: 我们所得到的解是否唯一? 在什么条件下所得到的解是唯一的? 这就是时变电磁场的唯一性定理要回答的问题。

时变电磁场解的唯一性定理可表述如下：对于  $t > 0$  的所有时刻，由曲面  $S$  所围成的闭域  $V$  内的电磁场是由  $V$  内的电磁场  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  在  $t = 0$  时刻的初始值，以及  $t \geq 0$  时刻边界面  $S$  上的切向电场或者切向磁场所唯一确定。

证明时变电磁场的唯一性定理的方法，同静态场的唯一性定理的证明方法一样，仍采用反证法。即设两组解  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{H}_2$  都是体积  $V$  中满足麦克斯韦方程组和边界条件的解，在  $t = 0$  时刻它们在  $V$  内所有点上都相等，但  $t > 0$  的所有时刻它们不相等。设媒质是线性媒质，则麦克斯韦方程组也是线性的。根据麦克斯韦方程组的线性性质，这两组解的差  $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ 、 $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$  也必定是麦克斯韦方程组的解。对于这组差值解，应用坡印廷定理应有

$$-\oint_S (\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon |\Delta \mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\Delta \mathbf{H}|^2 \right) dV + \int_V \sigma |\Delta \mathbf{E}|^2 dV$$

因为在边界面  $S$  上，电场的切向分量或者磁场的切向分量已经给定，所以电场  $\Delta \mathbf{E}$  的切向分量或者磁场  $\Delta \mathbf{H}$  的切向分量必为零，这就是说

$$\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E} = 0 \quad \text{或者} \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{H} = 0$$

故必有

$$\mathbf{n} \cdot (\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}) = \Delta \mathbf{H} \cdot (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E} \cdot (\Delta \mathbf{H} \times \mathbf{n}) = 0$$

所以  $\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}$  在边界面  $S$  上的法向分量为零，即应用坡印廷定理所得表示式左端的积分为零。因此

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon |\Delta \mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\Delta \mathbf{H}|^2 \right) dV = - \int_V \sigma |\Delta \mathbf{E}|^2 dV$$

上式的右端总是小于或等于零的，而左端代表能量的积分在  $t > 0$  的所有时刻只能大于或等于零。这样上面的等式要成立，只能是等式两边都为零，也就是差值解  $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ ， $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$  在  $t \geq 0$  时刻恒为零。这意味着区域  $V$  内的电磁场  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  只有唯一的一组解，即不可能有两组不同的解，定理得证。

必须注意，时变电磁场唯一性定理的条件，只是给定电场  $\mathbf{E}$  或者磁场  $\mathbf{H}$  在边界面上的切向分量。这就是说，对于一个被闭合面  $S$  包围的区域  $V$ ，如果闭合面  $S$  上电场  $\mathbf{E}$  的切向分量给定；或者闭合面  $S$  上磁场  $\mathbf{H}$  的切向分量给定；或者闭合面  $S$  上一部分区域给定电场  $\mathbf{E}$  的切向分量，其余区域给定磁场  $\mathbf{H}$  的切向分量，那么在区域  $V$  内的电磁场  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  是唯一确定的。另一方面，为了能由麦克斯韦方程组解出时变电磁场，一般需要同时应用边界面上的电场  $\mathbf{E}$  切向分量和磁场  $\mathbf{H}$  切向分量边界条件。因此，对于时变电磁场，只要满足边界条件就必能保证解的唯一性。

## 5.7 波动方程

电磁波的存在是麦克斯韦方程组的一个重要结果。1865 年，麦克斯韦从他的方程组出发推导出了波动方程，并得到了电磁波速度的一般表示式，由此预言电磁波的存在及电磁波与光波的同一性。1887 年，赫兹用实验方法产生和检测了电磁波。下面我们从麦克斯韦方程导出波动方程。

考虑媒质均匀、线性、各向同性，且研究的区域为无源 ( $\mathbf{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ )、无导电损耗

( $\sigma=0$ )的情况。这时麦克斯韦方程变为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5-60a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5-60b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5-60c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5-60d)$$

对式(5-60b)两边取旋度, 并利用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H})$$

将式(5-60a)和式(5-60d)代入上式得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

整理后有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5-61)$$

类似地, 可推导出

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5-62)$$

式(5-61)和式(5-62)是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 满足的无源空间的瞬时值矢量齐次波动方程。其中 $\nabla^2$ 为矢量拉普拉斯算符。无源、无耗区域中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 可以通过解式(5-61)或式(5-62)得到。求解这类矢量方程有两种方法: 一种是直接寻求满足该矢量方程的解; 另一种是设法将矢量方程分解为标量方程, 通过求解标量方程来得到矢量函数的解。例如在直角坐标系中, 由 $\mathbf{E}$ 的矢量波动方程可以得到三个标量波动方程:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

但要注意, 只有在直角坐标系中才能得到每个方程中只含有一个未知函数的三个标量波动方程, 在其它正交曲线坐标系中, 矢量波动方程分解得到的三个标量波动方程都具有复杂的形式。

对于正弦电磁场, 可由复数形式的麦克斯韦方程导出复数形式的波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5-63)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (5-64)$$

式中

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (5-65)$$

式(5-63)和式(5-64)分别是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 满足的无源、无耗空间的复数矢量波动方程,又称为矢量齐次亥姆霍兹方程。必须指出,式(5-63)和式(5-64)的解还需要满足散度为零的条件,即必须满足:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

如果媒质是有耗的,即介电常数和磁导率均是复数,则 $k$ 也相应地变为复数 $k_c$  ( $k_c = \omega \cdot \sqrt{\mu_c \epsilon_c}$ );对于导电媒质,采用式(5-57)中的等效复介电常数 $\epsilon'' = \sigma/\omega$ 代替式(5-65)中的 $\epsilon$ ,波动方程形式不变。

波动方程的解表示时变电磁场将以波动形式传播,构成电磁波。波动方程在自由空间的解是一个沿某一特定方向以光速传播的电磁波。研究电磁波的传播问题都可归结为在给定边界条件和初始条件下求波动方程的解。

**例 5-15** 在无源区求均匀导电媒质中电场强度和磁场强度满足的波动方程。

**解:** 考虑到各向同性、线性、均匀的导电媒质和无源区域,由麦克斯韦方程有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

利用矢量恒等式,并且代入式(5-28a)和式(5-28d),得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

所以,电场强度 $\mathbf{E}$ 满足的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

同理,可得磁场强度 $\mathbf{H}$ 满足的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

## 5.8 时变电磁场中的位函数

在电磁理论所研究的问题中,有一类问题是根据所给定的场源,求它所产生的电磁场。此时应从麦克斯韦方程组出发。当外加场源不为零时,麦克斯韦方程组的一般形式为式(5-28a)~式(5-28d)。如果将式(5-28a)两边取旋度后,再将式(5-28b)和式(5-28c)代入其相关项,可得

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (5-66)$$

用类似的方法也可获得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \quad (5-67)$$

方程式(5-66)和式(5-67)称为有源区域的非齐次矢量波动方程。由于外加场源都以复杂形式出现在方程中,所以根据区域中源的分布,直接求解这两个非齐次矢量波动方程是相当困难的。为了使分析得以简化,可以像静态场那样引入位函数。

因为  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , 根据矢量恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , 可以令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5-68)$$

代入式(5-28b)得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

即

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$$

根据矢量恒等式  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ , 可以令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

则

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5-69)$$

式中:  $\mathbf{A}$  称为矢量磁位(简称磁矢位), 其单位是  $\text{T} \cdot \text{m}$ (特斯拉·米)或  $\text{Wb/m}$ (韦伯/米);  $\varphi$  称为标量电位, 单位为  $\text{V}$ (伏)。如果  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  已知, 则可由式(5-68)和式(5-69)确定  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$ 。但是满足这两式的  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  并不是唯一的。例如, 我们取另一组位函数:

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$$

则有

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}, \quad -\nabla \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{E}$$

根据亥姆霍兹定理, 要唯一地确定  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$ , 还需要知道  $\mathbf{A}$  的散度的值。我们可以任意地规定  $\mathbf{A}$  的散度值, 从而得到一组确定的  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  的解, 再代入式(5-68)和式(5-69)后得到电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  均满足的麦克斯韦方程。

下面推导时变电磁场中, 磁矢位  $\mathbf{A}$  和标量位  $\varphi$  在均匀媒质中满足的波动方程。把式(5-68)和式(5-69)代入式(5-28d)和式(5-28a), 得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned} \quad (5-70)$$

及

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

整理后有

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (5-71)$$

于是我们得到了用位函数表示的两个方程式(5-70)和式(5-71), 但是这两个方程都包含有  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$ , 是联立方程。如果适当地选择  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  的值, 就可以使这两个方程进一步简化为分别只含有一个位函数的方程。为此我们选择:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5-72)$$



式(5-72)称为洛伦兹条件或洛伦兹规范。可以证明洛伦兹条件符合电流连续性方程。将其代入式(5-70)和式(5-71)就得到

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5-73)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (5-74)$$

这两个彼此相似而独立的线性二阶微分方程在数学形式上称为达朗贝尔方程,且式(5-73)和式(5-74)分别显示  $\mathbf{A}$  的源是  $\mathbf{J}$ , 而  $\varphi$  的源是  $\rho$ 。洛伦兹条件是人为地采用的散度值。如果不采用洛伦兹条件而采用另外的  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  的值,得到的  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  的方程将不同于式(5-73)和式(5-74),并得到另一组  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  的解,但最后得到的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  是相同的。

对于正弦电磁场,上面的公式可以用复数表示为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5-75)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - j\omega \mathbf{A} \quad (5-76)$$

洛伦兹条件变为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\varphi \quad (5-77)$$

而  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  的方程变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (5-78)$$

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5-79)$$

其中  $k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$ 。由此可见,采用位函数使原来求解电磁场量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  的六个标量分量变为求解  $\mathbf{A}$  和  $\varphi$  的四个标量分量。而且,因为标量位  $\varphi$  可以由洛伦兹条件求得:

$$\varphi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{-j\omega\mu\epsilon} \quad (5-80)$$

这样只需求解  $\mathbf{A}$  的三个标量分量,使场量的计算大为简化。而在无源区域中,还可以进一步简化。

最后要指出,描述电磁场的位函数不仅限于这一种,还有其它一些辅助位函数,不同的位函数都与相应的物理模型有关。

**例 5-16** 已知时变电磁场中磁矢位  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_m \sin(\omega t - kz)$ , 其中  $A_m$ 、 $k$  是常数,求电场强度、磁场强度和坡印廷矢量。

**解:** 由式(5-68)得

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_y \frac{\partial A_x}{\partial z} = -\mathbf{e}_y k A_m \cos(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_y \frac{k}{\mu} A_m \cos(\omega t - kz)$$

由洛伦兹条件式(5-72)有

$$\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \varphi = C$$

对于时谐场,洛伦兹条件转化为  $j\omega\mu\epsilon\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ , 而此题中  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 由于  $\omega\mu\epsilon \neq 0$ , 故有  $\varphi = 0$ 。由式(5-69)得

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{e}_x \omega A_m \cos(\omega t - kz)$$

坡印廷矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) \\ &= [-e_x \omega A_m \cos(\omega t - kz)] \times \left[ -e_y \frac{k}{\mu} A_m \cos(\omega t - kz) \right] \\ &= e_z \frac{\omega k}{\mu} A_m^2 \cos^2(\omega t - kz) \end{aligned}$$

### 小 结

(1) 法拉第电磁感应定律表明时变磁场产生电场的规律。对于电磁场中任意的闭合回路,有

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ 即 } \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

其对应的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

对于运动媒质,有

$$\mathcal{E} = \oint_l \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_s -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

其对应的微分形式为

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(2) 电位移  $\mathbf{D}$  的时变率为位移电流密度, 即  $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 。安培定律中引入的位移电流, 表现时变电场产生磁场:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

其对应的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

可见, 包括位移电流在内的全电流是连续的。

(3) 麦克斯韦方程组、电流连续性原理和洛伦兹力公式共同构成经典电磁理论的基础。麦克斯韦方程组如下:

微分形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

积分形式

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

在线性、各向同性媒质中,场量的关系由三个辅助方程

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

表示,称为本构关系。电磁参量  $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$  与位置无关的媒质为均匀媒质;反之为非均匀媒质。对于各向异性媒质,这些电磁参量为张量;非线性媒质的电磁参量与场强相关。只有代入本构关系,麦克斯韦方程才是可以求解的。

(4) 在时变场情况下,由于  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  和  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  有限,两种媒质分界面上电磁场的边界条件与静态场的边界条件形式完全相同。

法向分量的边界条件:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

切向分量的边界条件:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

对于  $\rho_s=0$ 、 $\mathbf{J}_s=0$  的分界面,只需要切向分量的边界条件。

在理想导体( $\sigma=\infty$ )表面,若  $\mathbf{n}$  为理想导体的外法向单位矢量,则上列各式中带下标 1 的场量为零。

(5) 电磁场的能量转化和守恒定律称为坡印廷定理:每秒体积中电磁能量的增加量等于从包围体积的闭面进入体积的功率。其数学表达式为

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_m + w_e) dV + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

坡印廷矢量(能流矢量):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

表示沿能流方向穿过垂直于  $\mathbf{S}$  的单位面积的功率的矢量,即功率流密度。

(6) 正弦电磁场是电磁场矢量的每个分量都随时间以相同的频率作正弦变化的电磁场,也称为时谐电磁场。用振幅的复数表示矢量场的每一分量。复矢量是一个矢量的三个分量的复数的组合,是一个简化书写的记号。复矢量仅与空间坐标有关。

坡印廷矢量的时间平均值为

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) dt = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right]$$

式中  $\frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$  称为复坡印廷矢量。

有耗电介质用复介电常数  $\epsilon_c = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega)$  表示,  $\epsilon''$  与极化损耗对应;有耗磁介质用复磁导率  $\mu_c = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega)$  表示,  $\mu''$  与磁化损耗对应;等效复介电常数为  $\epsilon_c = \epsilon' - j\left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)$ , 将电导率用等效复介电常数的虚部表示,  $\sigma$  与导电损耗对应。

(7) 均匀、线性、各向同性的无耗媒质中,无源区域( $\mathbf{J}=0$ ,  $\rho=0$ )的电场强度矢量  $\mathbf{E}$  和磁场强度矢量  $\mathbf{H}$  的波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

(8) 为了简化分析,引入磁矢位  $\mathbf{A}$  和标量电位  $\varphi$ , 它们的定义为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

选择洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

可得磁矢位  $\mathbf{A}$  和标量电位  $\varphi$  满足的微分方程:

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

实际上只要求出  $\mathbf{A}$ , 就可以由洛伦兹条件和磁矢位  $\mathbf{A}$ 、标量电位  $\varphi$  的定义确定  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ 。

### 习 题 五

5-1 单极发电机为一个在均匀磁场  $\mathbf{B}$  中绕轴旋转的金属圆盘, 圆盘的半径为  $a$ , 角速度为  $\omega$ , 圆盘与磁场垂直, 求感应电动势。

5-2 一个电荷  $Q$ , 以恒定速度  $v$  ( $v \ll c$ ) 沿半径为  $a$  的圆形平面  $S$  的轴线向此平面移动, 当两者相距为  $d$  时, 求通过  $S$  的位移电流。

5-3 假设电场是正弦变化的, 海水的电导率为  $4 \text{ S/m}$ ,  $\epsilon_r = 81$ , 求当  $f = 1 \text{ MHz}$  时, 确定位移电流与传导电流模的比值。

5-4 一圆柱形电容器, 内导体半径为  $a$ , 外导体内半径为  $b$ , 长度为  $l$ , 电极间介质的介电常数为  $\epsilon$ 。当外加低频电压  $u = U_m \sin \omega t$  时, 求介质中的位移电流密度及穿过半径为  $r$  ( $a < r < b$ ) 的圆柱面的位移电流。证明此位移电流等于电容器引线中的传导电流。

5-5 已知在空气媒质的无源区域中, 电场强度  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 100 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ , 其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为常数, 求磁场强度。

5-6 证明麦克斯韦方程组包含了电荷守恒定律。

5-7 证明媒质分界面上没有自由面电荷和自由面电流 ( $\rho_s = 0$ ,  $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$ ) 时, 分界面上只有两个切向分量的边界条件是独立的, 法向分量的边界条件已经包含在切向分量的边界条件中。

5-8 在两导体平板 ( $z=0$  和  $z=d$ ) 之间的空气中传输的电磁波, 其电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x)$$

其中  $k_x$  为常数。试求:

(1) 磁场强度矢量  $\mathbf{H}$ 。

(2) 两导体表面上的面电流密度  $\mathbf{J}_s$ 。

5-9 假设真空中的磁感应强度  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_y 10^{-2} \cos(6\pi \times 10^8 t) \cos(2\pi z) \text{ T}$ , 试求位移电流密度。

5-10 在理想导电壁 ( $\sigma = \infty$ ) 限定的区域 ( $0 \leq x \leq a$ ) 内存在一个如下的电磁场:

$$E_y = H_0 \mu \omega \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t)$$

$$H_x = H_0 k \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$$

这个电磁场满足的边界条件如何? 导电壁上的电流密度的值如何?

5-11 一段由理想导体构成的同轴线, 内导体半径为  $a$ , 外导体内半径为  $b$ , 长度为  $l$ , 同轴线两端用理想导体板短路。已知在  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq z \leq l$  区域内的电磁场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{A}{r} \sin kz, \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_\theta \frac{B}{r} \cos kz$$

(1) 确定  $A$ 、 $B$  之间的关系。

(2) 确定  $k$ 。

(3) 求  $r=a$  及  $r=b$  面上的  $\rho_s$ 、 $\mathbf{J}_s$ 。

5-12 一根半径为  $a$  的长直圆柱导体上通过直流电流  $I$ 。假设导体的电导率  $\sigma$  为有限值, 求导体表面附近的坡印廷矢量, 计算长度为  $l$  的导体所损耗的功率。

5-13 将下列场矢量的瞬时值与复数值相互表示:

(1)  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_y E_{ym} \cos(\omega t - kx + \alpha) + \mathbf{e}_z E_{zm} \sin(\omega t - kx + \alpha)$ ;

(2)  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x H_0 k \left(\frac{a}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t) + \mathbf{e}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$ ;

(3)  $E_{zm} = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-jk_z z}$ ;

(4)  $E_{xm} = 2jE_0 \sin\theta \cos(k_x x \cos\theta) e^{-jk_z \sin\theta}$ 。

5-14 一振幅为  $50 \text{ V/m}$ 、频率为  $1 \text{ GHz}$  的电场存在于相对介电常数为  $2.5$ 、损耗角正切为  $0.001$  的有耗电介质中, 求每立方米媒质中消耗的平均功率。

5-15 已知无源、自由空间中的电场强度矢量  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_m \sin(\omega t - kz)$ :

(1) 由麦克斯韦方程求磁场强度。

(2) 证明  $\omega/k$  等于光速。

(3) 求坡印廷矢量的时间平均值。

5-16 已知真空中电场强度  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos k_0(z - ct) + \mathbf{e}_y E_0 \sin k_0(z - ct)$ , 式中  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} =$

$\frac{\omega}{c}$ , 试求:

(1) 磁场强度和坡印廷矢量的瞬时值。

(2) 对于给定的  $z$  值(例如  $z=0$ ), 试确定  $\mathbf{E}$  随时间变化的轨迹。

(3) 磁场能量密度、电场能量密度和坡印廷矢量的时间平均值。

5-17 设真空中同时存在两个正弦电磁场, 其电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_{10} e^{-jk_1 z}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_y E_{20} e^{-jk_2 z}$$

试证总的平均功率流密度等于两个正弦电磁场的平均功率流密度之和。

5-18 证明真空中无源区域的:

(1) 麦克斯韦方程组。

(2) 坡印廷矢量。

(3) 能量密度在下列变换

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos\theta + c\mathbf{B} \sin\theta$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{E}}{c} \sin\theta + \mathbf{B} \cos\theta$$

中不变。其中： $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ； $\theta$  为任意的恒定角度。

5-19 证明均匀、线性、各向同性的导电媒质中，无源区域的正弦电磁场满足波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - j\omega\mu\sigma\mathbf{H} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H} = 0$$

5-20 证明有源区域内电场强度矢量  $\mathbf{E}$  和磁场强度矢量  $\mathbf{H}$  满足有源波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

5-21 在麦克斯韦方程中，若忽略  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  或  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，证明磁矢位和标量电位满足泊松方程：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

5-22 证明洛伦兹条件和电流连续性方程是等效的。

5-23 试证在下列变换

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos\theta + c\mathbf{B} \sin\theta$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mathbf{E}}{c} \sin\theta + \mathbf{B} \cos\theta$$

中总能量密度  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2$  也具有不变性。其中： $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ； $\theta$  为任意的恒定角度。

### 综合性拓展练习题

1. 简要说明詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 (James Clerk Maxwell) 的主要科学贡献和学习方法。

2. 简述微波炉的工作原理、发展历程、国家标准。思考如何进行设计能够把微波能量均匀地分布在烹调腔内。

3. 设无源、无界、简单介质中(真空)，时谐场矢量沿直角坐标轴极化，证明电磁波的传播速度为光速。

4. 研究时变电磁场能量与能流现象的工程应用实例，表述其中的物理内涵。

5. 简述无线电技术及发展趋势。